

Obsah přednášky :

těžiště čar, ploch a těles,

Pappus - Guldinovy věty

Doba studia :

asi 1,5 hodiny

Cíl přednášky :

*Seznámit studenty se způsobem určování polohy těžiště,
se způsobem výpočtu povrchu a objemu rotačně symetrických těles.*

Těžiště je velmi důležitý bod tělesa, se kterým se budeme v mechanice často setkávat. Než se seznámíme se způsobem jeho určení, je třeba jej definovat.

Těžiště je působiště výslednice tíhových sil.

Představme si, že těleso je složeno z několika menších těles (v některých případech dokonce z nekonečně mnoha nekonečně malých těles).

Na každé dílčí těleso působí dílčí tíhová síla. Jejich součet pak dává tíhu celého tělesa. Ta však, jako výslednice silové soustavy, má i své působiště; a to je právě těžiště. Je zřejmé, že pro stanovení těžiště využijeme poznatky, se kterými jsme se seznámili v kapitole o určování výslednice silové soustavy s různými působišti.

Někdy se pojem „těžiště“ vysvětluje jako „bod, v němž je soustředěna hmota tělesa“. Tato formulace je nepřesná a nemá charakter definice.

Je rovněž nesprávná, protože hmota tělesa není koncentrovaná v jednom bodě, naopak je rovnoměrně rozložena v objemu tělesa.

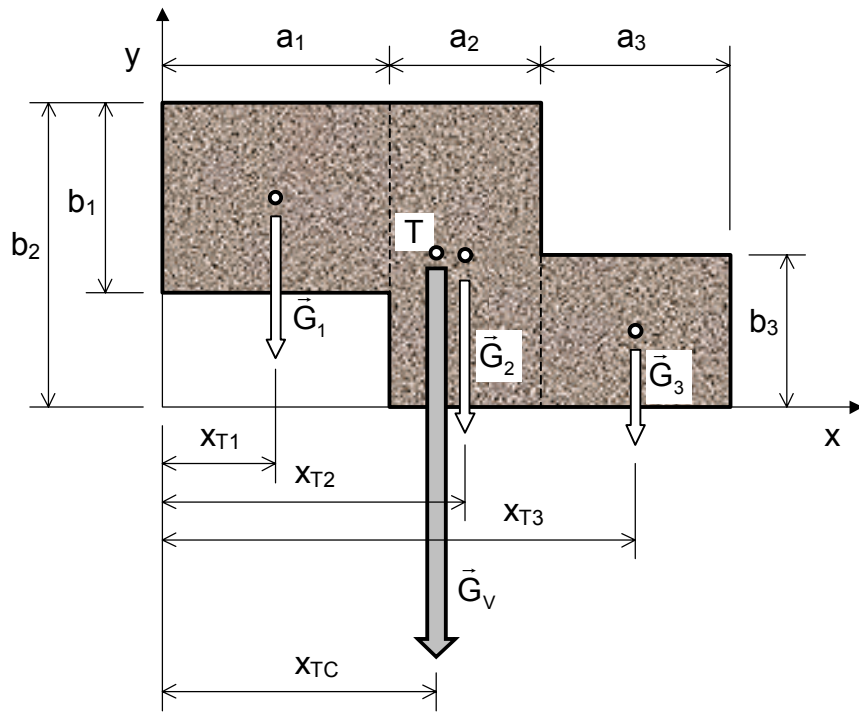
Jako výraz elementárního porozumění pojmu „těžiště“ je však vcelku přijatelná.

V následujícím textu budeme určovat polohu těžiště tří různých typů objektů :

- těleso (trojrozměrné),*
- plocha (dvojměrná - plech, vystřižený do určitého tvaru),*
- čára (jednorozměrná - tvarovaný drát).*

Těžiště plochy.

Postup si vysvětlíme na těžišti plochy, protože pro tento typ objektu je výklad nejnázornější.



$$\vec{G}_V = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3$$

$$G_V = G_1 + G_2 + G_3$$

$$G_V = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g + m_3 \cdot g$$

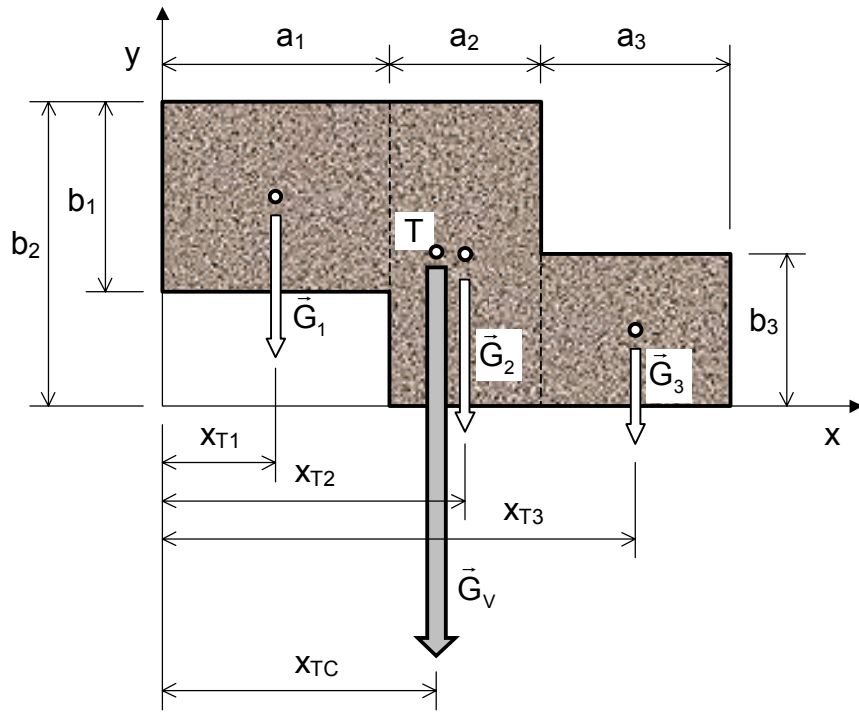
$$G_V = \rho_1 \cdot t_1 \cdot S_1 \cdot g + \rho_2 \cdot t_2 \cdot S_2 \cdot g + \rho_3 \cdot t_3 \cdot S_3 \cdot g$$

Představme si plošný útvar, složený ze tří obdélníků. Jde o reálné těleso s určitou hmotností, např. výstřižek z plechu. Tíha každého ze tří obdélníků (úměrná jejich ploše) působí v těžišti obdélníku (v průsečíku úhlopříček). Tyto tíhové síly tvoří silovou soustavu, jež má svou výslednici. Vzhledem k tomu, že síly jsou navzájem rovnoběžné, je jejich výslednice dána prostým součtem dílčích tíhových sil. Působíště výslednice pak je těžištěm tělesa (plochy). Umístíme-li plochu do souřadného systému, doplníme o rozměry a vyjádříme dílčí tíhové síly a jejich součet - výslednici, můžeme polohu těžiště vyjádřit z momentové podmínky rovnováhy.

Zde ρ_1 , ρ_2 a ρ_3 jsou hustoty materiálů jednotlivých obdélníků, t_1 , t_2 a t_3 jsou jejich tloušťky, a_1 , a_2 , ... b_3 jsou rozměry obdélníků a $S_1=a_1 \cdot b_1$, $S_2=a_2 \cdot b_2$ a $S_3=a_3 \cdot b_3$ jsou plochy obdélníků. Konečně g je gravitační zrychlení.

Těžiště plochy.

Postup si vysvětlíme na těžišti plochy, protože pro tento typ objektu je výklad nejnázornější.



Jsou-li dále $x_{T1} = a_1/2$, $x_{T2} = a_1 + a_2/2$ a $x_{T3} = a_1 + a_2 + a_3/2$ souřadnice těžišť jednotlivých obdélníků a x_{TC} je souřadnice těžiště celkové plochy, lze vyjádřit rovnost momentu výslednice k počátku souřadného systému a součtu momentů dílčích tíhových sil.

$$G_V \cdot x_{TC} = G_1 \cdot x_{T1} + G_2 \cdot x_{T2} + G_3 \cdot x_{T3}$$

a odtud konečně určit souřadnici těžiště celkové plochy :

$$x_{TC} = \frac{G_1 \cdot x_{T1} + G_2 \cdot x_{T2} + G_3 \cdot x_{T3}}{G_V}$$

Jsou-li všechny tři obdélníky ze stejného materiálu a je-li tedy

$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, lze hustotu v čitateli

a jmenovateli vykrátit. Souřadnice těžiště pak je :

$$x_{TC} = \frac{\rho_1 \cdot t_1 \cdot S_1 \cdot x_{T1} + \rho_2 \cdot t_2 \cdot S_2 \cdot x_{T2} + \rho_3 \cdot t_3 \cdot S_3 \cdot x_{T3}}{\rho_1 \cdot t_1 \cdot S_1 + \rho_2 \cdot t_2 \cdot S_2 + \rho_3 \cdot t_3 \cdot S_3}$$

$$x_{TC} = \frac{t_1 \cdot S_1 \cdot x_{T1} + t_2 \cdot S_2 \cdot x_{T2} + t_3 \cdot S_3 \cdot x_{T3}}{t_1 \cdot S_1 + t_2 \cdot S_2 + t_3 \cdot S_3}$$

