

# Výslednice, rovnováha silové soustavy. *Základy mechaniky, 2. přednáška*

## Obsah přednášky :

*výslednice a rovnováha silové soustavy,  
rovnice rovnováhy,  
prostorová silová soustava*

## Doba studia :

*asi 1,5 hodiny*

## Cíl přednášky :

*Seznámit studenty s úlohou výslednice a rovnováhy sil.*

*Silová soustava je soustava dvou nebo více sil.*

*O způsobu stanovení výslednice silové soustavy již pojednávala předcházející kapitola. Tuto problematiku je však třeba doplnit, protože má ještě jeden, zatím nezmiňný aspekt.*

### Ekvivalentní nahrazení silové soustavy - výslednice.

*Již v předcházejícím textu jsme používali termín „výslednice“. Definujme jej :*

**Výslednice silové soustavy je taková síla,  
která ekvivalentně nahrazuje silovou soustavu.**

*Výslednice silové soustavy má stejně účinky jako silová soustava.*

*Zdůrazněme na tomto místě, že účinky síly nebo silové soustavy jsou dvojí - silový a momentový.*

*V předcházející kapitole jsme podrobně popsali způsob, jak určíme velikost a směr výslednice.*

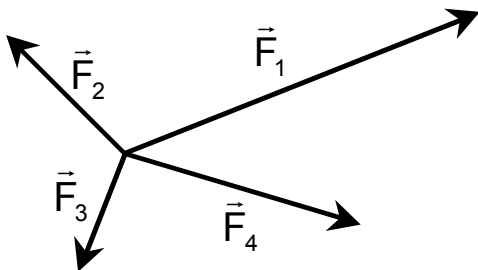
*Takto stanovená výslednice má stejný silový účinek, jako samotná silová soustava.*

*Zatím jsme se však nezmiňovali o momentovém účinku.*

*Jak jsme ukázali v předchozí kapitole, momentový účinek souvisí s působišťem síly.*

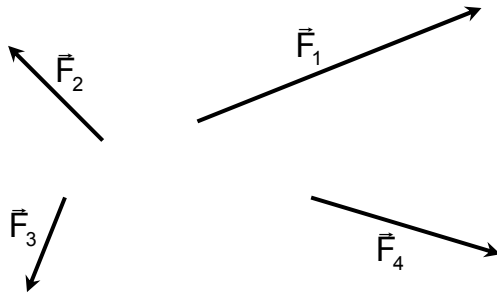
*Vyvstává tedy otázka působišťe výslednice silové soustavy.*

*V předchozí kapitole, při výkladu o zjišťování výslednice, jsme uvažovali soustavu sil, jež všechny působily v jednom bodě - ve společném působišti.*



**Zde je řešení otázky působišťe výslednice zřejmé - výslednice samozřejmě působí ve stejném bodě, ve kterém působí všechny síly silové soustavy.**

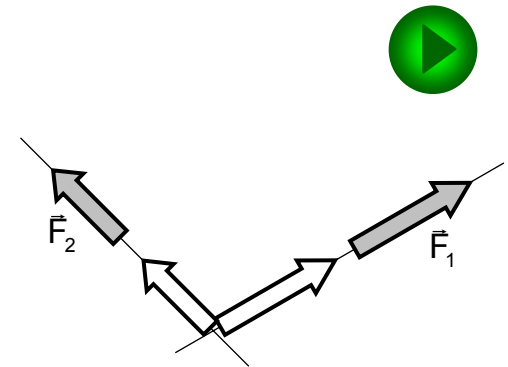
*Působí-li však síly na těleso o určitých, nezanedbatelných rozměrech, nemusí všechny síly nutně působit ve stejném bodě .*



