

Obsah přednášky :

*tuhost pružiny,
kmitání vlastní netlumené a tlumené,
řazení pružin, ohybové kmitání*

Doba studia :

asi 1,5 hodiny

Cíl přednášky :

seznámit studenty se základními zákonitostmi kmitavého pohybu

S kmitavým pohybem se setkáváme doslova na každém kroku.

Koná jej struna hudebního nástroje, stožár elektrického vedení nebo třeba hřídel motoru.

Podmínkou vzniku kmitavého pohybu je pružné uložení hmotného objektu.

Pojmy „hmota“ a „hmotnost“ se zabýváme po celou Dynamiku a nebudeme je tedy zde podrobněji rozebírat.

Zaměříme se na vysvětlení pojmů „pružný“, „poddajný“ a „tuhost“.

Poddajnost (nebo pružnost) je schopnost měnit tvar pod vlivem sil.

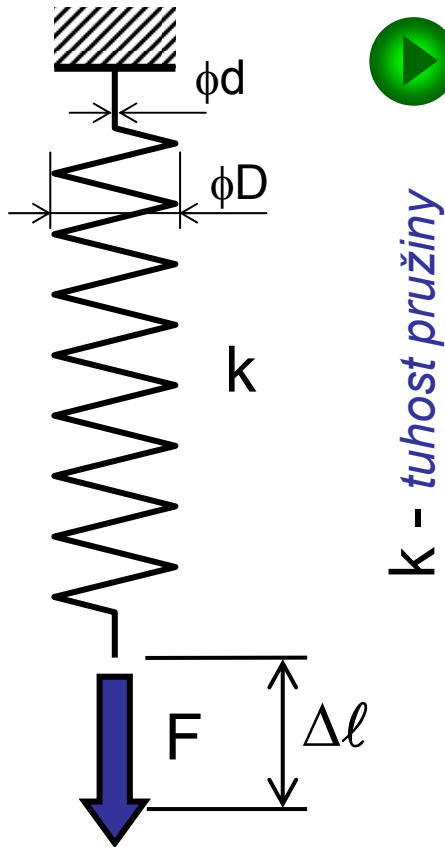
Ačkoliv tuto vlastnost mají všechny reálné materiály, doposud jsme ji nebrali v úvahu. Naopak zabývali jsme se tzv. „mechanikou absolutně tuhých těles“. Je-li deformace, způsobená silami, velmi malá ve srovnání s rozměry tělesa, může být předpoklad absolutně tuhého tělesa přijatelný.

(Pojem „absolutně tuhé těleso“ byl zmíněn na první přednášce.)

Chceme-li se však zabývat kmitáním, bez uvažování poddajnosti se neobejdeme.

Kvantitativně tuto vlastnost materiálu obvykle vyjadřujeme veličinou, zvanou „tuhost“ (převrácená hodnota poddajnosti).

Představme si vinutou spirálovou pružinu, na jednom konci zavěšenou a na druhém konci zatíženou silou F . Vlivem této síly se pružina prodlouží o délku $\Delta\ell$:



$$\Delta\ell = \frac{8 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \cdot F$$

Anebo naopak :

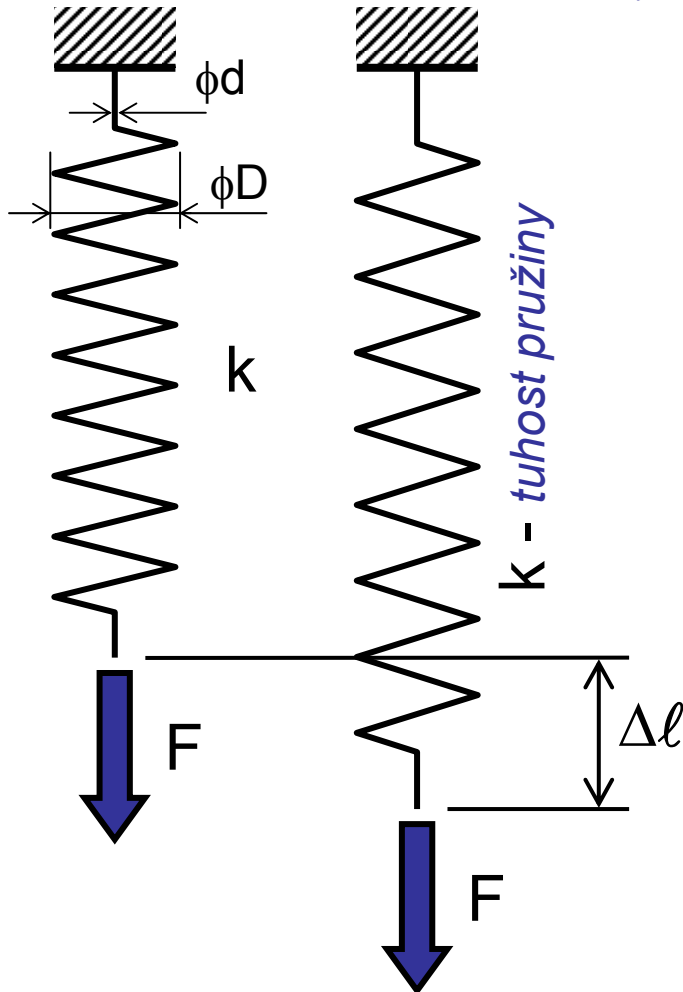
$$F = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} \cdot \Delta\ell$$

Zde :

- G - modul pružnosti ve smyku [Pa, MPa], vlastnost materiálu,
- d - průměr drátu,
- z - něhož je pružina svinuta [m, mm],
- D - průměr celé pružiny [m, mm],
- n - počet závitů pružiny [-].

Poznámka : Vzorec sám není v tuto chvíli důležitý. Lze jej nalézt v libovolných technických tabulkách a bylo by plýtváním mozkovou kapacitou učit se jej z paměti. Slouží nám k lepšímu pochopení pojmu „tuhost“.

Představme si vinutou spirálovou pružinu, na jednom konci zavěšenou a na druhém konci zatíženou silou F . Vlivem této síly se pružina prodlouží o délku $\Delta\ell$:



$$\Delta\ell = \frac{8 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \cdot F$$

Anebo naopak :

$$F = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} \cdot \Delta\ell$$

k - tuhost
[N/m, N/mm]

Zavedeme-li substituci :

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

můžeme jednoduše psát :

$$\Delta\ell = \frac{F}{k}$$

nebo

$$F = k \cdot \Delta\ell$$

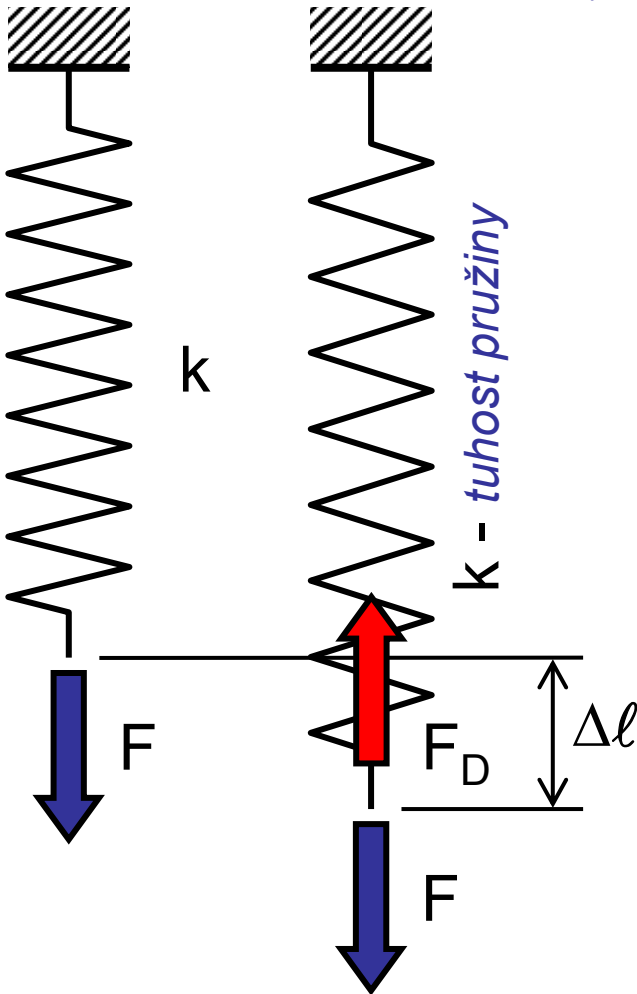
Zde tuhost k vyjadřuje poměr mezi silou a deformací.

Tuhost je vlastnost pružiny, závislá na materiálu a rozměrech pružiny.

$$k = \frac{F}{\Delta\ell} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}, \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

Poznámka : Závislost síly a deformace $F = k \cdot \Delta\ell$ je lineární, avšak jen v omezeném rozsahu. Budeme-li pružinu napínat víc a více, nejprve se závislost stane nelineární, pak se pružina natáhne, přestane být pružinou a stane se drátem. Nakonec praskne.

Představme si vinutou spirálovou pružinu, na jednom konci zavěšenou a na druhém konci zatíženou silou F . Vlivem této síly se pružina prodlouží o délku $\Delta\ell$:



Dále si připomeneme zákon akce a reakce.

Síla F (zde modrá) je vnější akční silou, působící na pružinu.

Proti ní působí stejně velká, opačně orientovaná reakční síla (zde červená) - tzv. „direkční síla“ F_D .

I pro direkční sílu tedy platí :

$$F_D = k \cdot \Delta\ell$$

Direkční síla je odezva pružiny na deformaci.

Představme si vinutou spirálovou pružinu, na jednom konci zavěšenou a na druhém konci zatíženou silou F . Vlivem této síly se pružina prodlouží o délku $\Delta\ell$:

Při deformaci pružiny působí síla F na dráze $\Delta\ell$, koná tedy práci. Tato práce určuje potenciální energii deformované pružiny.

Zatím jsme se seznámili s potenciální energií ve formě polohové energie $E_p = m \cdot g \cdot h$.

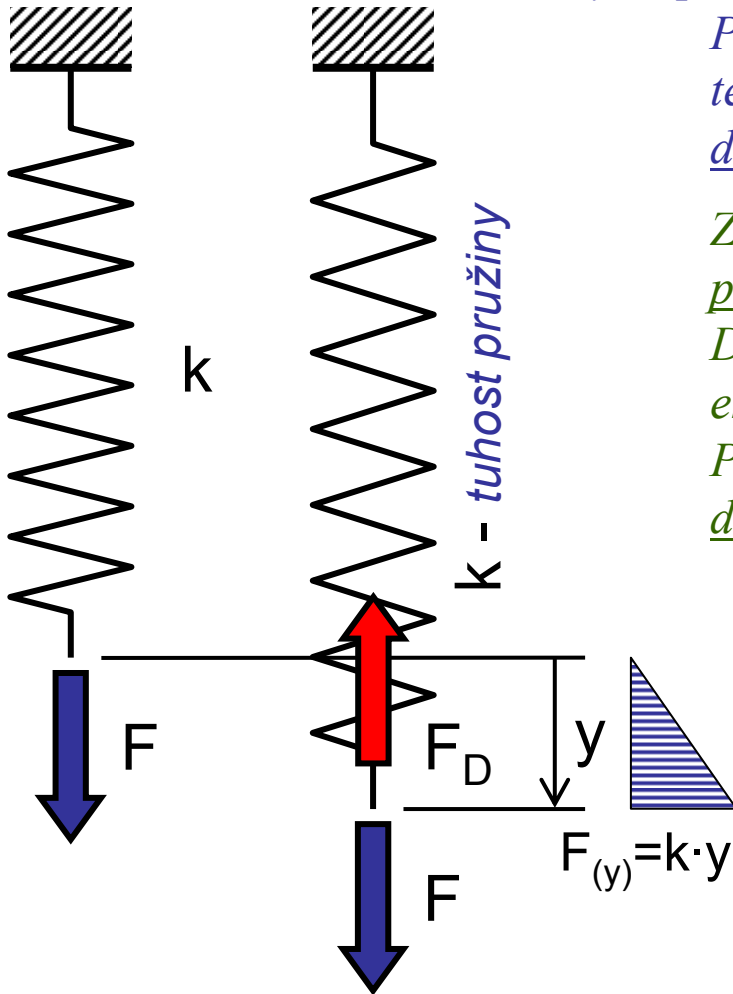
Deformací je v pružině rovněž akumulovaná potenciální energie, jejíž velikost je rovna vykonané práci.