Mají-li všechny obdélníky stejnou tloušťku

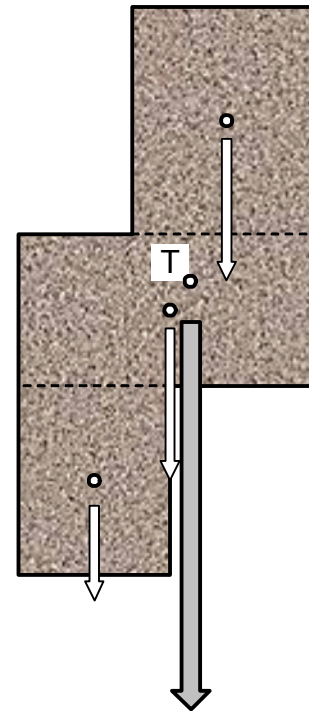
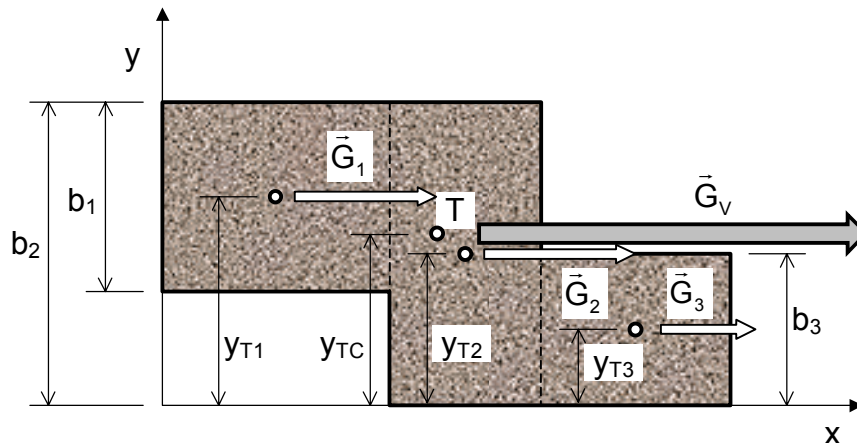
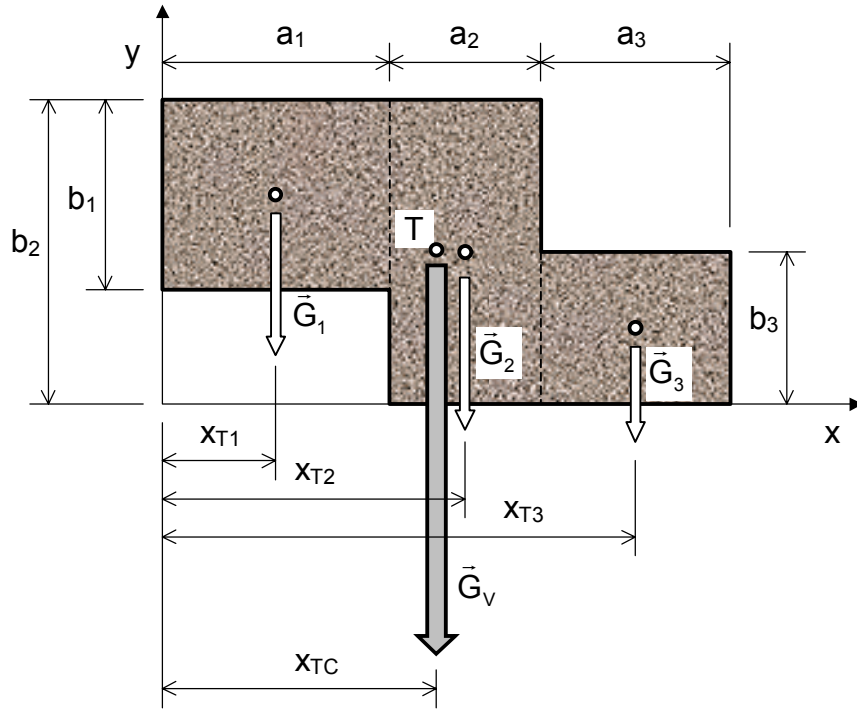
$t_1 = t_2 = t_3 = t$, lze rovněž tuto tloušťku vykrátit

a souřadnice těžiště pak je dána výrazem :

$$x_{TC} = \frac{S_1 \cdot x_{T1} + S_2 \cdot x_{T2} + S_3 \cdot x_{T3}}{S_1 + S_2 + S_3}$$

Těžiště plochy.

Postup si vysvětlíme na těžišti plochy, protože pro tento typ objektu je výklad nejnázornější.



Těžiště tělesa je jednoznačný bod, jehož poloha je s tělesem pevně spojena. Poloha těžiště v tělese se nezmění, jakkoliv změníme polohu tělesa.

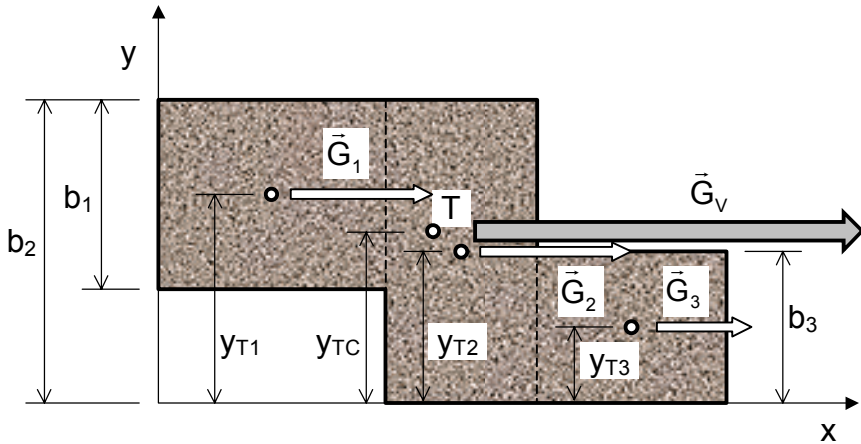
Otočíme-li například těleso o 90°, poloha těžiště se nezmění.

Vyšetříme-li opět souřadnici těžiště, nebude to již souřadnice v původním směru, ale ve směru kolmém.

Abychom to provedli, není nutné kreslit nový obrázek, stačí když pomyslně otočíme o 90° směr působení tíhových sil.

Těžiště plochy.

Postup si vysvětlíme na těžišti plochy, protože pro tento typ objektu je výklad nejnázornější.



Souřadnice těžišť jednotlivých obdélníků jsou

$$y_{T1}=b_2-b_1/2, \quad y_{T2}=b_2/2 \quad \text{a} \quad y_{T3}=b_3/2,$$

rovnice vyjadřující rovnost momentu výslednice a součtu momentů dílčích tíhových sil má tvar :

$$G_V \cdot y_{TC} = G_1 \cdot y_{T1} + G_2 \cdot y_{T2} + G_3 \cdot y_{T3}$$

a odtud výraz pro souřadnici těžiště :

$$y_{TC} = \frac{G_1 \cdot y_{T1} + G_2 \cdot y_{T2} + G_3 \cdot y_{T3}}{G_V}$$

$$y_{TC} = \frac{\rho_1 \cdot t_1 \cdot S_1 \cdot y_{T1} + \rho_2 \cdot t_2 \cdot S_2 \cdot y_{T2} + \rho_3 \cdot t_3 \cdot S_3 \cdot y_{T3}}{\rho_1 \cdot t_1 \cdot S_1 + \rho_2 \cdot t_2 \cdot S_2 + \rho_3 \cdot t_3 \cdot S_3}$$

resp. při stejném materiálu obdélníků
(hustota se vykrátí) :

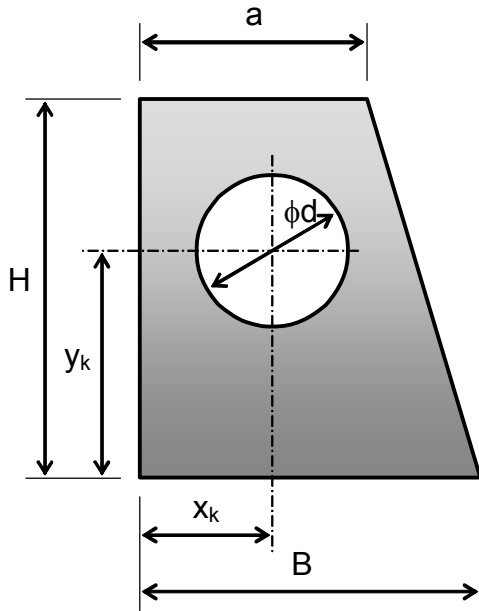
$$y_{TC} = \frac{t_1 \cdot S_1 \cdot y_{T1} + t_2 \cdot S_2 \cdot y_{T2} + t_3 \cdot S_3 \cdot y_{T3}}{t_1 \cdot S_1 + t_2 \cdot S_2 + t_3 \cdot S_3}$$

resp. při shodné tloušťce obdélníků
(tloušťka se vykrátí) :

$$y_{TC} = \frac{S_1 \cdot y_{T1} + S_2 \cdot y_{T2} + S_3 \cdot y_{T3}}{S_1 + S_2 + S_3}$$

Těžiště plochy.