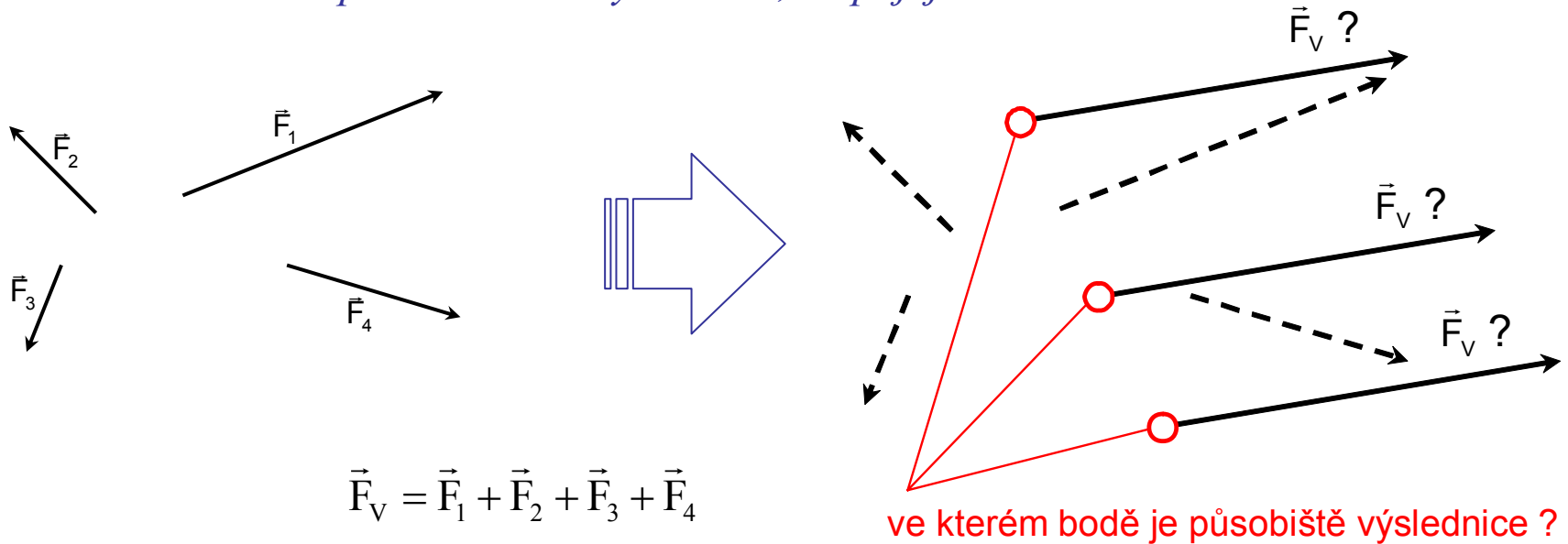
V tomto případě je již otázka působíště výslednice aktuální. Výslednici tedy můžeme definovat takto :

**Výslednice silové soustavy je síla, která má stejný silový účinek a stejný momentový účinek jako silová soustava, kterou nahrazuje.**

*Poznámka : Dvě síly lze vždy považovat za silovou soustavu se společným působíštěm. V předchozí kapitole jsme formulovali a vysvětlili tezi, že síla je volná po své nositelce. Dvě síly s libovolným působíštěm můžeme vždy posunout do průsečíku nositelek tak, že tvoří soustavu se společným působíštěm.*



*Pro danou silovou soustavu tedy umíme určit její výslednici, jak velikost, tak směr.  
Je však třeba určit též působiště této výslednice, resp. její nositelku.*



*Nositelku výslednice určíme z podmínky stejného momentového účinku.*

*Postupujeme tak, že nejprve vypočteme celkový momentový účinek silové soustavy ke zvolenému momentovému bodu.*

*Výslednice pak musí ležet na takové nositelce, aby její moment k tomuto zvolenému momentovému bodu byl stejný.*

*Vraťme se na chvíli k momentu síly k bodu. V předchozí kapitole jsme ukázali, že moment síly k bodu vypočteme jako součin síly a jejího ramene.*