Protože je spojena s deformací, bývá nazývána deformační energie.

Při výpočtu nesmíme zapomenout na skutečnost, že tažná síla není konstantní.

K natažení pružiny o první milimetr je zapotřebí jen velmi malé síly. K natažení o druhý milimetr je zapotřebí již poněkud větší síly, ..., teprve na konci natahování dosahuje síla konečné hodnoty :

$$F = k \cdot \Delta\ell$$



Představme si vinutou spirálovou pružinu, na jednom konci zavěšenou a na druhém konci zatíženou silou F . Vlivem této síly se pružina prodlouží o délku $\Delta\ell$:

Je-li :

$$F = k \cdot y$$

pak práce je :

$$A = \int_0^{\Delta\ell} F_{(y)} \cdot dy = \int_0^{\Delta\ell} k \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2$$

anebo, je-li :

$$F = k \cdot \Delta\ell$$

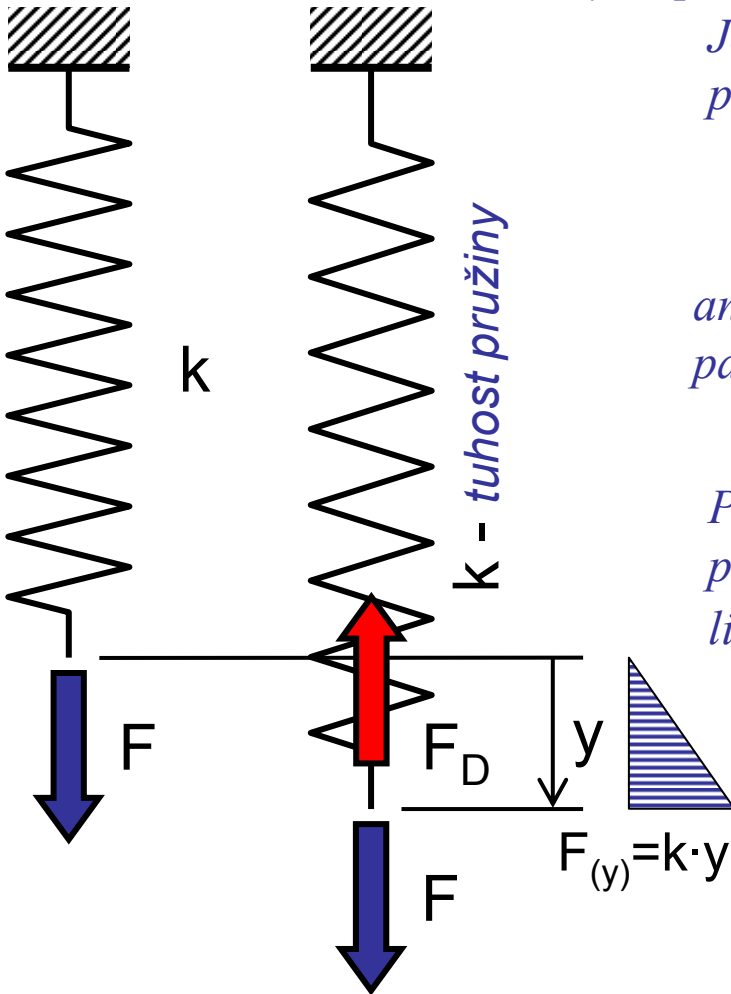
pak práce je :

$$A = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2 = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta\ell$$

Pozornému čtenáři jistě neunikne že výraz $\frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta\ell$ představuje plochu trojúhelníka, lineární závislosti síly F na prodloužení $\Delta\ell$.

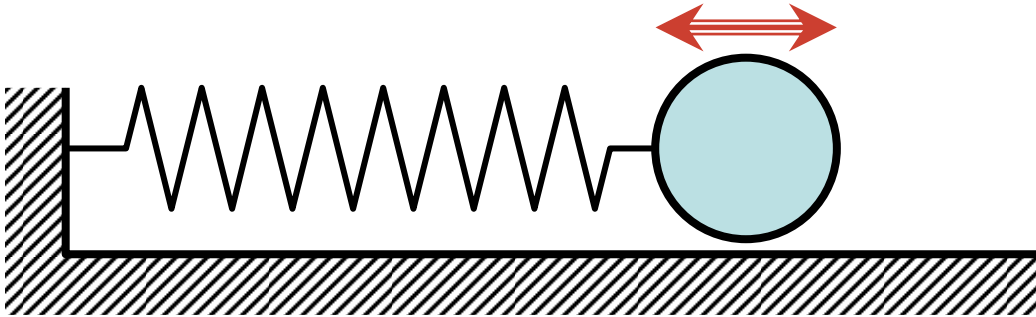
Potenciální deformační energie natažené (nebo též stlačené) pružiny tedy je :

$$E_p = A = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\ell^2$$



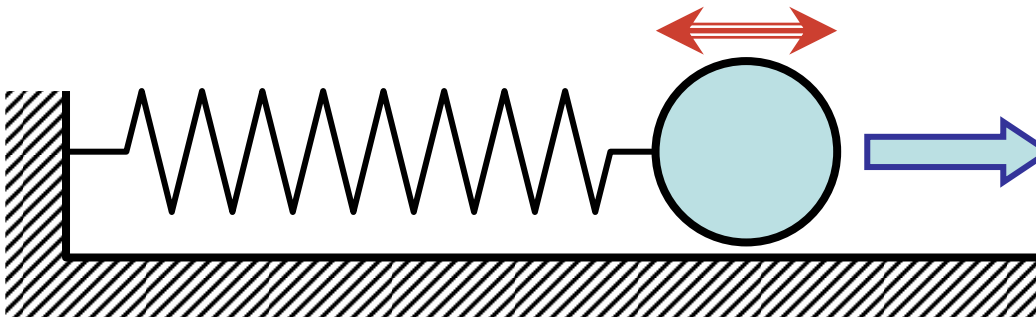
Kmitavý pohyb budeme rozlišovat podle dvou kritérií.

I. Volné (vlastní) kmitání. Při kmitání na těleso nepůsobí žádná vnější síla.



Volným neboli vlastním kmitáním kmitá například houpačka s dítětem (sedí-li toto nehnutě), nebo kytarová struna poté co ji kytarista rozezní.

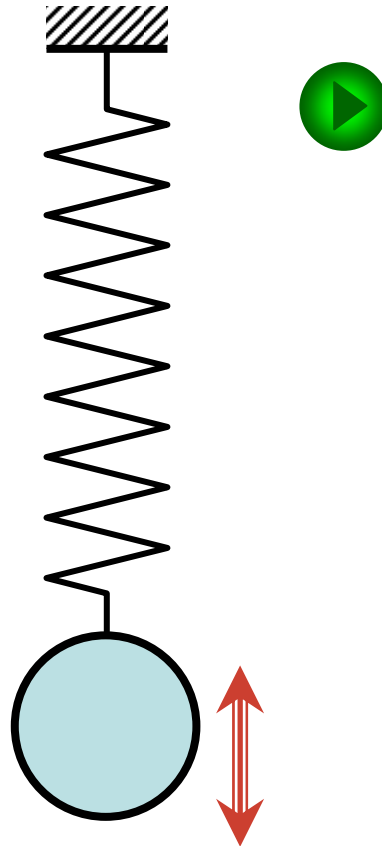
Vynucené kmitání je neustále buzeno vnější působící silou.



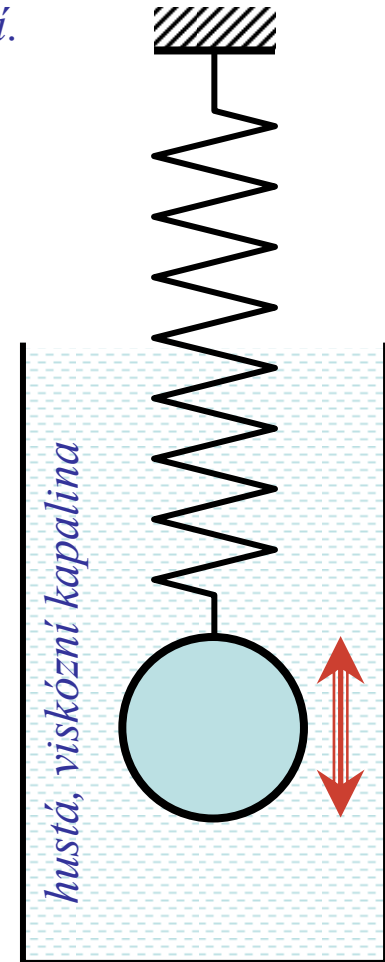
Vynuceným kmitáním kmitá např. nevyvážený rotor nebo pračka v režimu ždímání - kmitání je neustále buzeno odstředivou silou.

Kmitavý pohyb budeme rozlišovat podle dvou kritérií.

II. Netlumené kmitání není žádným fyzikálním jevem brzděno - tlumeno. Trvá neustále.



Tlumené kmitání je nějakým fyzikálním jevem brzděno - tlumeno. Postupně vymizí.



Poznámka :

Toto rozlišení je umělé.

Ve skutečnosti neexistuje netlumené kmitání, ve skutečnosti je každé kmitání tlumené.

Pokud však je tlumení malé, pak jej zanedbáváme a mluvíme (trochu nepřesně) o netlumeném kmitání.

Kmitavý pohyb budeme rozlišovat podle dvou kritérií.

Budeme se tedy zabývat :

Vlastním netlumeným kmitáním.

Vlastním tlumeným kmitáním.