Postup si vysvětlíme na těžišti plochy, protože pro tento typ objektu je výklad nejnázornější.



Stejně postupujeme, když je třeba „odečíst“ plochu.

Uvedeme číselný příklad.

Těleso má tvar pravoúhlého lichoběžníka o celkových rozměrech $B=4,5$ cm a $H=5$ cm. Délka kratší strany lichoběžníka je $a=3$ cm. V ploše je kruhový otvor o průměru $d=2$ cm, poloha středu kruhu vůči levému dolnímu okraji je dána souřadnicemi $x_k=1,75$ cm a $y_k=3$ cm. Celé těleso je ze stejného materiálu, o stejné tloušťce. Výsledná plocha je dána součtem ploch obdélníka (S_1) a trojúhelníka (S_2), od nichž odečítáme plochu kruhu (S_3).

$$S_1 = H \cdot a \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot H \cdot c \quad S_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$$

kde $c = B - a = 4,5 - 3 = 1,5$ cm

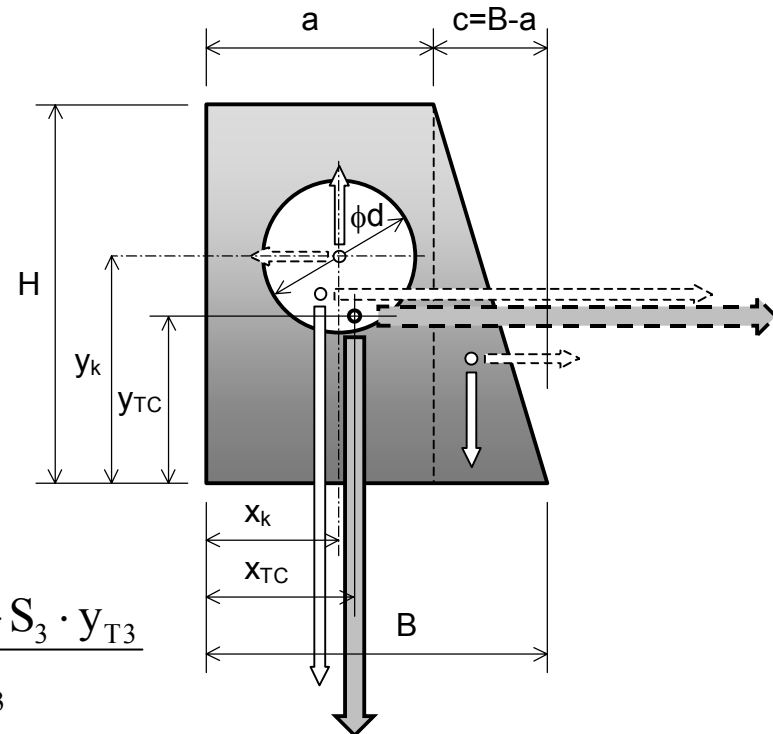
Celková plocha je :

$$S_C = S_1 + S_2 - S_3$$

Souřadnice těžiště celkové plochy jsou dány vztahy :

$$x_{TC} = \frac{S_1 \cdot x_{T1} + S_2 \cdot x_{T2} - S_3 \cdot x_{T3}}{S_1 + S_2 - S_3}$$

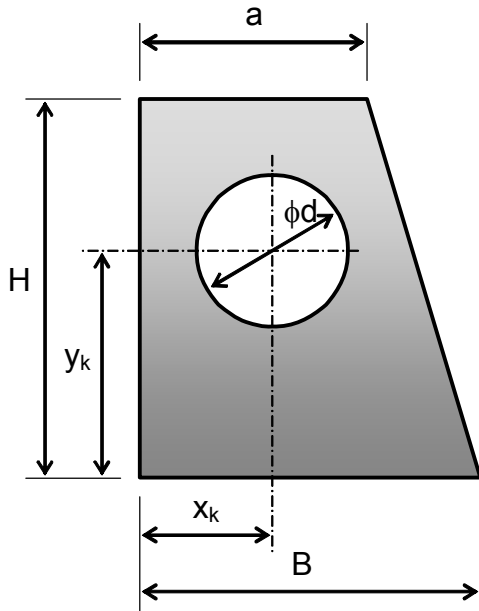
$$y_{TC} = \frac{S_1 \cdot y_{T1} + S_2 \cdot y_{T2} - S_3 \cdot y_{T3}}{S_1 + S_2 - S_3}$$



Těžiště plochy.

Postup si vysvětlíme na těžišti plochy, protože pro tento typ objektu je výklad nejnázornější.

Výpočet můžeme uspořádat do přehledné tabulky :



	i	S_i	x_{Ti}	y_{Ti}		$S_i \cdot x_{Ti}$	$S_i \cdot y_{Ti}$
		[cm ²]	[cm]	[cm]		[cm ² ·cm]	[cm ² ·cm]
obdélník	1	15,00	$a/2=1,5$	$H/2=2,5$	→	22,5	37,5
trojúhelník	2	3,75	$a+c/3=3,5$	$H/3=1,67$	→	13,125	6,25
kruh	3	-3,14	$x_k=1,75$	$y_k=3$	→	-5,495	-9,42
		↓				↓	↓
lichoběžník	Σ	15,61	$x_{TC}=1,93$	$y_{TC}=2,2$	←	30,13	34,33

$$S_1 = H \cdot a \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot H \cdot c \quad S_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$$

kde $c = B - a = 4,5 - 3 = 1,5$ cm

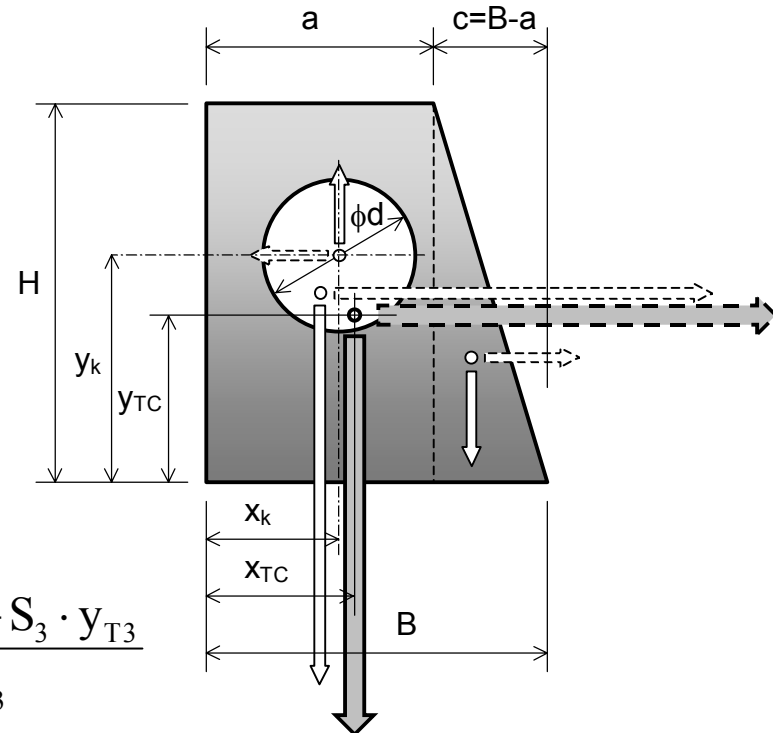
Celková plocha je :

$$S_C = S_1 + S_2 - S_3$$

Souřadnice těžiště celkové plochy jsou dány vztahy :

$$x_{TC} = \frac{S_1 \cdot x_{T1} + S_2 \cdot x_{T2} - S_3 \cdot x_{T3}}{S_1 + S_2 - S_3}$$

$$y_{TC} = \frac{S_1 \cdot y_{T1} + S_2 \cdot y_{T2} - S_3 \cdot y_{T3}}{S_1 + S_2 - S_3}$$



Těžiště plochy.

Na dvou příkladech jsme ukázali postup určení souřadnic těžiště tělesa, které lze považovat za dvourozměrný objekt (plochu).

Zobecníme-li tento postup, dospějeme ke vztahům pro souřadnice těžiště v podobě

$$x_{TC} = \frac{\sum_i \rho_i \cdot t_i \cdot S_i \cdot x_{Ti}}{\sum_i \rho_i \cdot t_i \cdot S_i}$$

$$y_{TC} = \frac{\sum_i \rho_i \cdot t_i \cdot S_i \cdot y_{Ti}}{\sum_i \rho_i \cdot t_i \cdot S_i}$$

Zde :

ρ_i hustota i -té plochy,

t_i tloušťka i -té plochy,

S_i velikost i -té plochy,

x_{Ti}, y_{Ti} x -ová a y -nová souřadnice těžiště i -té plochy.