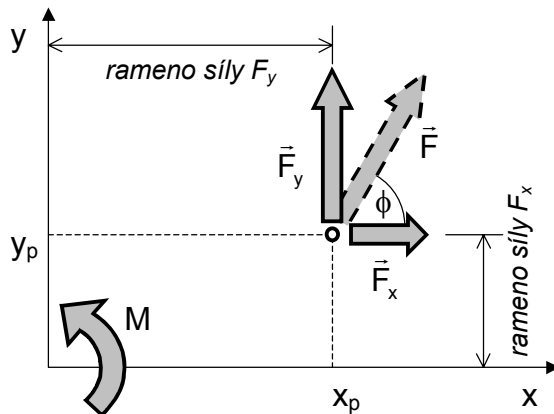
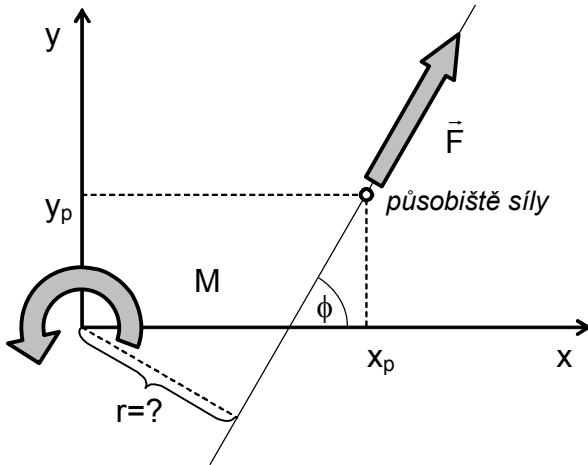
$$M = F \cdot r$$

*Určit délku ramene síly  $r$  se někdy může ukázat jako poněkud komplikované, zejména je-li působiště síly dáno pravoúhlými souřadnicemi  $x_p$  a  $y_p$ .*

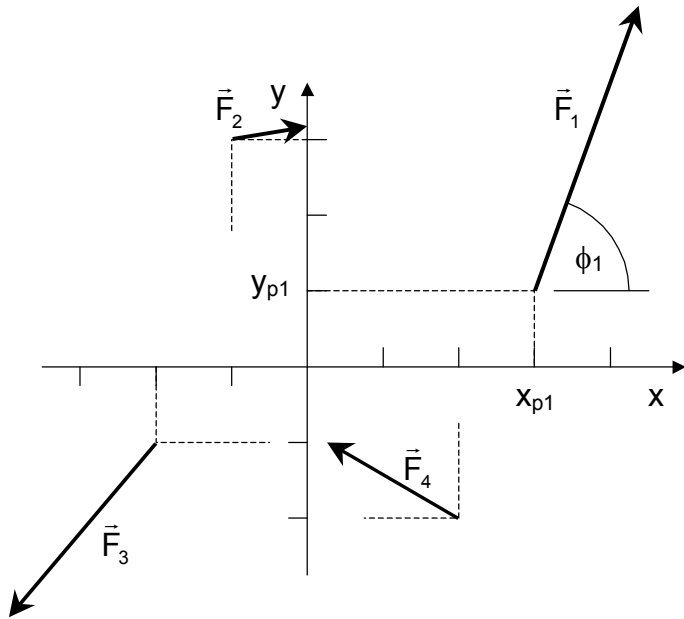
*Jiný způsob určení momentu síly k bodu (v tomto případě k počátku souřadného systému), je následující :*

- Nejprve sílu  $F$  rozložíme na složky  $F_x$  a  $F_y$  (což stejně musíme udělat za účelem zjištění výslednice; je to úkon, který využijeme dvakrát).
- Vypočteme moment těchto dvou složek (to je obvykle jednoduché, je-li působiště zadáno pravoúhlými souřadnicemi).
- Výsledný moment síly  $F$  určíme jako součet momentů obou složek  $F_x$  a  $F_y$ .

$$M = F_y \cdot x_p - F_x \cdot y_p = F \cdot \sin \phi \cdot x_p - F \cdot \cos \phi \cdot y_p = F \cdot \underbrace{(x_p \cdot \sin \phi - y_p \cdot \cos \phi)}_r$$



*Postup určení nositelky výslednice demonstrujeme na příkladu.*



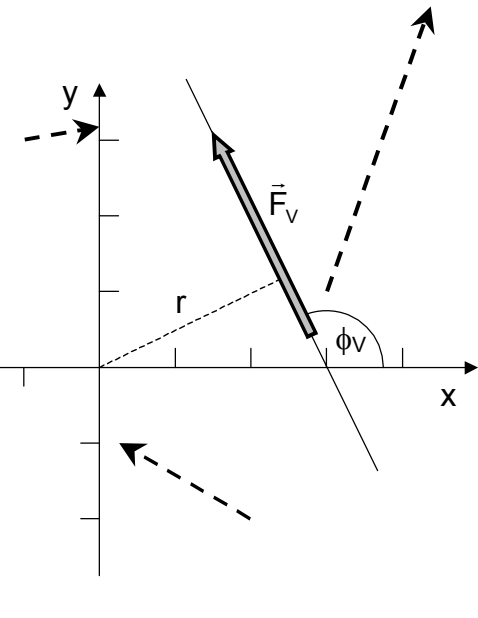
*Je-li výsledný momentový účinek silové soustavy*

