4. SPLINE

Cíl Po prostudování této kapitoly budete umět

- popsat a definovat funkce, které jsou základem pro tvorbu křivek
- definovat a zadávat data pro programy na vykreslování grafů těchto funkcí
- řešit příklady z praxe na křivky

Výklad

4.1. Spline funkce

Slovo "spline" označuje pružné homogenní laťkové křivítko, které užívali konstruktéři trupu lodí. V praxi se používá - téměř bez výjimky - kubických splinů.

Proč právě kubických splinů? Snahou v počítačové grafice je aplikovat pokud možno jednodušší výpočty s ohledem na rychlost výpočtů. Křivky druhého stupně nevyhovují, protože neobsahují inflexní bod. Neumožňují tedy změnu křivosti. Křivky třetího a vyššího stupně tuto vlastnost mají - obsahují inflexní body a tudíž umožňují změnu křivosti. Vyšší jak třetí stupeň však není vhodný.

Musí ovšem být splněny předpoklady.

Nechť jsou dány body $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$, kde platí

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \; .$$

Kubická spline funkce $f(x)$ splňuje následující podmínky:

a) $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$,

b) na intervalu $< x_i , x_{i+1} >$ platí $f(x) = f_i(x)$, $i = 0, \ldots, n-1$,

kde $f_i(x)$ je polynom třetího stupně ,

c) funkce f, f' a f'' jsou spojité na intervalu $< x_0 , x_n >$.

Polynom $f_i(x)$ můžeme psát ve tvaru:

$$ {}^{i}a_0 (x - x_i)^3 + {}^{i}a_1 (x - x_i)^2 + {}^{i}a_2 (x - x_i) + {}^{i}a_3 \; ,$$

je to kubická spline funkce určená $4n$ koeficienty.

Zadané funkční hodnoty představují (n+1) podmínek (viz bod a) definice).

Podmínkou spojitosti funkcí f, f' a f''

$$f_i^{(j)}(x_{i+1}) = f_{i+1}^{(j)}(x_{i+1}) \; , \quad i = 0, \ldots, n-2 \, , \quad j = 0, 1, 2 \, ,$$

získáme 3(n -1) rovnic. Celkem tedy máme definicí kubické spline funkce zadáno (4n - 2) podmínek. Pro výpočet kubické spline funkce je tedy nutné kromě *bodů* $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ zadat ještě dvě další podmínky.

Nejčastěji se užívá "okrajových podmínek":

a) zadání y_0' a y_n' ,

nebo

b) zadání y_0'' a y_n'' , speciálně se užívá volby

$y_0'' = y_n'' = 0$ a pak mluvíme o přirozeném kubickém splinu.

Ukážeme nyní, jak pro jednotlivé "okrajové podmínky" provést výpočet splinu.

Určení koeficientů polynomů $f_i(x)$ provedeme ve dvou fázích:

1. určíme hodnoty $y_0', y_1', \dots, y_n'$;
2. pomocí Fergusnových oblouků určíme oblouky mezi danými body.

Užitím Hermitovy interpolace podle vztahů (3.14) vypočteme koeficienty.

Odvodíme nyní vztahy pro řešení 1, fáze výpočtu. Funkci $f_i(x)$ vyjádříme podle vztahů (3.14) v maticovém tvaru (${}^{i}k = x_{i+1} - x_i$):

$$f_i(x) = \left[\ (x-x_i)^3\ ,\ (x-x_i)^2\ ,\ x-x_i\ ,\ 1\ \right] \begin{bmatrix} {}^{i}a_0 \\ {}^{i}a_1 \\ {}^{i}a_2 \\ {}^{i}a_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\ (x-x_i)^3\ ,\ (x-x_i)^2\ ,\ x-x_i\ ,\ 1\ \right] . \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{2}{{}^{i}k^3}\ , & -\frac{2}{{}^{i}k^3}\ , & \frac{1}{{}^{i}k^2}\ , & \frac{1}{{}^{i}k^2} \\ \frac{3}{{}^{i}k^2}\ , & \frac{3}{{}^{i}k^2}\ , & -\frac{2}{{}^{i}k}\ , & \frac{1}{{}^{i}k}\ , \\ 0\ , & 0\ , & 1\ , & 0 \\ 0\ , & 0\ , & 0\ , & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y'_i \\ y'_{i+1} \end{bmatrix}$$

Je zřejmé, že při výpočtu derivací funkce $f_i(x)$ stačí derivovat vektor

$[(x - x_i)^3, (x - x_i)^2, x - x_i, 1]$.