Výraz ve jmenovateli je celková hmotnost tělesa. Plocha, která je ve skutečnosti prázdná, se jak v čitateli, tak ve jmenovateli dosazuje jako záporná. Pokud je celé těleso ze stejného materiálu, lze hustotu v čitateli a jmenovateli vykrátit. Vztahy pak mají tvar :

$$x_{TC} = \frac{\sum_i t_i \cdot S_i \cdot x_{Ti}}{\sum_i t_i \cdot S_i}$$

$$y_{TC} = \frac{\sum_i t_i \cdot S_i \cdot y_{Ti}}{\sum_i t_i \cdot S_i}$$

V tomto případě představuje výraz ve jmenovateli celkový objem tělesa. Pokud je tloušťka tělesa všude stejná, lze ji vykrátit. Dostáváme pak výrazy v nejjednodušší možné podobě.

$$x_{TC} = \frac{\sum_i S_i \cdot x_{Ti}}{\sum_i S_i}$$

$$y_{TC} = \frac{\sum_i S_i \cdot y_{Ti}}{\sum_i S_i}$$

Suma ve jmenovateli je přirozeně celková plocha tělesa.

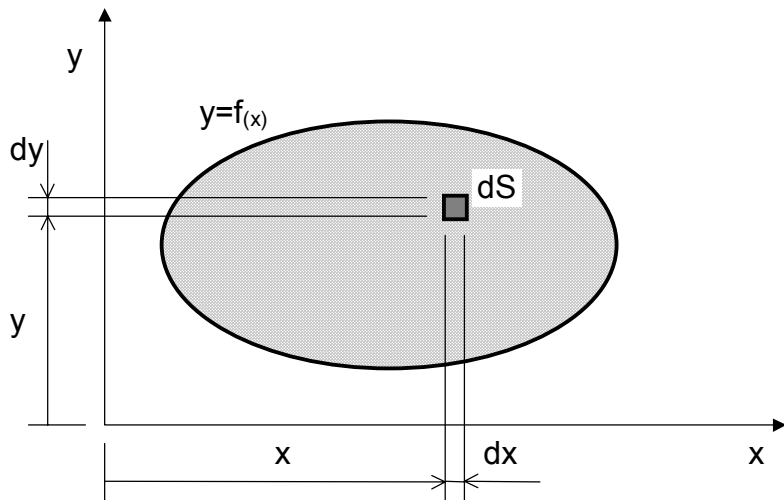
Těžiště plochy.

Uvedeným způsobem lze určit souřadnice těžiště plochy, již lze rozložit na několik dílčích ploch, jejichž těžiště (jeho poloha) je známo.

Takovýchto ploch je poměrně málo (obdélník, trojúhelník, plný kruh, rovnoběžník a snad ještě několik dalších).

V podstatě stejným způsobem, ale s použitím diferenciálního počtu, stanovíme souřadnice těžiště plochy, kterou nelze rozložit na konečný počet „jednoduchých“ ploch.

Plocha ovšem musí být matematicky definována.



Libovolnou plochu můžeme chápat jako složenou z nekonečně mnoha nekonečně malých obdélníků $dS=dx \cdot dy$.

Zde dx a dy jsou nekonečně malé změny souřadnic x a y - diferenciály souřadnic.

Souřadnice těžiště určíme způsobem, popsaným výše. Při tom součet nekonečně mnoha nekonečně malých prvků je integrál.

$$x_T = \frac{\int_S x \cdot dS}{\int_S dS} = \frac{\int_S x \cdot dS}{S} \qquad y_T = \frac{\int_S y \cdot dS}{\int_S dS} = \frac{\int_S y \cdot dS}{S}$$

Konkrétní provedení se může případ od případu v detailech lišit. Ukážeme si řešení dvou úloh.

Těžiště plochy.

Těžiště pravoúhlé úseče paraboly o rozměrech $b \times h$.
V souřadném systému x - y je parabola dána rovnicí :

$$y = f_{(x)} = h - \frac{h}{b^2} \cdot x^2 = h \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

Souřadnice těžiště jsou dány dříve uvedenými vzorci.

$$x_T = \frac{\int_S x \cdot dS}{\int_S dS}$$

$$y_T = \frac{\int_S y \cdot dS}{\int_S dS}$$

Pro parabolu mají tvar :

$$x_T = \frac{\iint x \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$$

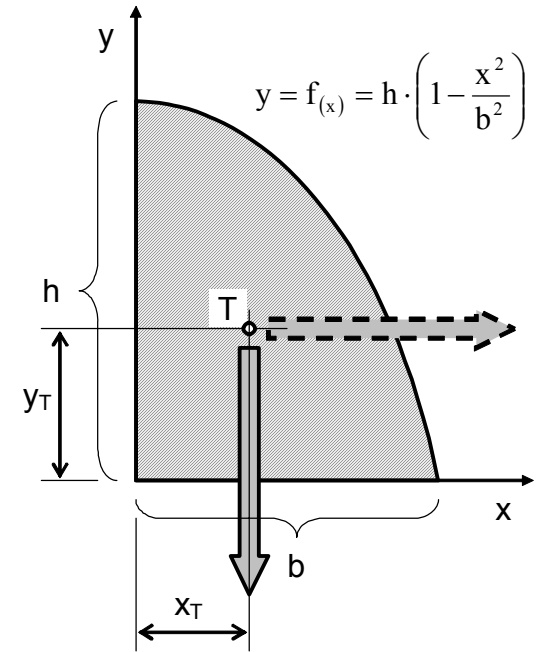
$$y_T = \frac{\iint y \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$$

Integrál ve jmenovateli přirozeně vyjadřuje plochu parabolické úseče.

$$S = \iint dx \cdot dy = \int_0^b \left(\int_0^{f(x)} dy \right) \cdot dx = \int_0^b (y)_0^{f(x)} \cdot dx = \int_0^b h \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \cdot dx = h \cdot \left(\int_0^b dx - \int_0^b \frac{x^2}{b^2} \cdot dx \right)$$

$$S = h \cdot \left(x \Big|_0^b - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^b \right) = h \cdot \left(b - \frac{1}{3}b \right)$$

$$S = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h$$



Těžiště plochy.

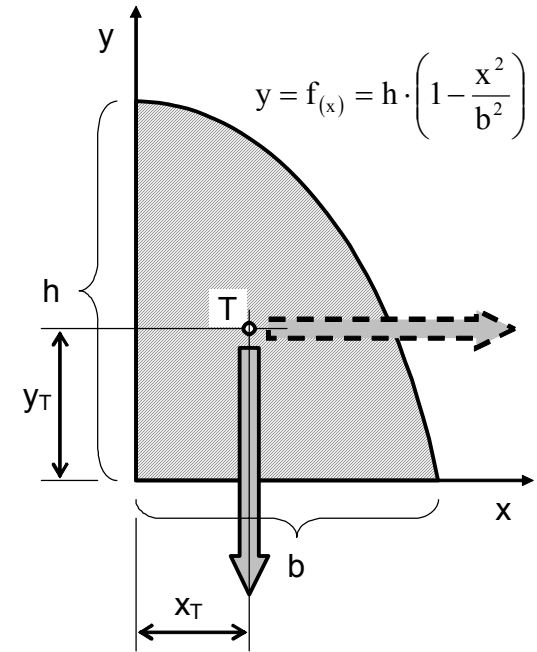
Integrály v čitateli pak jsou statické momenty plochy.

$$\iint x \cdot dx \cdot dy = \int_0^b x \cdot \left(\int_0^{f(x)} dy \right) \cdot dx = \int_0^b x \cdot (y)_0^{f(x)} \cdot dx =$$

$$= \int_0^b x \cdot h \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot dx = h \cdot \left(\int_0^b x \cdot dx - \int_0^b \frac{x^3}{b^2} \cdot dx \right)$$

$$\iint x \cdot dx \cdot dy = h \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^b - \frac{x^4}{4 \cdot b^2} \Big|_0^b \right) = h \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right)$$

$$\iint x \cdot dx \cdot dy = \frac{1}{4} \cdot b^2 \cdot h$$



$$\iint y \cdot dx \cdot dy = \int_0^b \left(\int_0^{f(x)} y \cdot dy \right) \cdot dx = \int_0^b \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^{f(x)} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^b \left[h \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \right]^2 \cdot dx$$

$$\iint y \cdot dx \cdot dy = \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^b \left(1 - 2 \cdot \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} \right) \cdot dx = \frac{h^2}{2} \cdot \left(x \Big|_0^b - \frac{2}{b^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^b + \frac{1}{b^4} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^b \right)$$

$$\iint y \cdot dx \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \left(b - \frac{2}{3} b + \frac{1}{5} b \right) = \frac{4}{15} \cdot b \cdot h^2$$

Těžiště plochy.