$M_V = F_V \cdot r = 7,984 \text{ N} \cdot \text{cm}$ , *je rameno výslednice*

$r = M_V / F_V = 7,984 / 2,94 = 2,716 \text{ cm}$ .

*Nositelka výslednice je tedy přímka, skloněná od osy x o  $116^\circ$  ( $26^\circ$  od osy y), ležící v kolmé vzdálenosti  $r = 2,716 \text{ cm}$  od počátku souřadného systému. Protože síla je volná po své nositelce, existuje nekonečně mnoho přípustných působišť, jež ale všechna musí ležet na této nositelce; např. :  $\{3,022; 0\}$  nebo  $\{2,441; 1,191\}$  nebo  $\{1,227; 3,679\}$  nebo  $\{0; 6,196\}$  nebo ...*

| i        | $F_i$ | $\phi_i$         | $x_p$ | $y_p$ |   | $F_{ix} = F_i \cdot \cos \phi_i$ | $F_{iy} = F_i \cdot \sin \phi_i$ | $M_i = F_{iy} \cdot x_p - F_{ix} \cdot y_p$ |
|----------|-------|------------------|-------|-------|---|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------|
|          | [N]   | [°]              | [cm]  | [cm]  |   | [N]                              | [N]                              | [N·cm]                                      |
| 1        | 4     | $70^\circ$       | 3     | 1     | → | 1,368                            | 3,759                            | 9,908                                       |
| 2        | 1     | $10^\circ$       | -1    | 3     | → | 0,985                            | 0,174                            | -3,128                                      |
| 3        | 3     | -<br>$130^\circ$ | -2    | -1    | → | -1,928                           | -2,298                           | 2,668                                       |
| 4        | 2     | $150^\circ$      | 2     | -2    | → | -1,732                           | 1,000                            | -1,464                                      |
|          |       |                  |       |       |   | ↓                                | ↓                                | ↓                                           |
| $\Sigma$ | 2,94  | $116^\circ$      |       |       | ← | -1,307                           | 2,635                            | 7,984                                       |



*Závěrem konstatujme, že problém stanovení výslednice silové soustavy nás vede k tomu, že rozlišujeme dva typy silových soustav :*

- silová soustava se společným působišťem,*
- silová soustava s různými působišti.*

*V předchozím textu jsme formulovali jednu za základních úloh statiky - Ekvivalentní nahrazení silové soustavy jedinou silou - výslednicí, a popsali její řešení. V praxi se však často setkáváme s dalším typem problému.*

### Rovnováha silové soustavy

*Jde o poněkud odlišnou úlohu, než úloha výslednice, má však společné rysy.*

*Silová soustava je v rovnováze jestliže má nulové účinky.*

*Souvislost s úlohou výslednice je zřejmá. Jestliže je silová soustava v rovnováze, má nulovou výslednici. Jak však ukážeme dále, toto je nutná, nikoliv však postačující podmínka. Jestliže silová soustava má nulovou výslednici, neznamená to automaticky, že je v rovnováze. (V první přednášce je popsána silová dvojice. Jde o silovou soustavu, jejíž výslednice je nulová, jež však má nenulový momentový účinek, není tedy v rovnováze.)*

*Z vyšetřování výslednice silové soustavy se společným působišťem je zřejmé, že má-li být výslednice nulová, musí být nulový součet složek všech sil do dvou, k sobě kolmých směrů (obvykle označovaných  $x$  a  $y$ ).*

$$\sum_i F_{ix} = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0$$

*Pro silovou soustavu se společným působišťem jsou tyto dvě silové rovnice plně dostačující, aby jednoznačně prokázaly rovnováhu silové soustavy. Pro vyjádření rovnováhy silové soustavy s různými působišti je třeba ještě doplnit momentovou rovnici, vyjadřující nulový momentový účinek silové soustavy k libovolnému momentovému bodu.*