Z podmínky $f_i''(x_{i+1}) = f_{i+1}''(x_{i+1})$, i = 0, . . . , n-2

$$f_0''(x_1) = f_1''(x_1)$$

vypočteme

$$\left[\frac{12}{{}^{i}k^{2}}-\frac{6}{{}^{i}k^{2}}\ ,\quad -\frac{12}{{}^{i}k^{2}}+\frac{6}{{}^{i}k^{2}}\ ,\quad \frac{6}{{}^{i}k}-\frac{4}{{}^{i}k}\ ,\quad \frac{6}{{}^{i}k}-\frac{2}{{}^{i}k}\right]\cdot\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y'_i \\ y'_{i+1}\end{bmatrix}=$$

$$=\left[-\frac{6}{{}^{i+1}k^{2}}\ ,\quad \frac{6}{{}^{i+1}k^{2}}\ ,\quad -\frac{4}{{}^{i+1}k}\ ,\quad -\frac{2}{{}^{i+1}k}\right]\cdot\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y'_{i+1} \\ y'_{i+2}\end{bmatrix}.$$

Po úpravě získáme rovnici

$$\frac{1}{{}^{i}k}y'_i+\left(\frac{2}{{}^{i}k}+\frac{2}{{}^{i+1}k}\right)y'_{i+1}+\frac{1}{{}^{i+1}k}y'_{i+2}==-\frac{3}{{}^{i+1}k^{2}}y_i+\left(\frac{3}{{}^{i}k^{2}}-\frac{3}{{}^{i+1}k^{2}}\right)y_{i+1}+\frac{3}{{}^{i+1}k^{2}}y_{i+2} \quad (4.0)$$

pro $i = 0, ..., n-2$.

Pro zadané hodnoty y_0' a y_n' můžeme soustavu lineárních rovnic pro výpočet y_1' ,...,y_{n-1}' psát ve tvaru (n > 2):

$$A\ .\begin{bmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_{n-1}\end{bmatrix}=B \qquad (4.1)$$

kde

$$A=\begin{bmatrix}
\frac{2}{{}^{0}k}+\frac{2}{{}^{1}k} & \frac{1}{{}^{1}k}, & 0, & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots, & & 0 \\
\frac{1}{{}^{1}k} & \frac{2}{{}^{1}k}+\frac{2}{{}^{2}k}, & \frac{1}{{}^{2}k}, & 0 & \dots & & \dots & \dots & \dots & & 0 \\
 & \dots & & & & & & & & & \\
0, & \dots, & 0 & \frac{1}{{}^{i}k}, & \frac{2}{{}^{i}k}+\frac{2}{{}^{i+1}k}, & & \frac{1}{{}^{i+1}k}, & 0, & \dots & & 0 \\
 & \dots & & & & & & & & & \\
0, & \dots & \dots & \dots & \dots, & & 0, & \frac{1}{{}^{n-3}k}, & \frac{2}{{}^{n-3}k}+\frac{2}{{}^{n-3}k}, & \frac{1}{{}^{n-1}k} & \\
0, & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & 0, & \frac{1}{{}^{n-2}k}, & \frac{2}{{}^{n-2}k}+\frac{2}{{}^{n-1}k}, &
\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{{}^{1}k^{2}} y_2 - \frac{3}{{}^{0}k^{2}} y_0 + \left(\frac{3}{{}^{0}k^{2}} - \frac{3}{{}^{1}k^{2}} \right) y_1 \boxed{- \frac{1}{{}^{0}k} y_0'} \\ \frac{3}{{}^{2}k^{2}} y_3 - \frac{3}{{}^{1}k^{2}} y_1 + \left(\frac{3}{{}^{1}k^{2}} - \frac{3}{{}^{2}k^{2}} \right) y_2 \\ \vdots \\ \frac{3}{{}^{i+1}k^{2}} y_{i+2} - \frac{3}{{}^{i}k^{2}} y_i + \left(\frac{3}{{}^{i}k^{2}} - \frac{3}{{}^{i+1}k^{2}} \right) y_{i+1} \\ \vdots \\ \frac{3}{{}^{n-2}k^{2}} y_{n-1} - \frac{3}{{}^{n-3}k^{2}} y_{n-3} + \left(\frac{3}{{}^{n-3}k^{2}} - \frac{3}{{}^{n-2}k^{2}} \right) y_{n-2} \\ \frac{3}{{}^{n-1}k^{2}} y_n - \frac{3}{{}^{n-2}k^{2}} y_{n-2} + \left(\frac{3}{{}^{n-2}k^{2}} - \frac{3}{{}^{n-1}k^{2}} \right) y_{n-1} \boxed{- \frac{1}{{}^{n-1}k} y_n'} \end{bmatrix}$$