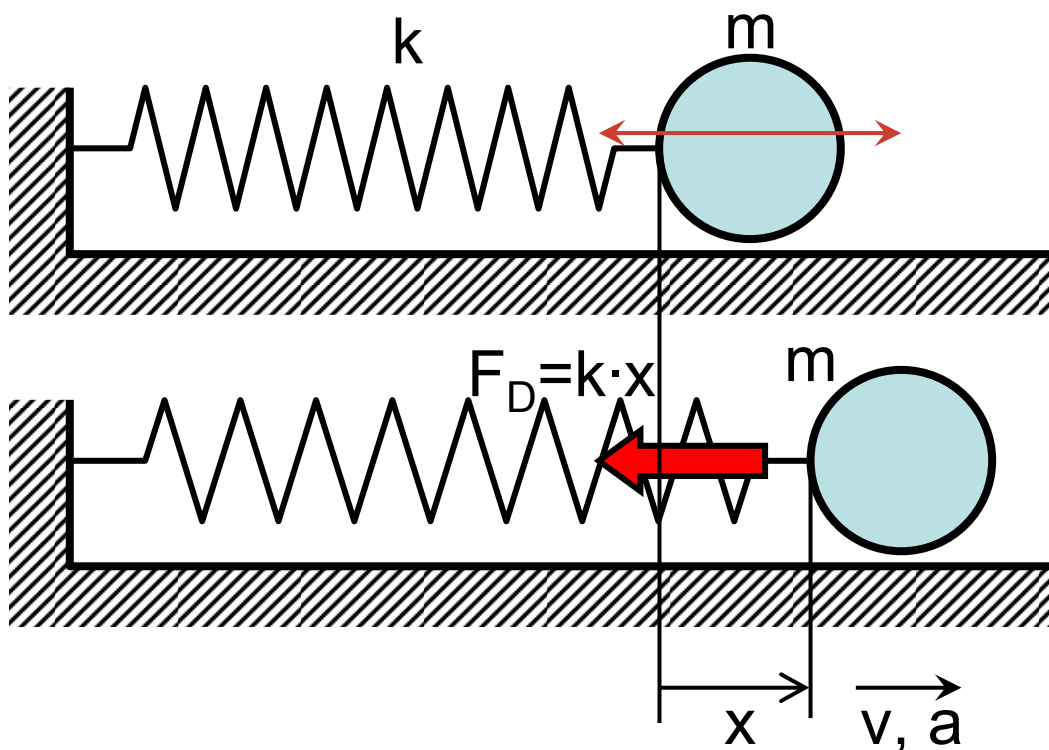
Vynuceným kmitáním tlumeným i netlumeným.

kmitání	vlastní	vynucené
netlumené		
tlumené		

Konečně dodejme že se budeme zabývat lineárním kmitáním s jedním stupněm volnosti.

Nelineární kmitání a kmitání s více stupni volnosti přesahují rozsah těchto přednášek.

vlastní netlumené kmitání



Provedeme substituci :

$$\frac{k}{m} = \Omega_0^2$$

Nalezneme řešení pohybové rovnice - lineární diferenciální rovnice II. řádu, homogenní.

$$x = C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0)$$

$$v = \dot{x} = C \cdot \Omega_0 \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \phi_0)$$

$$a = \ddot{x} = -C \cdot \Omega_0^2 \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0)$$

$$m \cdot [-C \cdot \Omega_0^2 \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0)] + k \cdot [C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0)] = 0$$

Zde : $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

C a ϕ_0 jsou integrační konstanty [m, -],

jejichž hodnotu určíme z počátečních podmínek.

Dynamika I, 11. přednáška

Uvažujme těleso (absolutně tuhé) o hmotnosti m , vázané k rámu pružinou o tuhosti k (zanedbatelné hmotnosti), které má možnost pohybu (bez tření) ve vodorovném směru (souřadnice x , rychlost v a zrychlení a). Při vychýlení na ně působí směrová síla $F_D = k \cdot x$ proti směru vychýlení.

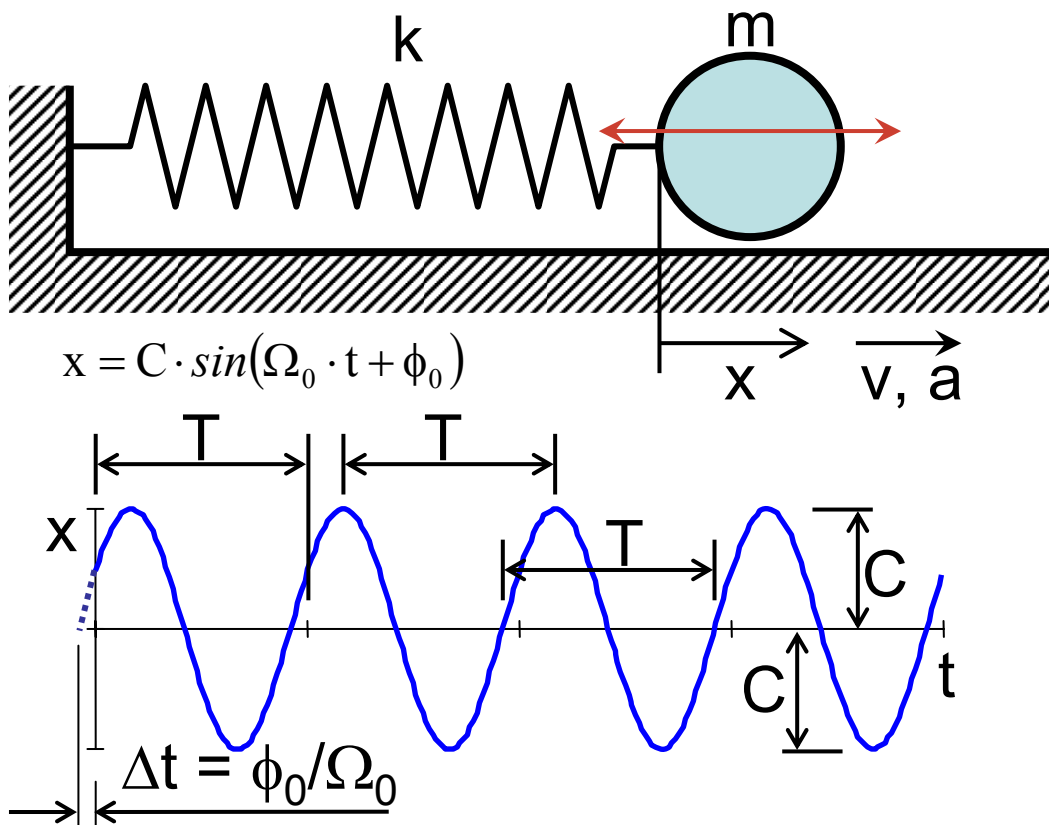
Pohybová rovnice je :

$$m \cdot a = \sum F_i$$

$$m \cdot a = -F_D$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

vlastní netlumené kmitání



Dynamika I, 11. přednáška

Kmitavý pohyb je kvantitativně popsán dvěma skupinkami parametrů.

Parametry, vyplývající ze substituce :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{vlastní kruhová frekvence [s}^{-1}\text{]}$$

$$f = \frac{\Omega_0}{2 \cdot \pi} \quad \text{vlastní frekvence [Hz]} \\ \text{počet kmitů za sekundu}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega_0} \quad \text{perioda [s]} \\ \text{doba jednoho kmitu}$$

Integrační konstanty :

C amplituda [m]

ϕ_0 fázový posuv [rad]

Určí se z počátečních podmínek :

$t=0 \dots x=x_0$ - počáteční výchylka,

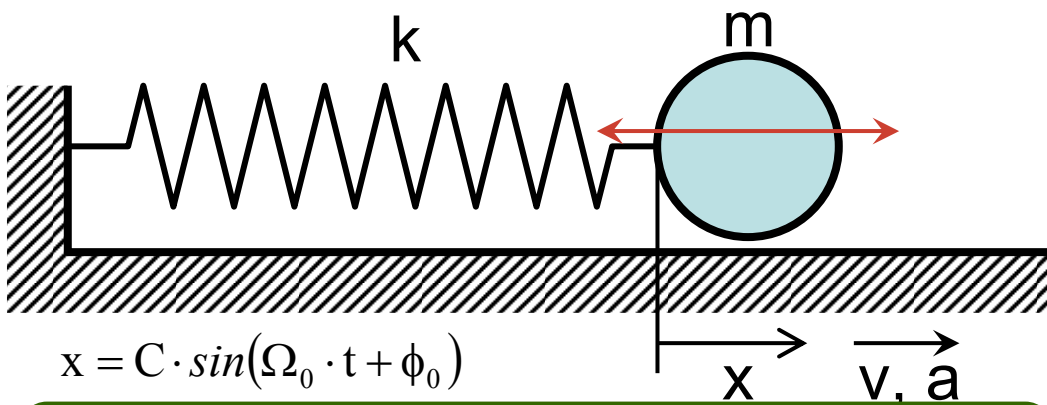
$v=v_0$ - počáteční rychlost.

$$x_0 = C \cdot \sin(\phi_0)$$

$$v_0 = C \cdot \Omega_0 \cdot \cos(\phi_0)$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega_0^2}} \quad \phi_0 = \arctan \frac{x_0 \cdot \Omega_0}{v_0}$$

vlastní netlumené kmitání



$$x = C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0)$$

Časový průběh kmitání lze též popsat alternativně :

$$x = C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t)$$

kde : $A = C \cdot \sin \phi_0$ $B = C \cdot \cos \phi_0$

$$C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) =$$

$$= C \cdot \sin(\phi_0) \cos(\Omega_0 \cdot t) + C \cdot \cos(\phi_0) \sin(\Omega_0 \cdot t)$$

$$\dot{x} = v = -A \cdot \Omega_0 \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t) + B \cdot \Omega_0 \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t)$$

$t=0 \dots x=x_0$ - počáteční výchylka,

$v=v_0$ - počáteční rychlost.

$$x_0 = A$$

$$v_0 = B \cdot \Omega_0$$

Integrační konstanty pak jsou : $A = x_0$ $B = \frac{v_0}{\Omega_0}$

A konečně : $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\phi_0 = \arctan \frac{A}{B}$

Dynamika I, 11. přednáška

Kmitavý pohyb je kvantitativně popsán dvěma skupinkami parametrů.

Parametry, vyplývající ze substituce :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

vlastní kruhová
frekvence [s^{-1}]

$$f = \frac{\Omega_0}{2 \cdot \pi}$$

vlastní frekvence [Hz]
počet kmitů za sekundu

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega_0}$$

perioda [s]
doba jednoho kmitu

Integrační konstanty :

C amplituda [m]

ϕ_0 fázový posuv [rad]

Určí se z počátečních podmínek :

$t=0 \dots x=x_0$ - počáteční výchylka,

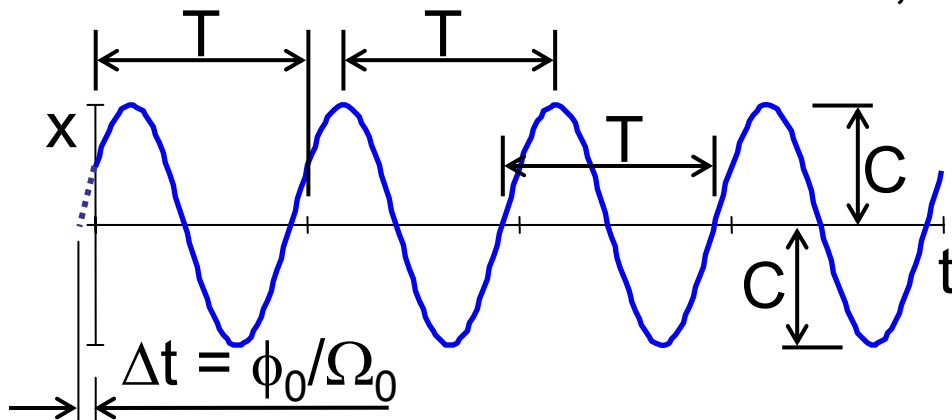
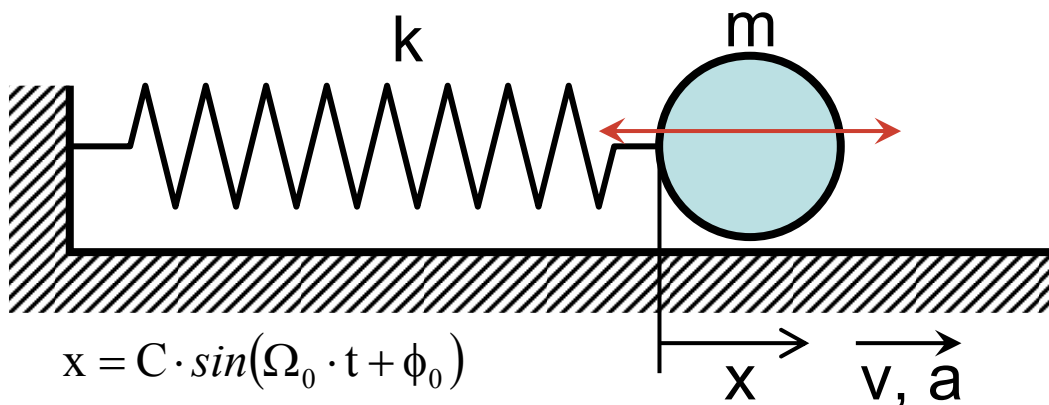
$v=v_0$ - počáteční rychlost.