Souřadnice těžiště pak tedy jsou :

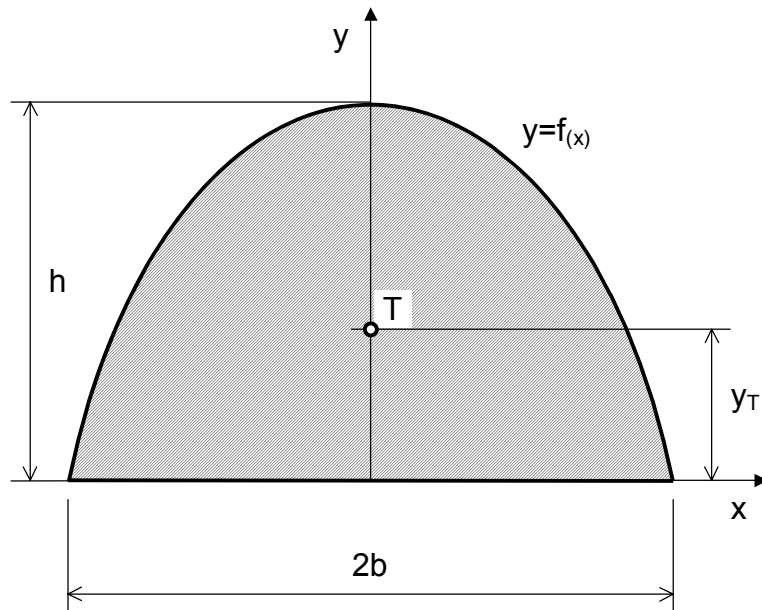
$$x_T = \frac{\iint x \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$$

$$y_T = \frac{\iint y \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$$

$$x_T = \frac{\frac{1}{4} \cdot b^2 \cdot h}{\frac{2}{3} \cdot b \cdot h} = \frac{3}{8} b$$

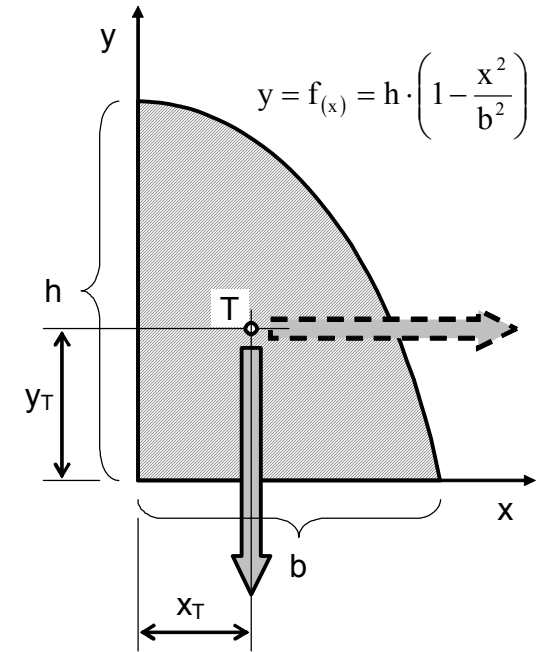
$$y_T = \frac{\frac{4}{15} \cdot b \cdot h^2}{\frac{2}{3} \cdot b \cdot h} = \frac{2}{5} h$$

Pokud se jedná o symetrickou parabolickou úseč, je x-ová souřadnice těžiště, s ohledem na symetrii, nulová, y-nová zůstává beze změny.



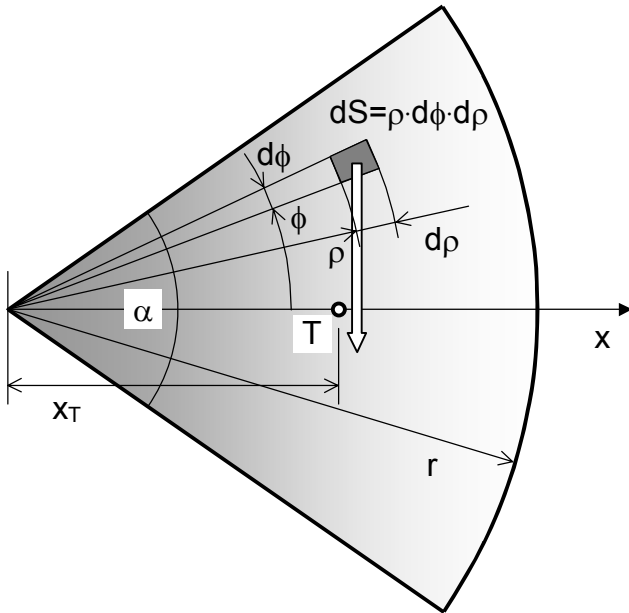
$$x_T = 0$$

$$y_T = \frac{2}{5} h$$



Těžiště plochy.

Výpočet se může poněkud lišit, např. je-li vhodné použít jiný souřadný systém, než kartézský. Ukážeme si výpočet polohy těžiště kruhové výseče o poloměru r a vrcholovém úhlu α .



V tomto případě použijeme polární souřadný systém, jehož souřadnice jsou průvodič ρ a úhel ϕ od řídicí osy x k průvodiči.

Elementární ploška dS je obdélníček o stranách $d\rho$ a $\rho \cdot d\phi$. Je-li řídicí osa osou symetrie, leží na ní těžiště, a jediným údajem, jenž je třeba vypočíst, je vzdálenost x_T těžiště od vrcholu výseče - počátku souřadného systému.

$$x_T = \frac{\int_S x \cdot dS}{\int_S dS}$$

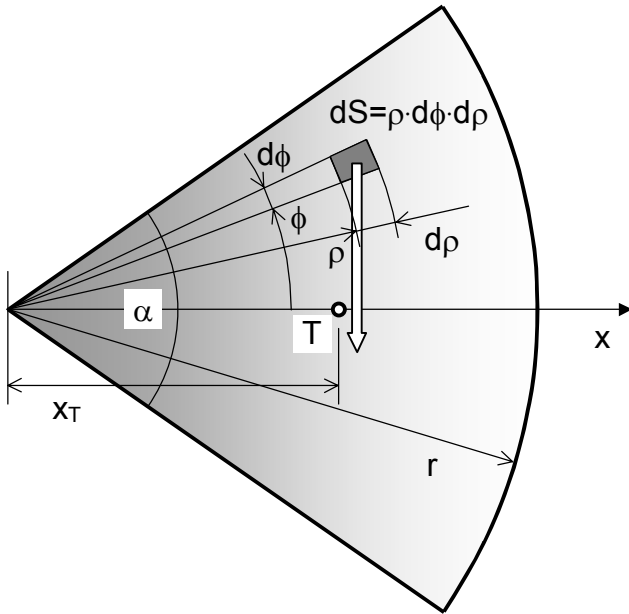
Jmenovatel vyjadřuje plochu kruhové výseče.

$$\int_S dS = \iint \rho \cdot d\rho \cdot d\phi = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\phi \cdot \int_0^r \rho \cdot d\rho = (\phi)_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} \right)_0^r = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot r^2$$

Poznámka : Úhel α se zde dosazuje v obloukové míře (radiány).

Těžiště plochy.

Výpočet se může poněkud lišit, např. je-li vhodné použít jiný souřadný systém, než kartézský. Ukážeme si výpočet polohy těžiště kruhové výseče o poloměru r a vrcholovém úhlu α .



V tomto případě použijeme polární souřadný systém, jehož souřadnice jsou průvodič ρ a úhel ϕ od řídicí osy x k průvodiči.

Elementární ploška dS je obdélníček o stranách $d\rho$ a $\rho \cdot d\phi$. Je-li řídicí osa osou symetrie, leží na ní těžiště, a jediným údajem, jenž je třeba vypočíst, je vzdálenost x_T těžiště od vrcholu výseče - počátku souřadného systému.

$$x_T = \frac{\int_S x \cdot dS}{\int_S dS}$$

Čitatel vyjadřuje statický moment plochy k počátku souřadného systému.

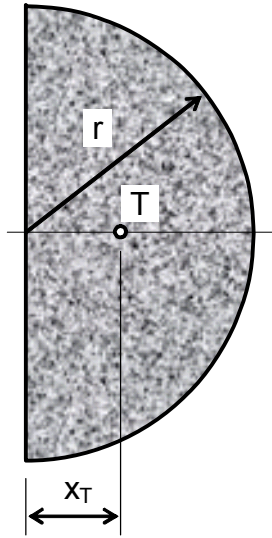
$$\int_S x \cdot dS = \iint \rho \cdot \cos \phi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \phi \cdot d\phi \cdot \int_0^r \rho^2 \cdot d\rho = (\sin \phi)_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right)_0^r = \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \alpha\right) \cdot r^3$$

Souřadnice těžiště pak je :

$$x_T = \frac{\int_S x \cdot dS}{\int_S dS} = \frac{\frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \hat{\alpha}} = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \hat{\alpha}}$$

Těžiště plochy.