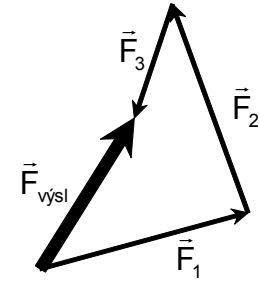
$$\sum_i M_i = 0$$

*Protože tyto (posledně uvedené) rovnice vyjadřují rovnováhu silové soustavy, říká se jim „rovnice rovnováhy“.*

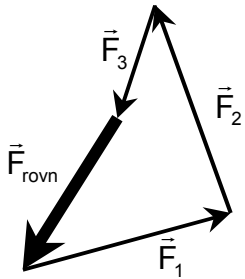


Úloha ekvivalentního nahrazení a úloha rovnováhy spolu úzce souvisí, tvoří dvě stany téže mince.  
 Je-li výslednice silové soustavy  $\vec{F}_{\text{výsl}}$  řešením úlohy ekvivalentního nahrazení ...

$$\vec{F}_{\text{výsl}} = \sum_i \vec{F}_i$$



... a rovnovážná síla  $\vec{F}_{\text{rovn}}$  řešením úlohy rovnováhy silové soustavy (uvádí silovou soustavu do rovnováhy) ...



$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{výsl}} = \vec{0}$$

... pak evidentně platí :

$$\vec{F}_{\text{rovn}} = -\vec{F}_{\text{výsl}}$$

Tedy výslednice silové soustavy  $\vec{F}_{\text{výsl}}$  má stejnou velikost, stejný směr a opačnou orientaci, než rovnovážná síla  $\vec{F}_{\text{rovn}}$ , uvádějící silovou soustavu do rovnováhy.

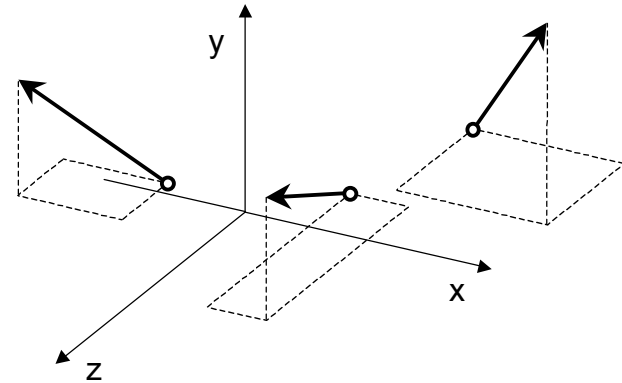
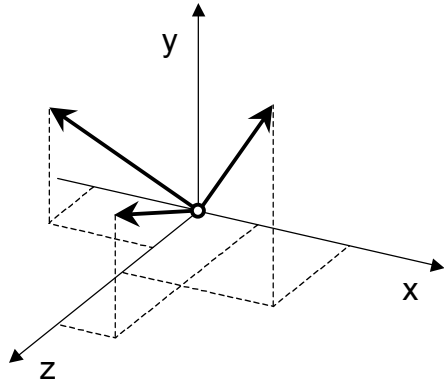
Tuto skutečnost můžeme využívat při řešení úlohy výslednice.

Máme-li řešit úlohu výslednice, vyřešíme úlohu rovnováhy (rovnice rovnováhy) a změníme orientaci výsledku.

## Prostorová silová soustava

*Veškerý předchozí výklad se týkal rovinných silových soustav, t.j. takových, kdy všechny síly (jejich vektory) leží v jedné rovině.*

*Síly však mohou tvořit rovněž prostorovou silovou soustavu (k souřadným osám  $x$  a  $y$  pak přidáváme osu  $z$ ). I v tomto případě se může jednat o soustavu sil se společným působišťem nebo s různými působišti.*



*Je zřejmé, že každá síla má v tomto případě tři složky -  $F_x$ ,  $F_y$  a  $F_z$ .*