$$x_0 = C \cdot \sin(\phi_0)$$

$$v_0 = C \cdot \Omega_0 \cdot \cos(\phi_0)$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega_0^2}} \quad \phi_0 = \arctan \frac{x_0 \cdot \Omega_0}{v_0}$$

vlastní netlumené kmitání



Časový průběh kmitání lze též popsat alternativně :

$$x = C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t)$$

kde : $A = C \cdot \sin \phi_0$ $B = C \cdot \cos \phi_0$

Integrační konstanty pak jsou : $A = x_0$ $B = \frac{v_0}{\Omega_0}$

A konečně : $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\phi_0 = \arctan \frac{A}{B}$

Dynamika I, 11. přednáška

Kmitavý pohyb je kvantitativně popsán dvěma skupinkami parametrů.

Parametry, vyplývající ze substituce :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{vlastní kruhová frekvence [s}^{-1}\text{]}$$

$$f = \frac{\Omega_0}{2 \cdot \pi} \quad \text{vlastní frekvence [Hz]} \\ \text{počet kmitů za sekundu}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega_0} \quad \text{perioda [s]} \\ \text{doba jednoho kmitu}$$

Integrační konstanty :

C amplituda [m]

ϕ_0 fázový posuv [rad]

Určí se z počátečních podmínek :

$t=0 \dots x=x_0$ - počáteční výchylka,

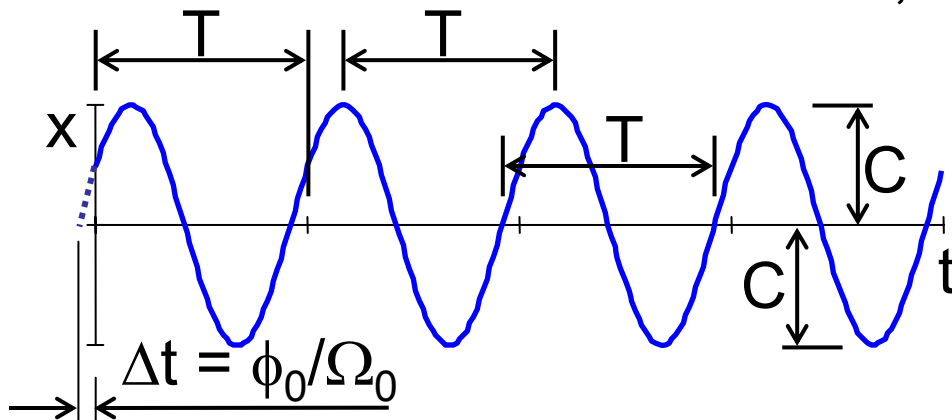
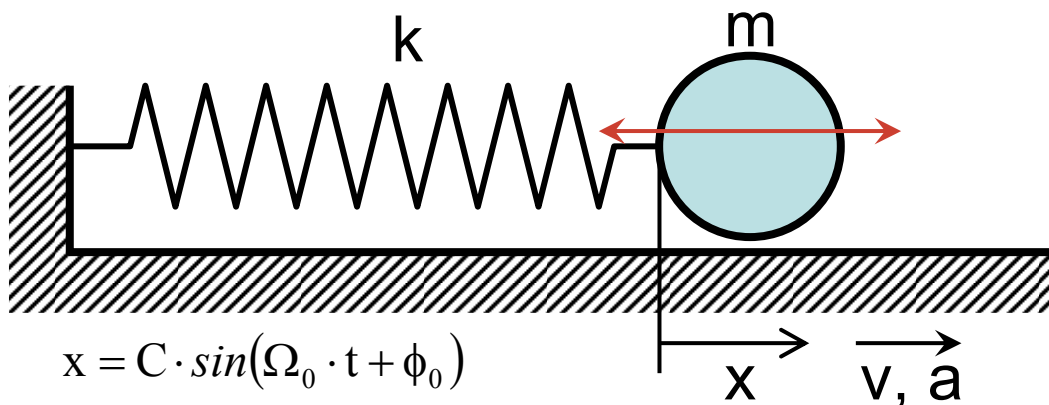
$v=v_0$ - počáteční rychlost.

$$x_0 = C \cdot \sin(\phi_0)$$

$$v_0 = C \cdot \Omega_0 \cdot \cos(\phi_0)$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega_0^2}} \quad \phi_0 = \arctan \frac{x_0 \cdot \Omega_0}{v_0}$$

vlastní netlumené kmitání



Časový průběh kmitání lze též popsat alternativně :

$$x = C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t)$$

kde : $A = C \cdot \sin \phi_0$ $B = C \cdot \cos \phi_0$

Integrační konstanty pak jsou : $A = x_0$ $B = \frac{v_0}{\Omega_0}$

A konečně : $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\phi_0 = \arctan \frac{A}{B}$

Dynamika I, 11. přednáška

Poznámka k funkci arctan.

Funkce arctan má vždy dva kořeny.

Např. : $\arctan(0,5) = 26,6^\circ$

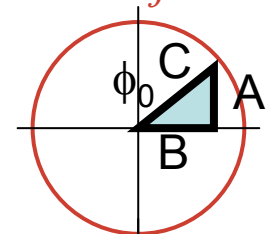
ale též : $\arctan(0,5) = 206,6^\circ$

Nebo : $\arctan(-1) = -45^\circ$

ale též : $\arctan(-1) = 135^\circ$

Pozornému čtenáři je jistě zřejmé že oba kořeny jsou vůči sobě posunuty vždy o 180° .

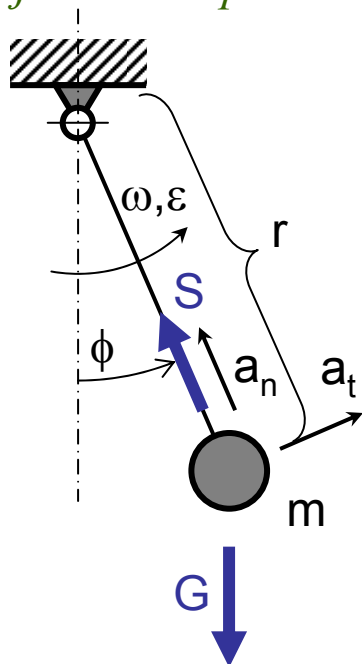
Každá kalkulačka je naprogramovaná tak, že vrací ten z obou kořenů, který leží v intervalu $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$. To však nemusí být správný výsledek. O tom, který výsledek je správný, rozhoduje znaménko čitatele A a jmenovatele B.



$\phi_0 \in$	$B < 0$	$B > 0$
$A > 0$	$\langle 90^\circ, 180^\circ \rangle$	$\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$
$A < 0$	$\langle 180^\circ, 270^\circ \rangle$	$\langle 270^\circ, 360^\circ \rangle$

Elegantním (i když poněkud akademickým) příkladem vlastního kmitání je matematické, resp. fyzikální kyvadlo.

(Umožňuje nám též přirozeně naznačit problematiku nelineárního kmitání.)



Matematické kyvadlo (idealizace skutečného kyvadla) lze charakterizovat jako hmotný bod na nehmotném závěsu. Hmotný bod o hmotnosti m (zanedbatelných rozměrů) na nehmotném závěsu délky r (zanedbatelné hmotnosti). (Další idealizace spočívá v zanedbání pasivních odporů.)

(Pojem „zanedbatelný“ je relativní. Je-li něco zanedbatelné, pak to není zanedbatelné absolutně, ale relativně vůči něčemu. Zde rozměry hmotného bodu jsou zanedbatelné vůči délce závěsu, naopak hmotnost závěsu je zanedbatelná vůči hmotnosti bodu.)

Okamžitá poloha kyvadla je dána úhlem ϕ od svislice k závěsu, kinematické parametry pak jsou úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení ϵ .

Bod se pohybuje po kruhové trajektorii a má tečné zrychlení a_t a normálové zrychlení a_n .

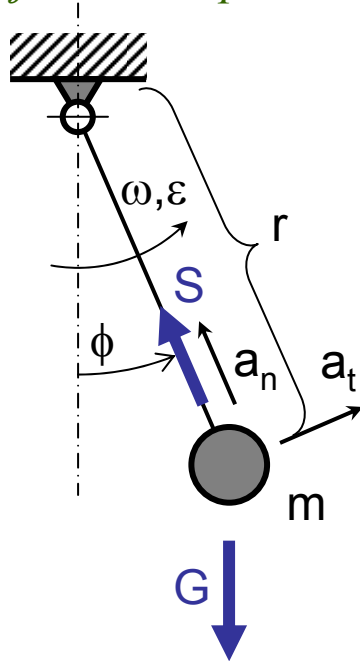
$$a_t = r \cdot \epsilon \qquad a_n = r \cdot \omega^2 \qquad \omega = \dot{\phi}$$

$$\epsilon = \ddot{\phi}$$

Na bod působí tíhová síla G a tahová síla v závěsu S (reakce).

Elegantním (i když poněkud akademickým) příkladem vlastního kmitání je matematické, resp. fyzikální kyvadlo.

(Umožňuje nám též přirozeně naznačit problematiku nelineárního kmitání.)



Pro obě složky zrychlení platí 2. Newtonův zákon :

$$m \cdot a_t = \sum F_{t_i} = -G \cdot \sin \phi$$

$$m \cdot a_n = \sum F_{n_i} = S - G \cdot \cos \phi$$

Po úpravě má pohybová rovnice tvar :

$$m \cdot r \cdot \epsilon = -m \cdot g \cdot \sin \phi$$

resp. :

$$r \cdot \epsilon + g \cdot \sin \phi = 0$$

$$r \cdot \ddot{\phi} + g \cdot \sin \phi = 0$$

Tato rovnice není skutečnou pohybovou rovnicí.

Po úpravě z ní lze vyjádřit sílu v závěsu :

$$S = G \cdot \cos \phi + m \cdot r \cdot \omega^2$$

Pohybová rovnice je nelineární diferenciální rovnicí II. řádu. Jde o typický příklad nelineárního kmitání.

Pro malý úhel ϕ lze přibližně linearizovat : $\sin \phi \cong \phi$.