Například souřadnice těžiště půlkruhu ($\alpha=180^\circ=3,14$ rad, $\alpha/2=90^\circ=1,57$ rad) je :



$$x_T = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

Těžiště tělesa.

Při hledání těžiště trojrozměrného tělesa postupujeme stejně jako u plochy, pouze přibývá třetí souřadnice.

Pro souřadnice těžiště tělesa, složeného z konečného počtu jednoduchých těles (t.j. takových, jejichž těžiště známe) lze shrnout :

$$x_{TC} = \frac{\sum_i V_i \cdot x_{Ti}}{\sum_i V_i}$$

$$y_{TC} = \frac{\sum_i V_i \cdot y_{Ti}}{\sum_i V_i}$$

$$z_{TC} = \frac{\sum_i V_i \cdot z_{Ti}}{\sum_i V_i}$$

Zde samozřejmě součet ve jmenovateli vyjadřuje celkový objem, součty v čitateli vyjadřují statické momenty objemů k jednotlivým osám.

V případě různých materiálů jsou dílčí objemy V_i jak v čitateli, tak ve jmenovateli navíc vynásobeny hustotou jednotlivých materiálů ρ_i .

Samozřejmě i v tomto případě jsou objemy, jež jsou ve skutečnosti prázdné, záporné (odečítají se).

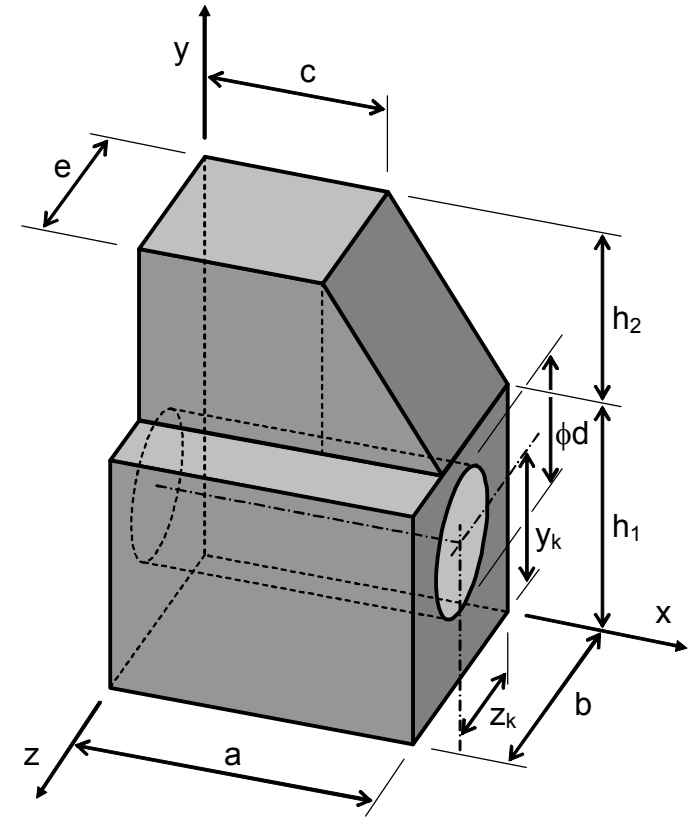
Těžiště tělesa.

Pro ilustraci uvedeme výpočet těžiště trojrozměrného tělesa, jež lze rozložit na velký a malý kvádr, trojúhelníkový hranol a válcovitý otvor, vyvrtaný do velkého kvádru.

Rozměry jsou :

$$\begin{array}{lll} a = 12 \text{ cm} & b = 10 \text{ cm} & h_1 = 10 \text{ cm} \\ c = 8 \text{ cm} & e = 7,5 \text{ cm} & h_2 = 8 \text{ cm} \\ d = 6 \text{ cm} & y_k = 5 \text{ cm} & z_k = 4 \text{ cm} \end{array}$$

Dílčí objemy, souřadnice jejich těžišť a statické momenty objemů k souřadným osám, jakož i výsledné součty opět uspořádáme do tabulky.



	i	V_i [cm ³]	x_{Ti} [cm]	y_{Ti} [cm]	z_{Ti} [cm]		$V_i \cdot x_{Ti}$ [cm ⁴]	$V_i \cdot y_{Ti}$ [cm ⁴]	$V_i \cdot z_{Ti}$ [cm ⁴]
velký kvádr	1	$a \cdot b \cdot h_1 = 1200$	$a/2 = 6$	$h_1/2 = 5$	$b/2 = 5$	→	7200	6000	6000
malý kvádr	2	$c \cdot e \cdot h_2 = 480$	$c/2 = 4$	$h_1 + h_2/2 = 14$	$e/2 = 3,75$	→	1920	6720	1800
trojúh. hranol	3	$(a-c) \cdot e \cdot h_2/2 = 120$	$c + (a-c)/3 = 9,33$	$h_1 + h_2/3 = 12,67$	$e/2 = 3,75$	→	1120	1520	450
válcový otvor	4	$\pi \cdot d^2 \cdot a/4 = -339$	$a/2 = 6$	$y_k = 5$	$z_k = 4$	→	-2034	-1695	-1356
		↓					↓	↓	↓
	Σ	1461	5,62	8,59	4,72	←	8206	12545	6894

Těžiště tělesa.

Podobně pro jakýkoliv matematicky definovaný objem platí.

$$x_T = \frac{\int_V x \cdot dV}{\int_V dV}$$

$$y_T = \frac{\int_V y \cdot dV}{\int_V dV}$$

$$z_T = \frac{\int_V z \cdot dV}{\int_V dV}$$

Jako příklad určíme souřadnice těžiště pravoúhlého trojbokého jehlanu.

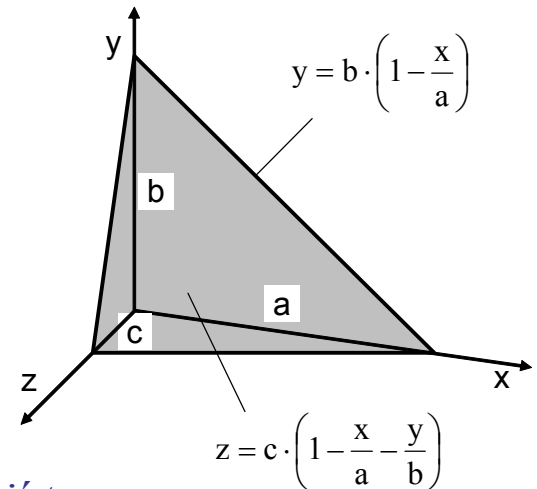
Strany u pravoúhlého vrcholu jsou **a**, **b** a **c**.

Strana jehlanu v rovině **x-y** má rovnici :

$$y = b - \frac{b}{a} \cdot x = b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Čelní rovina jehlanu pak :

$$z = c - \frac{c}{a} \cdot x - \frac{c}{b} \cdot y = c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$



Integrály ve výše uvedených výrazech pro souřadnice těžiště mají tvar :

$$\int_V dV = \iiint dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^a \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} \left(\int_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} dz \right) \cdot dy \right] \cdot dx = \int_0^a \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} (z)_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} \cdot dy \right] \cdot dx$$

*Těžiště tělesa.**Integrály ve výše uvedených výrazech pro souřadnice těžiště mají tvar :*

$$\int_V dV = \iiint dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^a \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} \left(\int_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} dz \right) \cdot dy \right] \cdot dx = \int_0^a \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} (z)_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} \cdot dy \right] \cdot dx$$

$$\int_V dV = c \cdot \int_0^a \left[b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a} \cdot b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) - b^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}{2 \cdot b} \right] \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot dx =$$

$$\int_V dV = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{-a}{3} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \Big|_0^a =$$

$$\int_V dV = V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c$$

Tento integrál samozřejmě vyjadřuje celkový objem.

Těžiště tělesa.

Integrály v čitateli vyjadřují statický moment objemu k souřadným osám :

$$\int_V x \cdot dV = \iiint x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^a x \cdot \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} \left(\int_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} dz \right) \cdot dy \right] \cdot dx = \int_0^a x \cdot \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} (z)_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} \cdot dy \right] \cdot dx =$$

$$\int_V x \cdot dV = \int_0^a x \cdot \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot dy \right] \cdot dx = c \cdot \int_0^a x \cdot \left[y - \frac{x}{a} \cdot y - \frac{y^2}{2 \cdot b} \right]_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} \cdot dx =$$

$$\int_V x \cdot dV = c \cdot \int_0^a x \cdot \left[b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a} \cdot b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) - b^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}{2 \cdot b} \right] \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \int_0^a x \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot dx =$$

$$\int_V x \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \int_0^a \left[x - \frac{2}{a} \cdot x^2 + \frac{1}{a^2} \cdot x^3 \right] \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{a} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^a =$$

$$\int_V x \cdot dV = \frac{1}{24} \cdot a^2 \cdot b \cdot c$$

Těžiště tělesa.