Matice A soustavy je tridiagonální a diagonálně dominantní a symetrická. Řešením soustavy (4.1) vypočteme hodnoty y_1' , . . . , y'_{n-1} a užitím vztahu (3.14)- předcházející kapitola 3 je možné sestavit rovnice splinu pro dané okrajové podmínky y_0' a y_n'.

Tvar soustavy pro výpočet y_0' , . . . , y_n' pro případ přirozeného kubického splinu. Podmínka $f''(x_0) = 0$ vede k rovnici

$$-\frac{3}{{}^{0}k^{2}} y_0 + \frac{3}{{}^{0}k^{2}} y_1 - \frac{2}{{}^{0}k} y_0' - \frac{1}{{}^{0}k} y_1' = 0 \ ,$$

tj.

$$2y_0' + y_1' = \frac{3}{{}^{0}k} (y_1 - y_0) \ . \tag{4.2}$$

Podmínka $f''(x_n) = 0$ vede k rovnici

$$\frac{3}{{}^{n-1}k^{2}} y_{n-1} - \frac{3}{{}^{n-1}k^{2}} y_n + \frac{1}{{}^{n-1}k} y_{n-1}' + \frac{2}{{}^{n-1}k} y_n' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y_{0n-1}' + 2y_n' = \frac{3}{{}^{n-1}k} (y_n - y_{n-1}) \ . \tag{4.3}$$

Soustavu pro výpočet derivací y_0', . . . , y_n' pro přirozený spline můžeme na základě rovnic (4.2) a (4.3) psát ve tvaru

$$p_A \cdot \begin{bmatrix} y_0' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix} = p_B \tag{4.4}$$

kde

$$p_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{{}^0k} & \frac{2}{{}^0k}+\frac{2}{{}^1k} & \frac{1}{{}^1k} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & & & \\ 0 & & 0 & \frac{1}{{}^ik} & \frac{2}{{}^ik}+\frac{2}{{}^{i+1}k} & \frac{1}{{}^{i+1}k} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots, & 0 & \frac{1}{{}^{n-2}k}, & \frac{2}{{}^{n-2}k}+\frac{2}{{}^{n-1}k}, & \frac{1}{{}^{n-1}k} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{{}^0k}(y_1 - y_0) \\ \frac{3}{{}^1k^2}y_2 - \frac{3}{{}^0k^2}y_0 + \left(\frac{3}{{}^0k^2} - \frac{3}{{}^1k^2}\right)y_1 \\ \vdots \\ \frac{3}{{}^{i+1}k^2}y_{i+2} - \frac{3}{{}^ik^2}y_i + \left(\frac{3}{{}^ik^2} - \frac{3}{{}^{i+1}k^2}\right)y_{i+1} \\ \frac{3}{{}^{n-1}k^2}y_n - \frac{3}{{}^{n-2}k^2}y_{n-2} + \left(\frac{3}{{}^{n-2}k^2} - \frac{3}{{}^{n-1}k^2}\right)y_{n-1} \\ \frac{3}{{}^{n-1}k}(y_n - y_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Příklad 1.

Pro tabulku hodnot (z minulého příkladu) určete kubickou přirozenou spline funkci.

Daná tabulka:

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	0	16

Dle (4.4) sestavíme soustavu: $n = 2$, t . j . matice p_A je typu $3 * 3$ a ${}^0k = 1$, ${}^1k = 2$.

Platí:

$$p_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad p_B = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{3}{4}.16 - 3 + \left(3 - \frac{3}{4}\right).0 \\ \frac{3}{2}.(16-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy je (druhý řádek násobíme dvěma):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 24 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 9 & 99 \end{array}\right]$$

Tedy $y_2' = 11$, $y_1' = 2$, $y_0' = -\frac{5}{2}$.