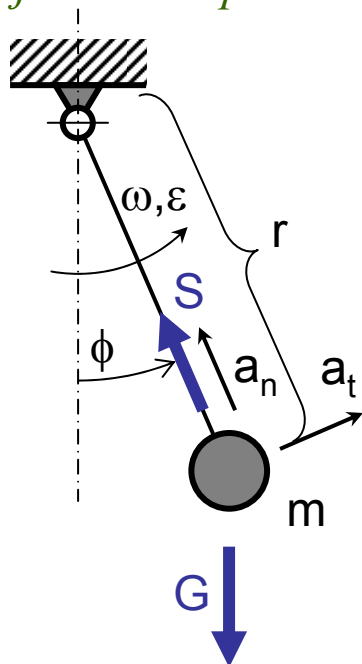
Pro ilustraci :

Při běžných technických požadavcích na přesnost je tato linearizace přijatelná přibližně do rozkmitu $\phi = \pm 15^\circ$.

ϕ [°]	$\sin \phi$	ϕ [rad]	chyba
1°	0,017452	0,017453	0,005 %
5°	0,087156	0,087266	0,13 %
15°	0,258819	0,261799	1,15 %

Elegantním (i když poněkud akademickým) příkladem vlastního kmitání je matematické, resp. fyzikální kyvadlo.

(Umožňuje nám též přirozeně naznačit problematiku nelineárního kmitání.)



Po linearizaci má pohybová rovnice tvar :

$$r \cdot \ddot{\phi} + g \cdot \phi = 0$$

Z hlediska matematiky má pohybová rovnice stejný charakter jako pohybová rovnice hmotného bodu na pružině.

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

$$r \cdot \ddot{\phi} + g \cdot \phi = 0$$

Řešení je tedy analogické :

$$x = C \cdot \sin(\Omega \cdot t + \gamma_0)$$

$$\phi = C \cdot \sin(\Omega \cdot t + \gamma_0)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

kruhová
frekvence

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}}$$

amplituda

$$C = \sqrt{\phi_0^2 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}}$$

$$\gamma_0 = \arctan \frac{x_0 \cdot \Omega}{v_0}$$

fázový
posuv

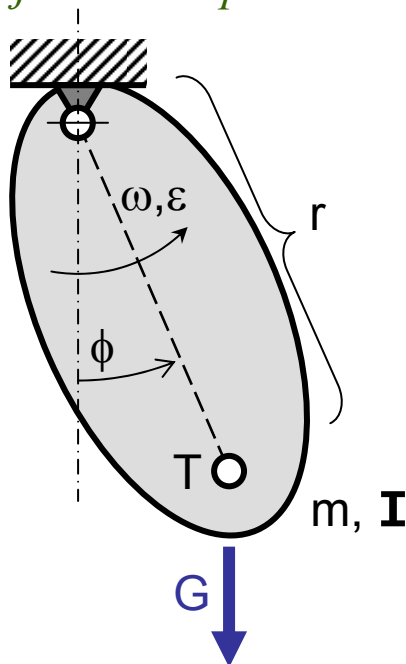
$$\gamma_0 = \arctan \frac{\phi_0 \cdot \Omega}{\omega_0}$$

Počáteční podmínky jsou :

$t = 0 \dots \phi = \phi_0$ počáteční úhel
 $\omega = \omega_0$ počáteční
 úhlová rychlost

Elegantním (i když poněkud akademickým) příkladem vlastního kmitání je matematické, resp. fyzikální kyvadlo.

(Umožňuje nám též přirozeně naznačit problematiku nelineárního kmitání.)



Fyzikální kyvadlo je reálné těleso určitých rozměrů.

Těleso má hmotnost m , moment setrvačnosti (k závěsnému bodu) je I , vzdálenost těžiště od závěsného bodu je r .

(I v tomto případě zanedbáme pasivní odpory.)

Pohybová rovnice je pohybovou rovnicí rotačního pohybu :

$$I \cdot \varepsilon = -G \cdot r \cdot \sin \phi$$

$$I \cdot \varepsilon + G \cdot r \cdot \sin \phi = 0$$

$$I \cdot \ddot{\phi} + G \cdot r \cdot \sin \phi = 0$$

a po linearizaci $\sin \phi \cong \phi$ (viz též matematické kyvadlo) :

$$I \cdot \ddot{\phi} + G \cdot r \cdot \phi = 0$$

I tato pohybová rovnice je analogická

pohybové rovnici hmotného bodu na pružině :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

$$I \cdot \ddot{\phi} + G \cdot r \cdot \phi = 0$$

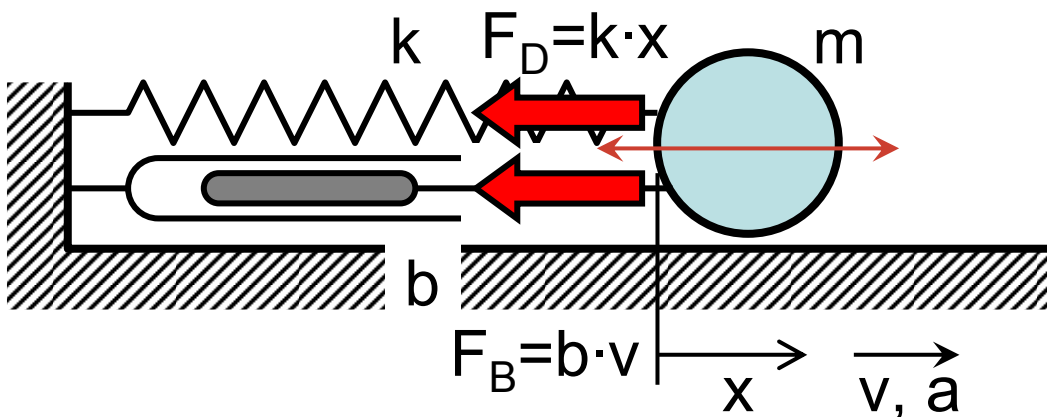
$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{G \cdot r}{I}}$$

Řešení je tedy analogické :

$$x = C \cdot \sin(\Omega \cdot t + \gamma_0)$$

$$\phi = C \cdot \sin(\Omega \cdot t + \gamma_0)$$

vlastní tlumené kmitání



Tlumení se projevuje tak, že proti směru rychlosti působí tzv. tlumicí síla F_B . Její velikost může být různá podle fyzikální příčiny tlumení. Nejčastější druhy tlumení vyvolávají tlumicí sílu závislou na rychlosti a to buď lineárně nebo kvadraticky. Dále provedeme řešení kmitavého pohybu při lineárním, tzv. viskózním tlumení, kdy tlumicí síla je přímo úměrná rychlosti $F_B = b \cdot v$, kde b je tzv. koeficient tlumení.

Kromě tlumicí síly na těleso působí, stejně jako u netlumeného kmitání, direkční síla $F_D = k \cdot x$.

Dynamika I, 11. přednáška

Jak již bylo zmíněno, každý reálný kmitavý pohyb je vždy tlumený a dříve či později se zastaví. Příčin tlumení může být více.

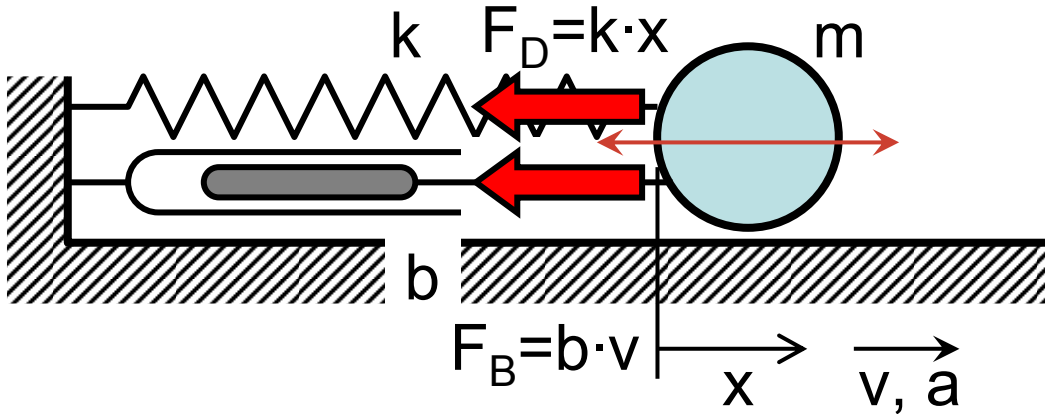
Např. pohyb v odporujícím prostředí (vzduch, kapalina).

S tlumením je spojena samotná deformace materiálu (pružiny), při níž dochází k přeměně malého množství mechanické energie na energii tepelnou. Tomuto druhu tlumení říkáme materiálové tlumení a je takřka všudypřítomné.

Příčinou tlumení může být i technické zařízení - tlumič, takový, jaký známe třeba z automobilu.

Symbolické znázornění tlumení právě připomíná tlumič. Musíme jej však chápat pouze jako znázornění faktu že tlumení je přítomno. Jeho příčinou nemusí být vždy technické zařízení.

vlastní tlumené kmitání



Dynamika I, 11. přednáška

Pohybová rovnice :

$$m \cdot a = \sum F_i$$

$$m \cdot a = -F_D - F_B$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

Řešení :

$$x = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$$
$$v = \dot{x} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot [\Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t + \phi_0) - \delta \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)]$$

Substituce :

$$\frac{k}{m} = \Omega_0^2 \quad \frac{b}{2 \cdot m} = \delta$$

Zde :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání} [s^{-1}]$$

(v řešení není přímo obsažena)

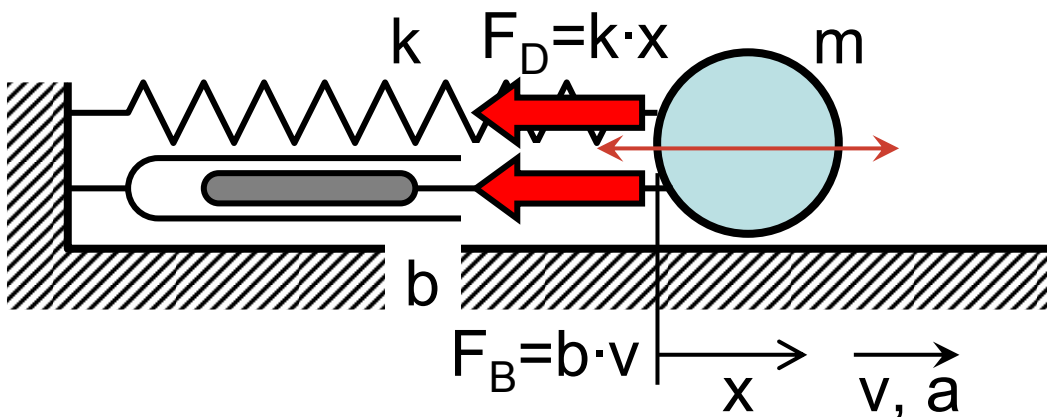
$$\delta = \frac{b}{2 \cdot m} \quad \text{konstanta dozívání} [s^{-1}]$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{vlastní kruhová frekvence tlumeného kmitání} [s^{-1}]$$

$$f = \frac{\Omega}{2 \cdot \pi} \quad \text{vlastní frekvence} [Hz] \text{ počet kmitů za sekundu}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \quad \text{perioda} [s] \text{ doba jednoho kmitu}$$

vlastní tlumené kmitání



Dynamika I, 11. přednáška

Pohybová rovnice :

$$m \cdot a = \sum F_i$$

$$m \cdot a = -F_D - F_B$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

Substitute : $\frac{k}{m} = \Omega_0^2$ $\frac{b}{2 \cdot m} = \delta$

Řešení : $x = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$
 $v = \dot{x} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot [\Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t + \phi_0) - \delta \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)]$

Zde : $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání [s^{-1}]
(v řešení není přímo obsažena)
 $\delta = \frac{b}{2 \cdot m}$ konstanta dozínání [s^{-1}]

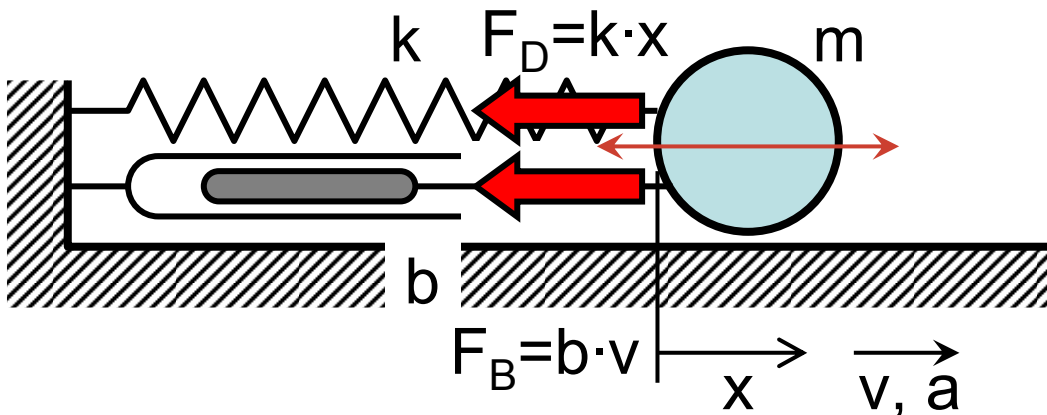
$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}$ vlastní kruhová frekvence tlumeného kmitání [s^{-1}]

Je zřejmé, že hodnota Ω může být reálná (je-li $\Omega_0 > \delta$) ale též imaginární (je-li $\Omega_0 < \delta$).