Integrály v čitateli vyjadřují statický moment objemu k souřadným osám :

$$\int_V x \cdot dV = \frac{1}{24} \cdot a^2 \cdot b \cdot c$$

Cyklickou záměnou pak :

$$\int_V y \cdot dV = \frac{1}{24} \cdot a \cdot b^2 \cdot c$$

$$\int_V z \cdot dV = \frac{1}{24} \cdot a \cdot b \cdot c^2$$

Z výše uvedených vztahů vyplývá, že souřadnice těžiště jsou :

$$x_T = \frac{\int_V x \cdot dV}{V} = \frac{\frac{1}{24} \cdot a^2 \cdot b \cdot c}{\frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c}$$

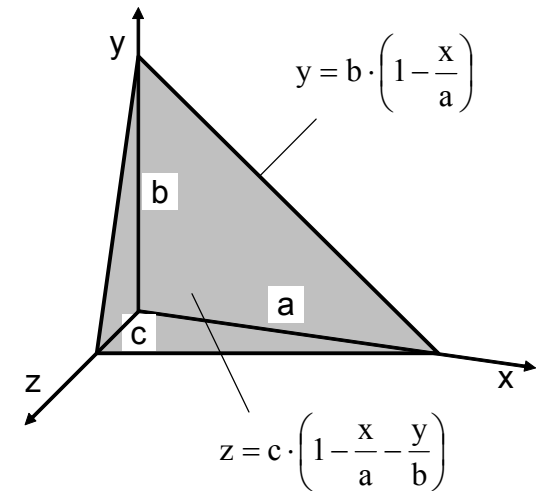
$$x_T = \frac{1}{4} a$$

$$y_T = \frac{\int_V y \cdot dV}{V} = \frac{\frac{1}{24} \cdot a \cdot b^2 \cdot c}{\frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c}$$

$$y_T = \frac{1}{4} b$$

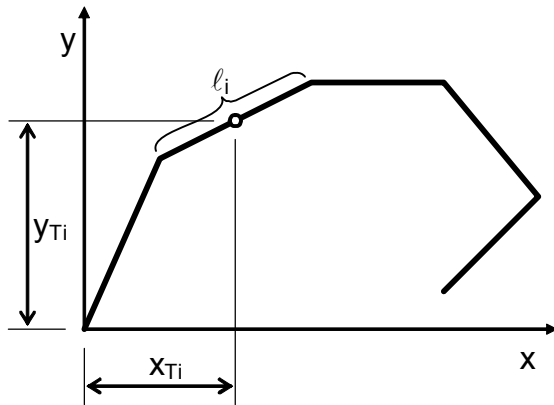
$$z_T = \frac{\int_V z \cdot dV}{V} = \frac{\frac{1}{24} \cdot a \cdot b \cdot c^2}{\frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c}$$

$$z_T = \frac{1}{4} c$$



Těžiště čáry.

Posledním typem objektu, jehož těžištěm se budeme zabývat, je čára. I v tomto případě bude základní postup stejný, jako u plochy a objemu (čáru si můžeme představit jako drát určitého tvaru).



Je-li čára složena z několika jednoduchých čar, jsou souřadnice jejího těžiště :

$$x_T = \frac{\sum_i \ell_i \cdot x_{Ti}}{\sum_i \ell_i}$$

$$y_T = \frac{\sum_i \ell_i \cdot y_{Ti}}{\sum_i \ell_i}$$

$$z_T = \frac{\sum_i \ell_i \cdot z_{Ti}}{\sum_i \ell_i}$$

kde ℓ_i je délka i -té jednoduché čáry, x_{Ti} (y_{Ti} , z_{Ti}) je x -ová (y -nová, z -tová) souřadnice těžiště jednoduché čáry.

Existuje prakticky jediný typ jednoduché čáry, jejíž těžiště je přímo známo - úsečka s těžištěm ve svém středu. Těžiště jiných typů čar (kruhový oblouk apod.) je třeba stanovit.

Jestliže jednotlivé jednoduché čáry jsou dráty odlišných průřezů, je třeba do výrazů pro souřadnice těžiště doplnit průřez jednotlivých čar S_i .

$$x_T = \frac{\sum_i \ell_i \cdot S_i \cdot x_{Ti}}{\sum_i \ell_i \cdot S_i}$$

$$y_T = \frac{\sum_i \ell_i \cdot S_i \cdot y_{Ti}}{\sum_i \ell_i \cdot S_i}$$

$$z_T = \frac{\sum_i \ell_i \cdot S_i \cdot z_{Ti}}{\sum_i \ell_i \cdot S_i}$$

Konečně jsou-li jednotlivé čáry - dráty z různých materiálů o různých hustotách ρ_i , budou ve výrazech i tyto hustoty.

$$x_T = \frac{\sum_i \rho_i \cdot \ell_i \cdot S_i \cdot x_{Ti}}{\sum_i \rho_i \cdot \ell_i \cdot S_i}$$

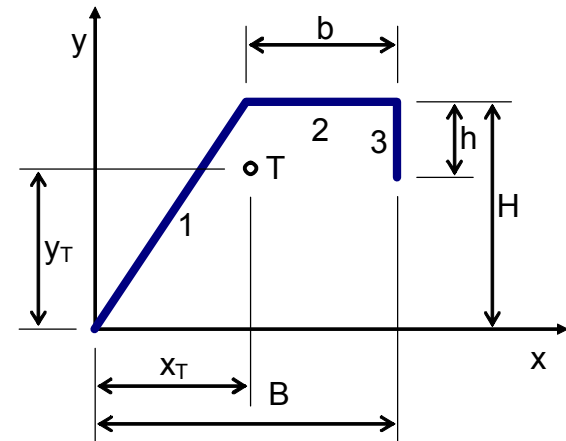
$$y_T = \frac{\sum_i \rho_i \cdot \ell_i \cdot S_i \cdot y_{Ti}}{\sum_i \rho_i \cdot \ell_i \cdot S_i}$$

$$z_T = \frac{\sum_i \rho_i \cdot \ell_i \cdot S_i \cdot z_{Ti}}{\sum_i \rho_i \cdot \ell_i \cdot S_i}$$

Těžiště čáry.

Postup si ukážeme na výpočtu souřadnic těžiště dvakrát zalomené čáry o rozměrech $B=40$ cm, $H=30$ cm, $b=20$ cm a $h=10$ cm (viz obrázek).

i	ℓ_i	x_{Ti}	y_{Ti}		$\ell_i \cdot x_{Ti}$	$\ell_i \cdot y_{Ti}$
	[cm]	[cm]	[cm]		[cm ²]	[cm ²]
1	36	10	15	→	360	540
2	20	30	30	→	600	600
3	10	40	25	→	400	250
	↓				↓	↓
Σ	66	20,6	21,1	←	1360	1390



Poznámka : Těžiště čáry samozřejmě nemusí ležet na této čáře.

Těžiště čáry.

Stejně jako u ploch a objemů, i u čar určujeme polohu těžiště matematicky definované čáry (křivky) tak, že místo sumy použijeme integrál (křivkový).

$$x_T = \frac{\int_L x \cdot d\ell}{\int_L d\ell}$$

$$y_T = \frac{\int_L y \cdot d\ell}{\int_L d\ell}$$

$$z_T = \frac{\int_L z \cdot d\ell}{\int_L d\ell}$$

Jako příklad ukážeme výpočet souřadnice těžiště kruhového oblouku o poloměru r a vrcholovém úhlu α . Jeho těžiště leží na ose symetrie ve vzdálenosti x_T od středu oblouku.

Integrály ve zlomku, určujícím souřadnici těžiště, jsou :

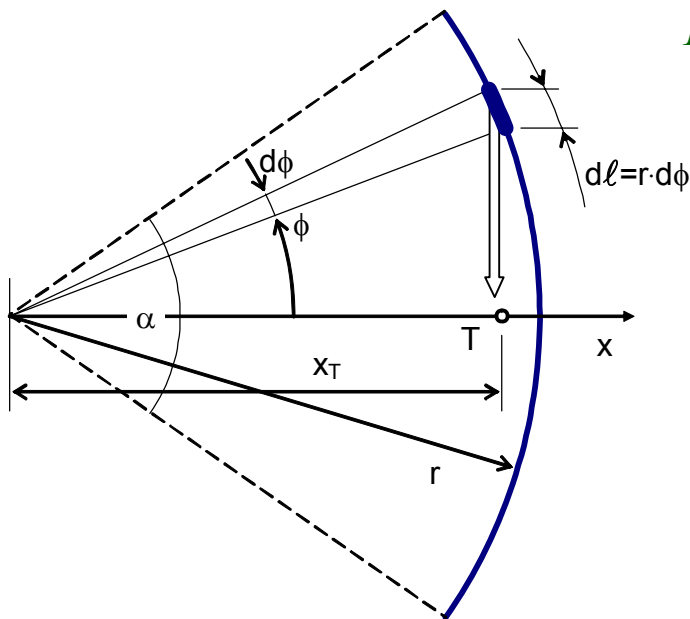
$$\int_L d\ell = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r \cdot d\phi = r \cdot \phi \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = r \cdot \hat{\alpha} = L$$

$$\int_L x \cdot d\ell = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r \cdot \cos \phi \cdot r \cdot d\phi = r^2 \cdot \sin \phi \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = 2 \cdot r^2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha$$

souřadnice těžiště pak je :

$$x_T = \frac{\int_L x \cdot d\ell}{\int_L d\ell} = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{r \cdot \hat{\alpha}} = r \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \hat{\alpha}}$$

Přirozeně i zde se úhel α ve jmenovateli dosazuje v obloukové míře (v radiánech).