Užitím rovnic (3.14) lze sestavit rovnice splinu:

$$f_0(x) = {}^0a_0 x^3 + {}^0a_1 x^2 + {}^0a_2 x + {}^0a_3 \ ,$$

kde

$${}^0a_0 = 2 + \left(-\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{3}{2} \ ,$$

$${}^0a_1 = -3 - (-5 + 2) = 0$$

$${}^0a_2 = -\frac{5}{2}$$

$${}^0a_3 = 1 .$$

První oblouk bude dán polynomem

$$f_0(x) = \frac{1}{2}\left(3x^3 - 5x + 2\right) \ , \quad x \in \langle 0 , 1 \rangle \ .$$

Pro druhý:

$$f_1(x) = {}^1a_0(x-1)^3 + {}^1a_1(x-1)^2 + {}^1a_2(x-1) + {}^1a_3 \ ,$$

kde

$${}^1a_0 = \frac{2(0-16)}{8} + \frac{2+11}{4} = -\frac{3}{4} \qquad {}^1a_2 = 2$$

$${}^1a_1 = \frac{3(16-0)}{4} - \frac{2.2+11}{2} = \frac{9}{2} \qquad {}^1a_3 = 0$$

Tedy

$$f_1(x) = \frac{1}{4}\left[-3(x-1)^3 + 18(x-1)^2 + 8(x-1) \right] .$$

Pro uvedenou tabulku přirozený splin bude:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(3x^3 - 5x + 2\right) & \text{pro } x \le 1 \\ \frac{1}{4}\left[-3(x-1)^3 + 18(x-1)^2 + 8(x-1) \right] . & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

4.2 Spline křivky - rovinné i prostorové.

Definice. Nechť jsou dány polohové vektory $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_n$ opěrných bodů

a reálná čísla $t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

Kubickou spline křivkou $\underline{P}(t)$, kde $t \in \langle t_0, t_n \rangle$ nazveme křivku, pro níž každá složka vektorového vyjádření je spline funkcí parametru $\boldsymbol{t}$ pro dvojice $(t_0,s_0), \dots, (t_n,s_n)$,

kde $s_0, \dots, s_n$ jsou příslušné složky vektoru $\underline{P}_0, \dots, \underline{P}_n$. Volbou čísel $t_0, t_1, \dots, t_n$ - určujeme parametrizaci spline křivky. Nejčastěji se užívá tzv. uniformních splinů, t.j. volí se $t_i = i$,

kde $i = 0, \dots, n$.

Kubická spline funkce je jednoznačně určena opěrnými body s polohovými vektory

$\underline{P}_0, \dots, \underline{P}_n$ a "okrajovými podmínkami".

Okrajové podmínky jsou

a) zadané prvních derivací v bodech x_0 a x_n.

b) zadané druhé derivace v bodech x_0 a x_n.

Jestliže je $\underline{P}_0'' = \underline{P}_n'' = 0$ - potom mluvíme o přirozené spline křivce.

c) zadáním, že křivka je uzavřená.

Případ a) - stačí samozřejmě vyčíslit vektory $\underline{P}_1', \dots, \underline{P}_{n-1}'$ ($n > 2$) užitím soustavy (4.1).

Pro ${}^0k = {}^1k = \dots = {}^{n-1}k = 1$ máme soustavu

$$A \cdot \begin{bmatrix} \underline{P}_1' \\ \dots \\ \underline{P}_{n-1}' \end{bmatrix} = B \qquad (4.5)$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & \dots, & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

a

$$B = \begin{bmatrix} 3(\underline{P}_2 - \underline{P}_0) - \underline{P}'_0 \\ 3(\underline{P}_3 - \underline{P}_1) \\ \dots \\ 3(\underline{P}_{n-1} - \underline{P}_{n-3}) \\ 3(\underline{P}_n - \underline{P}_{n-2}) - \underline{P}'_n \end{bmatrix}$$

Pro $n = 2$ je soustava tvořena jedinou rovnicí:

$$4\underline{P}'_1 = 3(\underline{P}_2 - \underline{P}_0) - \underline{P}'_0 - \underline{P}'_2 .$$

Pro $n = 1$ je spline křivka totožná s Fergusonovou křivkou.