V prvním případě mluvíme o tzv. podkritickém tlumení. Tomuto druhu kmitání bude věnován celý další výklad.

Ve druhém případě mluvíme o tzv. nadkritickém tlumení. V tomto případě se vůbec nerozvine kmitání a pohyb se utlumí dříve, než by nastal první celý kmit.

vlastní tlumené kmitání



Dynamika I, 11. přednáška

Pohybová rovnice :

$$m \cdot a = \sum F_i$$

$$m \cdot a = -F_D - F_B$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

Substitute : $\frac{k}{m} = \Omega_0^2$ $\frac{b}{2 \cdot m} = \delta$

Řešení : $x = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$
 $v = \dot{x} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot [\Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t + \phi_0) - \delta \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)]$

Konečně C a ϕ_0 jsou integrační konstanty, jejichž hodnotu určíme z počátečních podmínek :
 $t=0 \dots x=x_0$ - počáteční výchylka, $v=v_0$ - počáteční rychlost.

$$x_0 = C \cdot \sin(\phi_0) \quad v_0 = C \cdot [\Omega \cdot \cos(\phi_0) - \delta \cdot \sin(\phi_0)]$$

Časovou závislost výchylky a rychlosti lze vyjádřit alternativně :

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\Omega \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega \cdot t)]$$

$$v = \dot{x} = e^{-\delta \cdot t} \cdot [(B \cdot \Omega - A \cdot \delta) \cdot \cos(\Omega \cdot t) - (B \cdot \delta + A \cdot \Omega) \cdot \sin(\Omega \cdot t)]$$

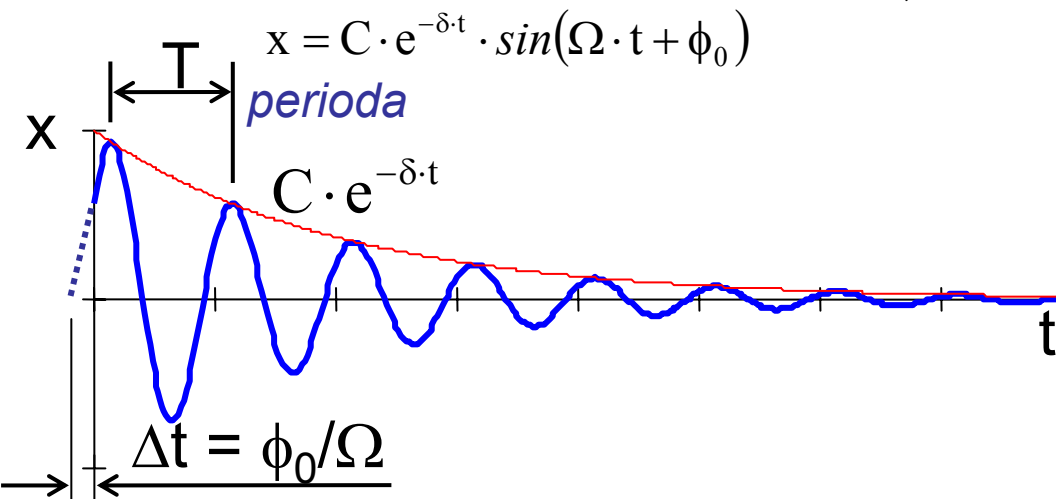
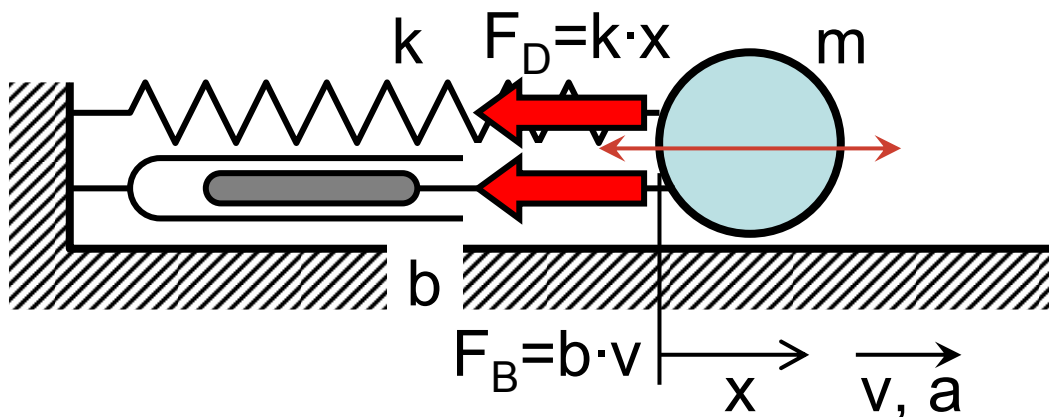
kde : $A = C \cdot \sin \phi_0$ $B = C \cdot \cos \phi_0$ jsou alternativní integrační konstanty.

$$x_0 = A \quad v_0 = B \cdot \Omega - A \cdot \delta$$

Integrační konstanty pak jsou :

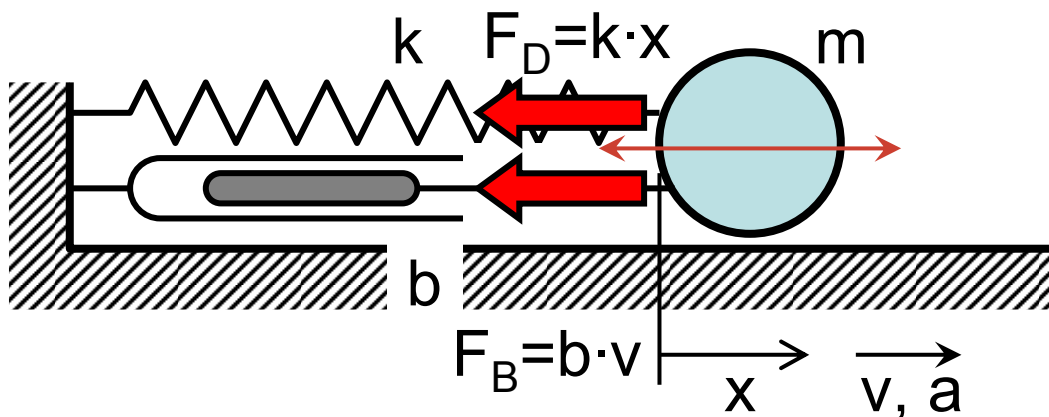
$$A = x_0 \quad B = \frac{v_0 + x_0 \cdot \delta}{\Omega} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \phi_0 = \arctan \frac{A}{B}$$

vlastní tlumené kmitání

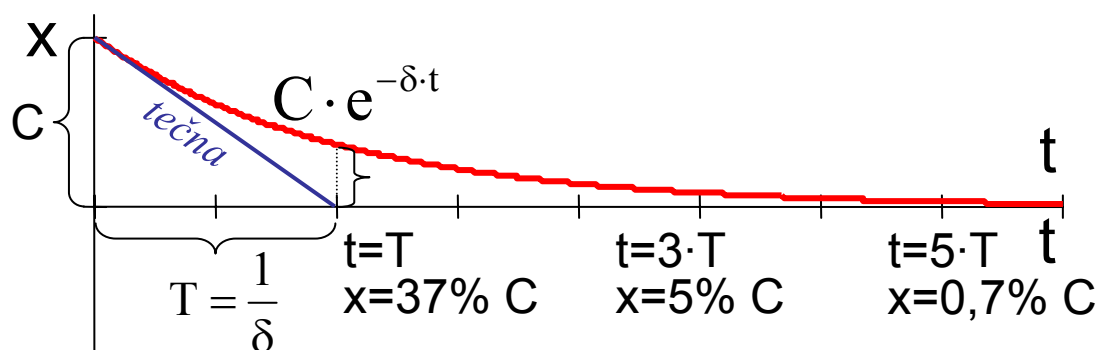


Dynamika I, 11. přednáška

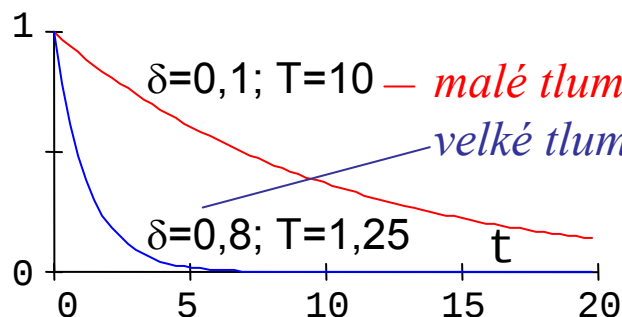
Časový průběh výchylky je sinusovka s exponenciálně klesající amplitudou. Na průběhu je bezprostředně vidět perioda T a fázový posuv ϕ_0 . Naopak integrační konstanta C na průběhu sinusovky patrná není. Kromě samotného průběhu výchylky (modrá sinusovka) je zajímavý též průběh exponenciální obálky $C \cdot e^{-\delta \cdot t}$ (červená).



$$x = C \cdot e^{-\delta \cdot t}$$



časová konstanta



Kromě samotného průběhu výchylky (modrá sinusovka) je zajímavý též průběh exponenciální obálky $C \cdot e^{-\delta \cdot t}$ (červená). V čase $t=0$ má hodnotu rovnou integrační konstantě C .

Konstanta dozívání δ určuje rychlost poklesu exponenciály. Její převrácená hodnota je tzv. časová konstanta $T = 1/\delta$ (neplést si s periodou!). V čase rovném jedno, troj nebo pětinasobku časové konstanty klesá hodnota na 37%, 5% nebo 0,7% počáteční hodnoty C .