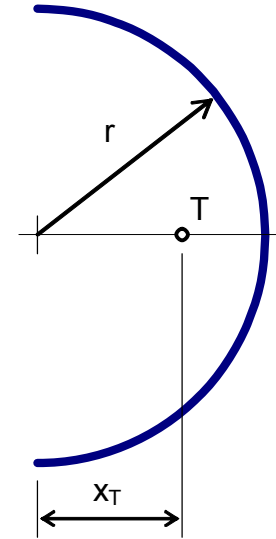


Těžiště čáry.

Například pro půlkružnici (samozřejmě bez průměru) dosadíme :

$$\alpha = 180^\circ = \pi \text{ rad}, \alpha/2 = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}.$$

$$x_T = \frac{2}{\pi} \cdot r$$

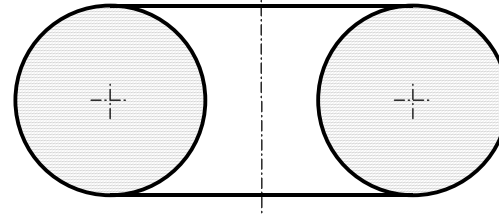
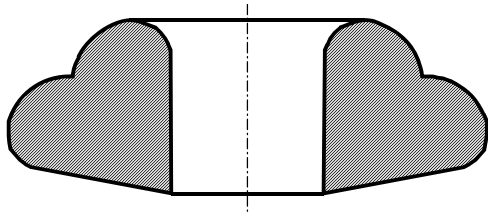


Objem a povrch rotačně symetrických těles - Guldin-Pappovy věty

Poznatků o určování souřadnic těžiště využijeme ještě pro jiný účel

- určení objemu a povrchu rotačně symetrického tělesa.

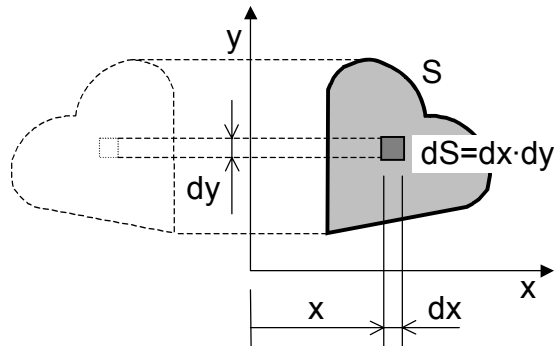
Takové těleso vznikne rotací plošného útvaru okolo osy, ležící v rovině tohoto útvaru.



Je-li např. tvořící plochou kruh, rotací okolo osy vznikne anuloid, tedy „duše“.

Při výpočtu objemu takového tělesa využijeme rotační souměrnosti. Tvořící plochu rozdělíme na nekonečně mnoho elementárních plošek $dS = dx \cdot dy$.

Rotací této plošky okolo osy rotační symetrie vznikne nekonečně tenká obruč o poloměru x .



Vzhledem k nekonečně malým příčným rozměrům obruče můžeme její objem (nekonečně - diferenciálně malý) vypočítat jako součin příčné plochy dS a obvodu obruče $O = 2 \cdot \pi \cdot x$. Celkový objem tělesa je pak dán součtem objemů těchto obručí, tedy integrálem přes tvořící plochu S .

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dS \qquad V = \int_S 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dS = 2 \cdot \pi \cdot \int_S x \cdot dS$$

Integrál v tomto výrazu je rovněž ve vzorci pro souřadnici těžiště plochy :

$$x_T = \frac{\int_S x \cdot dS}{S}$$

Je tedy :

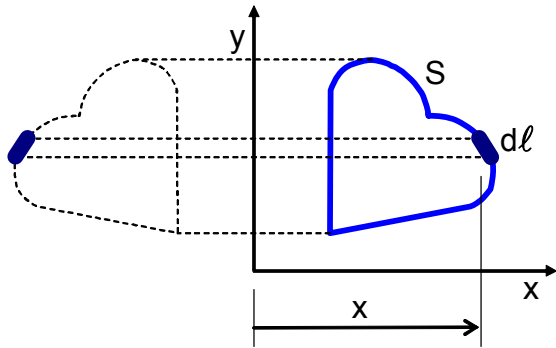
$$\int_S x \cdot dS = x_T \cdot S$$

Objem tělesa pak je :

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_T \cdot S$$

Objem a povrch rotačně symetrických těles - Guldin-Pappovy věty

Podobným způsobem určíme povrch tělesa. Vybereme-li na obvodu tvořící plochy nekonečně krátkou úsečku $d\ell$, vznikne její rotací „prstýnek“ nekonečně malé šířky $d\ell$, o poloměru x .



Obvod prstýnku je : $O = 2 \cdot \pi \cdot x$

Plocha prstýnku je : $dS = O \cdot d\ell = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot d\ell$

Povrch tělesa je pak dán součtem ploch těchto „prstýnků“, tedy integrálem.

Přesněji křivkovým integrálem po obvodu tvořící plochy.

$$S = \int_L 2 \cdot \pi \cdot x \cdot d\ell = 2 \cdot \pi \cdot \int_L x \cdot d\ell$$

Integrál v tomto výrazu však je čitatelem ve vzorci pro souřadnici těžiště čáry (obvodu) :

$$x_T = \frac{\int_L x \cdot d\ell}{L}$$

Je tedy :

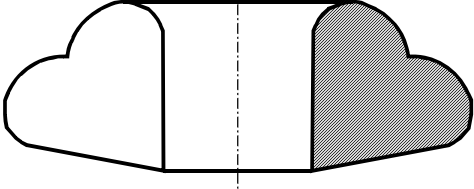
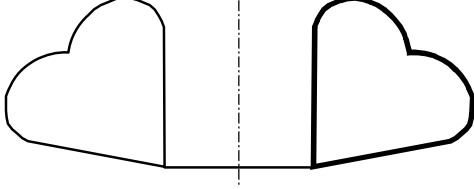
$$\int_L x \cdot d\ell = x_T \cdot L$$

Povrch tělesa pak je :

$$S = 2 \cdot \pi \cdot x_T \cdot L$$

Objem a povrch rotačně symetrických těles - Guldin-Pappovy věty

Takto tedy můžeme poměrně snadno vypočítat objem a povrch rotačně symetrického tělesa, známe-li těžiště tvořícího útvaru. Pro přehlednost zopakujme :

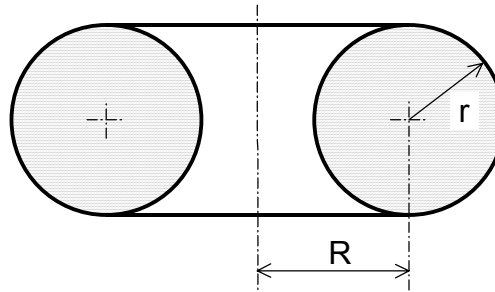
Objem	Povrch
	
<u>Objem</u> vznikne rotací <u>plochy</u> (tvořícím útvarem je plocha)	<u>Povrch</u> vznikne rotací <u>obvodové čáry</u> (tvořícím útvarem je obvodová čára)
$V = 2 \cdot \pi \cdot x_T \cdot S$	$S = 2 \cdot \pi \cdot x_T \cdot L$
V je objem tělesa S je obsah tvořící plochy x_T je souřadnice těžiště tvořící plochy	S je plocha povrchu tělesa L je délka tvořící obvodové čáry x_T je souřadnice těžiště tvořící čáry

Poznámka : Pozor ! Označení S a x_T znamená v obou případech něco jiného !

Objem a povrch rotačně symetrických těles - Guldin-Pappovy věty

Pomocí těchto vzorců snadno vypočteme objem a povrch zmíněného anuloidu, tedy útvaru, který vznikne rotací kruhu okolo osy, ležící vně kruhu (v rovině kruhu).

Poloměr tvořícího kruhu je r , poloměr rotace středu tvořícího kruhu je R .



Obsah tvořící plochy S a délka tvořící obvodové čáry L jsou :

$$S = \pi \cdot r^2$$

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Souřadnice těžiště jak tvořící plochy, tak tvořící obvodové čáry je $x_T = R$.

Objem anuloidu V a jeho povrch S pak jsou :

$$V = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \pi \cdot r^2$$

$$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2$$

$$S = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r$$

Obsah přednášky :

těžiště čar, ploch a těles,

Pappus - Guldinovy věty