*Je však třeba zdůraznit, že i moment síly  $M$  (jedná se však o moment síly k ose, nikoliv k bodu) je vektor o třech složkách  $M_x$ ,  $M_y$  a  $M_z$ , (momenty síly k osám  $x$ ,  $y$  a  $z$ ).*

*Poznámka : Toto platí i u rovinné silové soustavy. Osa, k níž moment počítáme, je osa  $z$  kartézského souřadného systému a do roviny  $x$ - $y$  se promítá jako bod, proto v tomto případě obvykle hovoříme o momentu síly k bodu. Vektor momentu pak má vždy směr osy  $z$ , tedy kolmý k rovině  $x$ - $y$ . Proto se u rovinných silových soustav vektorový charakter momentu nezdůrazňuje. Pro praktické řešení je podstatná velikost momentu (vyjádřená v  $N \cdot m$ ) a jeho orientace (ve směru nebo proti směru hodinových ručiček).*

Výsledný silový účinek silové soustavy je pak dán výslednicí  $F_v$ ,  
výsledný momentový účinek je dán výsledným momentem  $M_v$ .

$$F_{Vx} = \sum_i F_{ix}$$

$$M_{Vx} = \sum_i M_{ix}$$

$$F_{Vy} = \sum_i F_{iy}$$

$$M_{Vy} = \sum_i M_{iy}$$

$$F_{Vz} = \sum_i F_{iz}$$

$$M_{Vz} = \sum_i M_{iz}$$

Rovnováha prostorové silové soustavy se společným působišťem je popsána třemi silovými rovnicemi rovnováhy,

rovnováha prostorové silové soustavy s různými působišti je popsána šesti rovnicemi rovnováhy - třemi silovými a třemi momentovými.

$$\sum_i F_{ix} = 0$$

$$\sum_i M_{ix} = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0$$

$$\sum_i M_{iy} = 0$$

$$\sum_i F_{iz} = 0$$

$$\sum_i M_{iz} = 0$$

*Shrňme tedy rozdělení silových soustav a jejich charakteristiky.*

*Silové soustavy se dělí podle dvou kritérií (hledisek).*

- *Silové soustavy rovinné a prostorové,*
- *silové soustavy se společným působištěm a s různými působišti.*

*Počet rovnic rovnováhy je v každém případě jiný.*

| silová soustava | se společným působištěm                                                                 | s různým působištěm                                                                                                                                            |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| rovinná         | <p>2. rovnice rovnováhy</p> $\sum_i F_{ix} = 0$ $\sum_i F_{iy} = 0$                     | <p>3. rovnice rovnováhy</p> $\sum_i F_{ix} = 0$ $\sum_i F_{iy} = 0$ $\sum_i M_i = 0$                                                                           |
| prostorová      | <p>3. rovnice rovnováhy</p> $\sum_i F_{ix} = 0$ $\sum_i F_{iy} = 0$ $\sum_i F_{iz} = 0$ | <p>6. rovnic rovnováhy</p> $\sum_i F_{ix} = 0 \quad \sum_i M_{ix} = 0$ $\sum_i F_{iy} = 0 \quad \sum_i M_{iy} = 0$ $\sum_i F_{iz} = 0 \quad \sum_i M_{iz} = 0$ |

*Závěrečná poznámka :*

*Rovnic rovnováhy lze samozřejmě sestavit libovolný počet - součet složek sil do různých směrů, součet momentů k různým momentovým bodům (osám).*

*Všechny další rovnice, sestavené navíc k základním rovnicím (uvedeným v tabulce), jsou však již jen jejich lineární kombinací, a tedy jsou nepoužitelné pro řešení neznámých. Pro výpočtové řešení, jak bude popsáno a vysvětleno v dalších kapitolách, lze použít pouze a jen ten počet rovnic rovnováhy, uvedený v tabulce.*

*Zde uvedená posloupnost čísel 2 - 3 - 3 - 6, v kontextu s uvedeným tříděním, je pro mechaniku důležitá a setkáme se s ní znovu v úplně jiných souvislostech v kinematice. V tomto učebním textu se až na výjimky budeme zabývat pouze rovinnými silovými soustavami.*

Obsah přednášky :

*výslednice a rovnováha silové soustavy,*

*rovnice rovnováhy,*

*prostorová silová soustava*