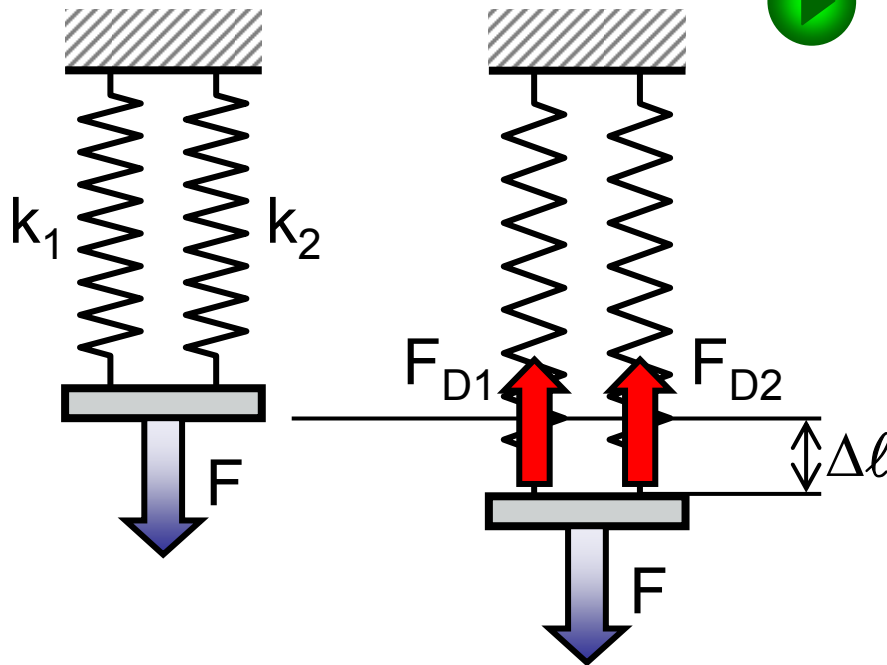
Pozor ! Zde T je časová konstanta (ne perioda !)

V technické praxi se často setkáme s kombinováním a různým skládáním pružných členů.

Proto je třeba umět správně stanovit výslednou tuhost pružného uložení.

Ukážeme si dva základní způsoby skládání pružných členů.

paralelní spojení (vedle sebe)



$$F_{D1} = k_1 \cdot \Delta\ell$$

$$F_{D2} = k_2 \cdot \Delta\ell$$

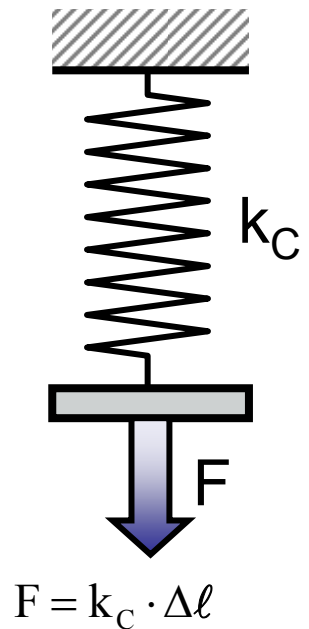
$$F = F_{D1} + F_{D2}$$

$$F = k_1 \cdot \Delta\ell + k_2 \cdot \Delta\ell$$

$$F = (k_1 + k_2) \cdot \Delta\ell$$

$$F = k_C \cdot \Delta\ell$$

$$k_C = k_1 + k_2$$



$$F = k_C \cdot \Delta\ell$$

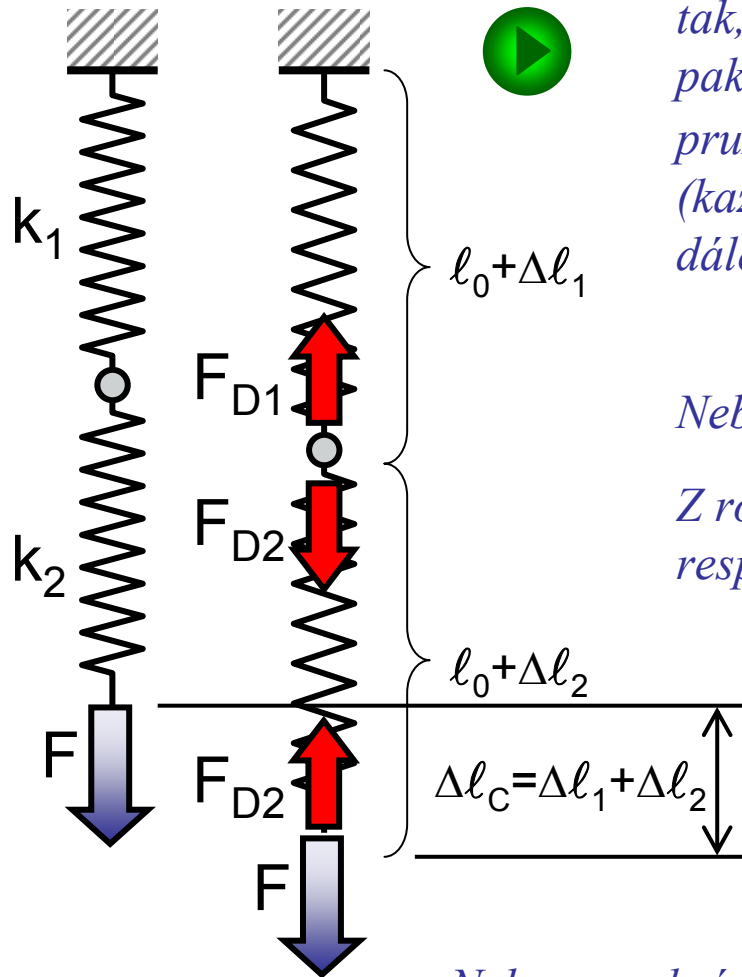
Dvěma pružinami o tuhostech k_1 a k_2 je k rámu vázána deska, na niž působí síla F .
 Síla způsobí prodloužení obou pružin o shodnou délku $\Delta\ell$.
 V pružinách vzniknou směrné síly F_{D1} a F_{D2} .
 Jejich prostý součet musí být v rovnováze se silou F .

Celková tuhost dvou paralelně spojených pružin je rovna prostému součtu tuhostí obou pružin.

paralelní spojení

deformace $\Delta\ell$ je pro obě pružiny společná, směrné síly F_{D1} a F_{D2} se sčítají

sériové spojení (za sebou)



Dvě pružiny o tuhostech k_1 a k_2 jsou spojeny tak, že druhá je připojena k první, na druhou pak působí síla F . Vlivem této síly se obě pružiny prodlouží o deformaci Δl_1 resp. Δl_2 (každá jinak). V obou natažených pružinách dále vznikají směrové síly F_{D1} a F_{D2} .

$$F_{D1} = k_1 \cdot \Delta l_1 \quad F_{D2} = k_2 \cdot \Delta l_2$$

Neboli :

$$\Delta l_1 = \frac{F_{D1}}{k_1} \quad \Delta l_2 = \frac{F_{D2}}{k_2}$$

Z rovnováhy sil v bodě spojení obou pružin, resp. v místě působení síly F , vyplývá :

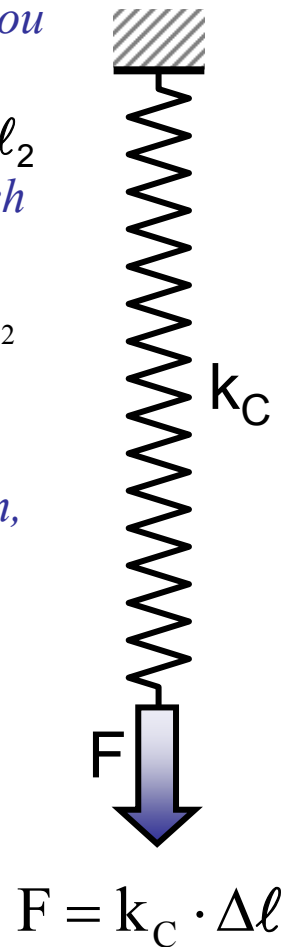
$$F_{D1} = F_{D2} = F$$

Celkovou deformaci obou pružin Δl_C můžeme vyjádřit jako součet :

$$\Delta l_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F}{k_C} = \frac{F_{D1}}{k_1} + \frac{F_{D2}}{k_2}$$

Nebo po vykrácení $F = F_{D1} = F_{D2}$:

$$\frac{1}{k_C} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



sériové spojení

deformace Δl se sčítají, směrové síly obou pružin F_{D1} a F_{D2} jsou stejné

sériové spojení (za sebou)

Převrácená hodnota celkové tuhosti dvou sériově spojených pružin je rovna prostému součtu převrácených hodnot tuhostí obou pružin.

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Z výrazu lze samozřejmě vyjádřit přímo celkovou tuhost.

$$k_c = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

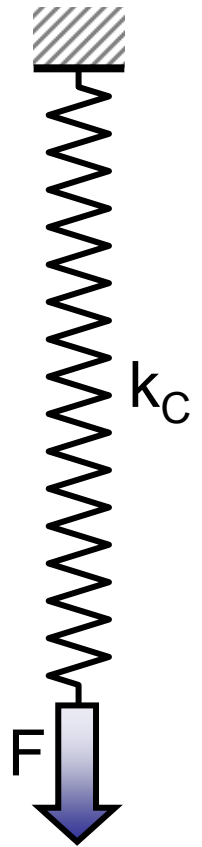
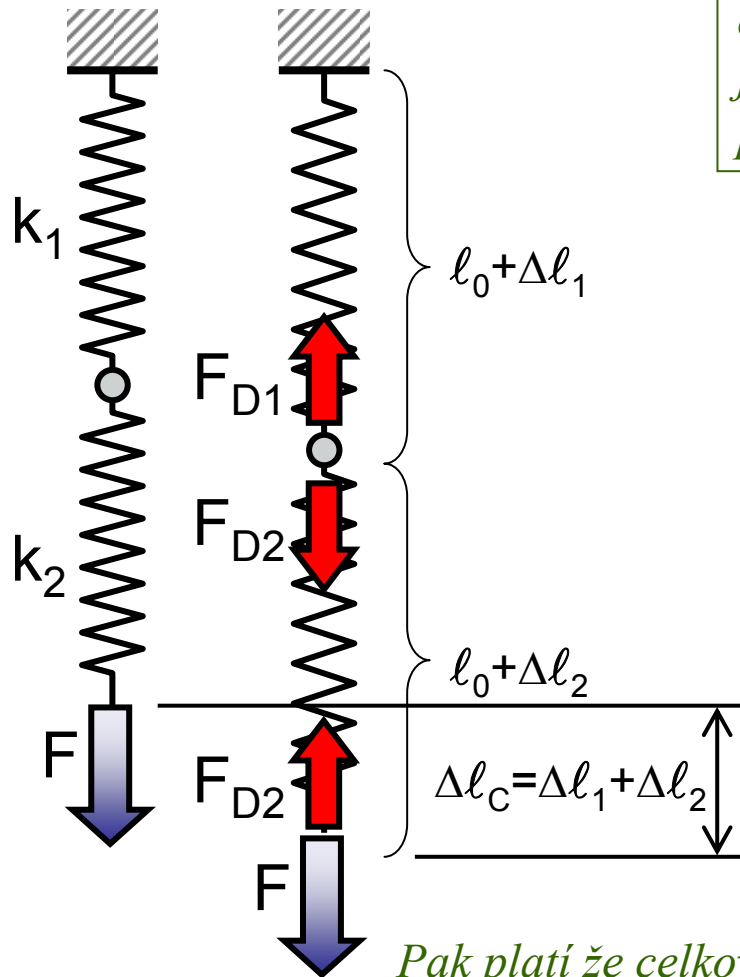
Někdy bývá zvykem vyjadřovat poddajnost κ jako převrácenou hodnotu tuhosti k .

