



Lávku nad vodou můžeme modelovat jako těleso o hmotnosti mT , které kmitá na pružině o tuhosti ktv . Tlumení je modelováno silou, která je úměrná rychlosti $F=b \cdot v$. Určete periodu kmitání a dobu za kterou klesne amplituda na pětinu původní hodnoty.

$$ktv := 1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$b := \frac{20 \cdot \text{kg}}{\text{sec}}$$

$$mtv := 10 \cdot \text{kg}$$

Řešení: Napíšeme pohybovou rovnici a využijeme toho, že rychlost je první derivací x podle času a zrychlení je druhá derivace x podle času:

$$m \cdot a = -b \cdot v - ktv \cdot xtv$$

$$\frac{d^2}{dt^2} xtv + \frac{b}{m} \cdot \frac{d}{dt} x + \frac{ktv}{m} \cdot x = 0$$

Zavedeme substitute pro konstantu dozívání a vlastní kruhovou frekvenci, která by platila pro netlumené kmitání. Důležité je správně převést jednotky zvláště u tuhosti.

$$\omega tv0 := \sqrt{\frac{ktv}{mtv}} \quad \delta := \frac{b}{2 \cdot mtv}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} xtv + 2 \cdot \delta \cdot \frac{d}{dt} x + \omega tv0^2 \cdot x = 0$$

Tuto rovnici lze samozřejmě řešit jako lineární diferenciální rovnice druhého řádu, ale protože se tato rovnice často opakuje je možná výhodnější si zapamatovat řešení např. ve tvaru:

$x(tv) = C e^{-\delta \cdot tv} \cdot (\sin(\Omega tv \cdot tv + \phi0))$ Kde $\Omega tv := \sqrt{\omega tv0^2 - \delta^2}$ je vlastní kruhová frekvence a C a $\phi0$ jsou integrační konstanty (určují se z počátečních podmínek), které mají význam počáteční amplitudy a počáteční fáze. Pro požadované zadání je nepotřebujeme určovat.

Perioda vlastního kmitání: $T_{tv} := \frac{2 \cdot \pi}{\Omega tv} \quad T = 0,631 \text{ s}$

Dobu $t1$ určíme z poměru amplitud: $\frac{C e^{-\delta \cdot tv}}{C e^{-\delta \cdot (tv+t1)}} = 5$ odtud: $t1 := \frac{\ln(5)}{\delta} \quad t1 = 1,609 \text{ s}$

Odpověď: Perioda vlastního kmitání lávky je **$x_p = 0,631$ s** a doba za kterou její výkyv klesne na pětinu původní hodnoty je **$T = 1,609$ s**.