$$\kappa = \frac{1}{k}$$

Pak platí že celková poddajnost dvou sériově spojených pružin je rovna prostému součtu poddajností jednotlivých pružin.

$$\kappa_c = \kappa_1 + \kappa_2$$

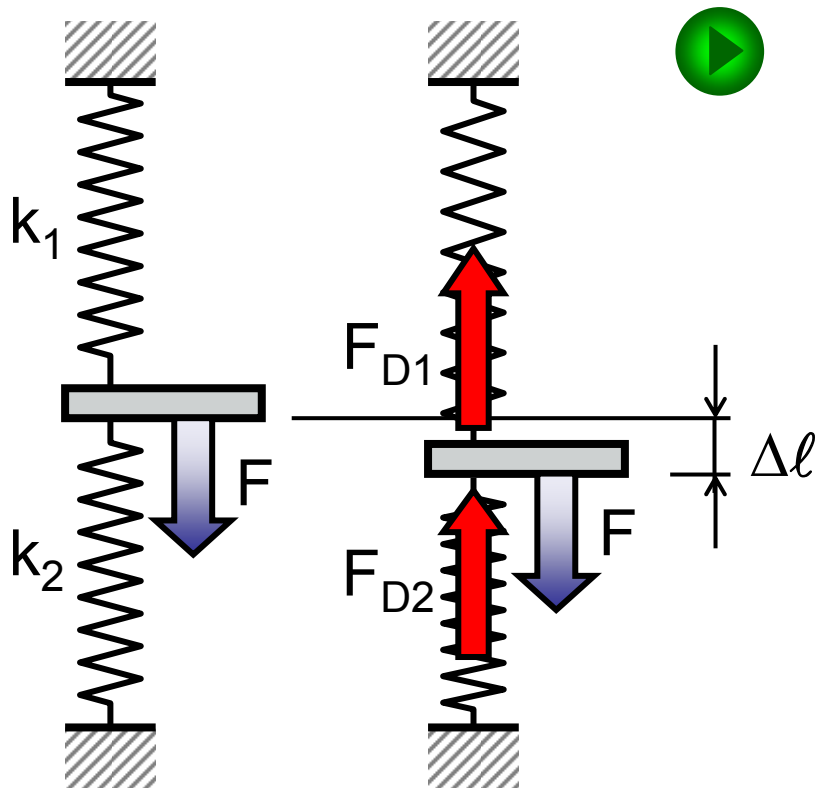
$$F = k_c \cdot \Delta \ell$$



sériové spojení

deformace $\Delta \ell$ se sčítají, direkční síly obou pružin F_{D1} a F_{D2} jsou stejné

paralelní spojení (vedle sebe)



$$F_{D1} = k_1 \cdot \Delta \ell$$

$$F_{D2} = k_2 \cdot \Delta \ell$$

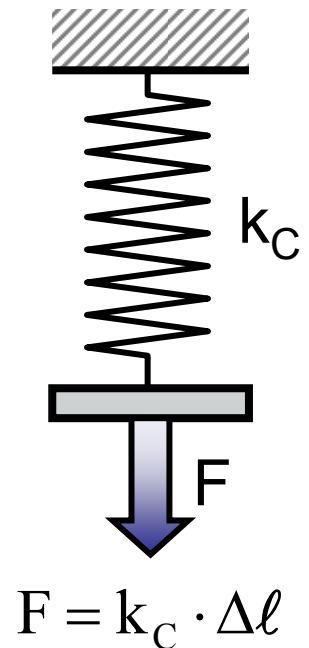
$$F = F_{D1} + F_{D2}$$

$$F = k_1 \cdot \Delta \ell + k_2 \cdot \Delta \ell$$

$$F = (k_1 + k_2) \cdot \Delta \ell$$

$$F = k_C \cdot \Delta \ell$$

$$k_C = k_1 + k_2$$

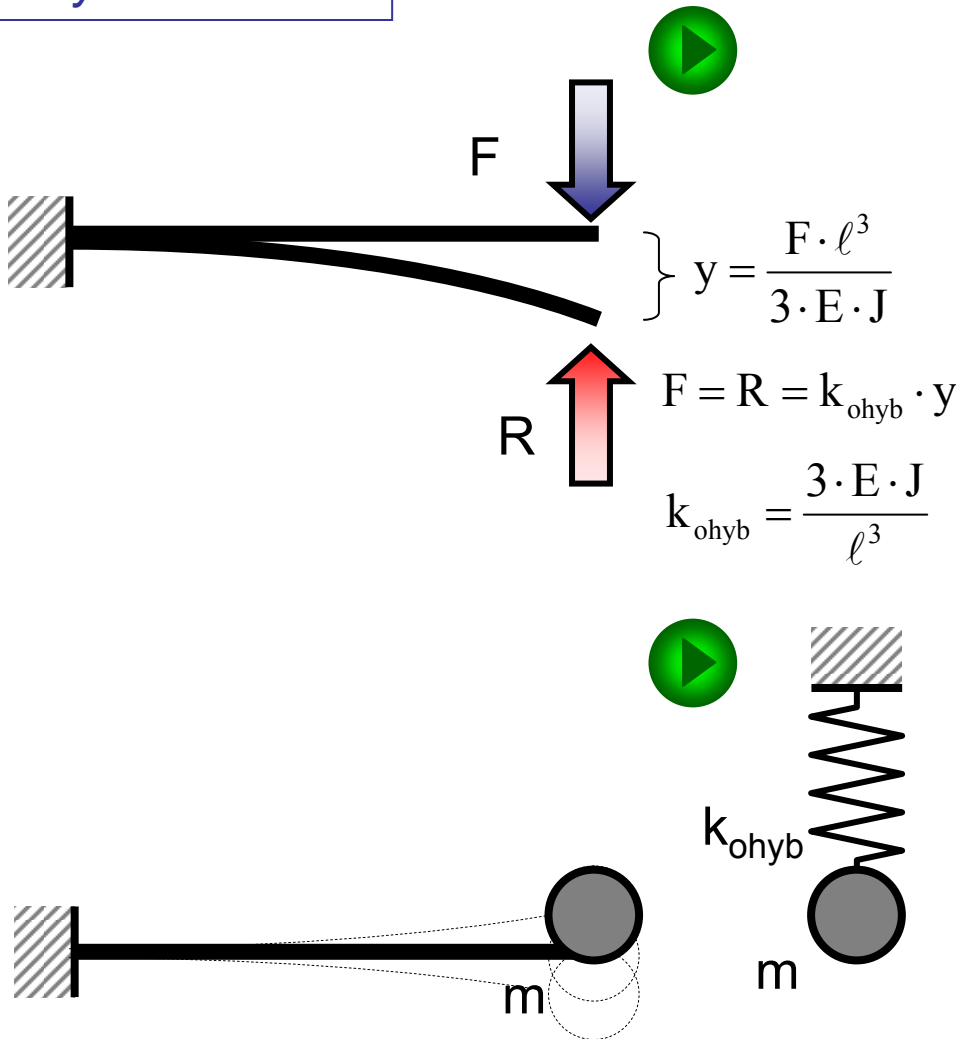


V klasifikaci spojení pružných členů, a následně ve výpočtu celkové tuhosti, studenti často chybují. Spojení dle tohoto obrázku bývá občas, pouze pro svou vizuální podobnost, pokládáno mylně za spojení sériové.

Posoudíme-li však podstatné rysy, snadno nahlédneme, že se jedná o spojení paralelní.

paralelní spojení

deformace $\Delta \ell$ je pro obě pružiny společná, směrné síly F_{D1} a F_{D2} se sčítají



V celém výkladu jsme za pružný člen, pružnou vazbu hmotného objektu k rámu, považovali vinutou spirálovou pružinu. To však není zcela podmínkou. Pružným členem může být jakýkoliv deformovatelný objekt.

Uvažujme nosník, na jedné straně dokonale vetknutý, na druhé straně zatížený silou F . Vlivem síly se nosník prohne. Průhyb y je přímo úměrný síle F . Dále pak je :

ℓ - délka nosníku,

E - modul pružnosti v tahu,

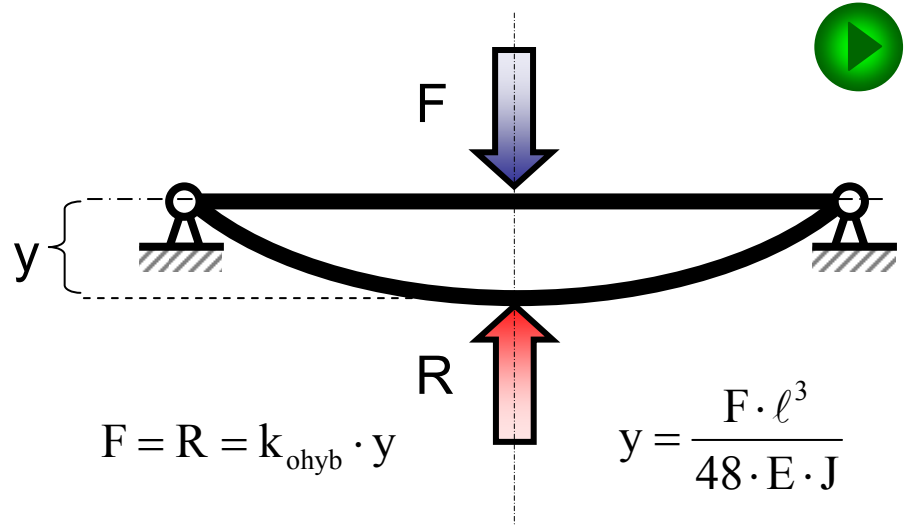
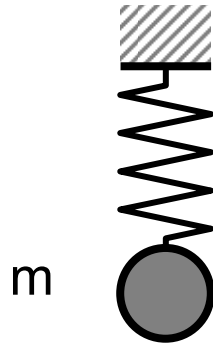
J - průřezový moment setrvačnosti.

Reakcí nosníku na prohnutí je síla R , stejně velká, opačně orientovaná než síla F , tlačící konec nosníku vzhůru. Jde o analogii směrných sil pružiny.

Bude-li na konci nosníku hmotný objekt o hmotnosti m , bude se soustava chovat po všech stránkách stejně jako na spirálové pružině. Veškerá uvedená odvození platí beze změny.

ohybové kmitání

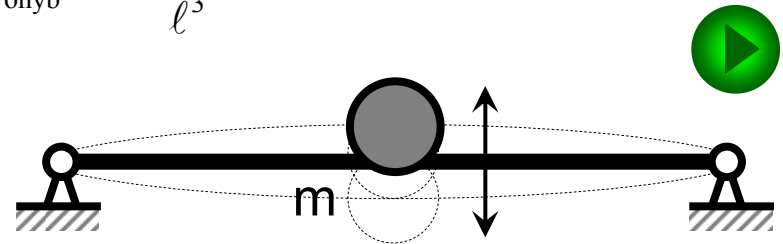
Je-li pružným členem, pružnou vazbou hmotného objektu k rámu, ohýbaný nosník (libovolně uložený) hovoříme o ohybovém kmitání.



$$F = R = k_{\text{ohyb}} \cdot y$$

$$y = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

$$k_{\text{ohyb}} = \frac{48 \cdot E \cdot J}{\ell^3}$$



Obsah přednášky :

tuhost pružiny,

kmitání vlastní netlumené a tlumené,

řazení pružin, ohybové kmitání