Pro případ b) . Ze soustavy (4.1) :

$$p_A \cdot \begin{bmatrix} \underline{P}'_0 \\ \dots \\ \underline{P}'_n \end{bmatrix} = p_B \qquad (4.6)$$

kde

$$p_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

pro n = 2

$$p_A = \begin{bmatrix} 3\,(\underline{P_1} - \underline{P_0}) \\ 3\,(\underline{P_2} - \underline{P_0}) \\ 3\,(\underline{P_3} - \underline{P_1}) \\ \dots \\ \dots \\ 3\,(\underline{P}_n - \underline{P}_{n-2}) \\ 3\,(\underline{P}_n - \underline{P}_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \text{pro } n = 2$$

Pro uzavřenou křivku - použijeme vztahu (4.0):

$$\underline{P_i}' + 4\,\underline{P_{i+1}}' + \underline{P_{i+2}}' = 3\,(\underline{P}_{i+2} - \underline{P}_i)\,, \qquad (4.7)$$
$$\text{pro } i = 0, \dots, n-2.$$

Protože jde o uzavřenou křivku, můžeme položit $\underline{P}_{n+1} = \underline{P}_0$ a $\underline{P}_{n+2} = \underline{P}_i$ a tak ze vztahu (4.7) pro $i = n - 1$ můžeme získat:

$$\underline{P_{n-1}}' + 4\,\underline{P_n}' + \underline{P_0}' = 3\,(\underline{P_0} - \underline{P_n}) \qquad (4.8)$$

a pro $i = n$

$$\underline{P_n}' + 4\,\underline{P_0}' + \underline{P_1}' = 3\,(\underline{P_1} - \underline{P_n})\,. \qquad (4.9)$$

Soustavu pro výpočet tečných vektorů uzavřené spline křivky na základě (4.9),(4.7),(4.8) můžeme psát ve tvaru ($n > 2$)

$$u_A \cdot \begin{bmatrix} \underline{P}'_0 \\ \dots \\ \underline{P}'_n \end{bmatrix} = u_B \qquad (4.10)$$

kde

$$u_A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots, & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad u_B = \begin{bmatrix} 3(\underline{P}_1 - \underline{P}_0) \\ 3(\underline{P}_2 - \underline{P}_0) \\ 3(\underline{P}_3 - \underline{P}_1) \\ \vdots \\ 3(\underline{P}_n - \underline{P}_{n-2}) \\ 3(\underline{P}_n - \underline{P}_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Příklad. Určete přirozenou spline křivku v rovině pro opěrné body

$\underline{P}_0 = [2, 0]$, $\underline{P}_1 = [-1, 1]$ a $\underline{P}_2 = [-1, -1]$.

Nejprve určíme tečné vektory $\underline{P}_0'$, $\underline{P}_1'$ a $\underline{P}_2'$.

Vyjdeme ze soustavy (4.10). Platí n = 2 , a tudíž:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = 3 \begin{bmatrix} (-3, & 0) \\ (-3, & -1) \\ (0, & -2) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 3(P_1 - P_0) \\ 3(P_2 - P_0) \\ 3(P_2 - P_1) \end{matrix}$$

Řešením těchto dvou soustav lineárních rovnic (na př. Gaussovou eliminací dostaneme tečné vektory v opěrných bodech .

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 9 & -36 \end{array}\right] \Rightarrow$$

Tedy: $\underline{P}_2' = \underline{[\,0.75\,;\ -3]}$,

$$\underline{P}_1' = \frac{1}{7}\left[-2\left[0.75\,;-3\right]+\left[-9\,;0\right]\right] = \underline{\left[-1.5\,;0\right]}\ ,$$

$$\underline{P}_0' = \frac{1}{2}\left[-\left[-1.5\,;0\right]+\left[-9\,;0\right]\right] = \underline{\left[-3.75;0\right]}\ .$$

Ze vztahů určíme dva Fergusonovy oblouky. (Kapitola 3.4.3)

První z nich je:

$$^1\underline{P}(t) = [2\,;0]\,.\,F_0(t) + [-1\,;1]\,.\,F_1(t) + [-3.75\,;0]\,.\,F_2(t) + [-1.5\,;0]\,.\,F_3(t),\ t \in \langle 0, 1 \rangle .$$

.

$$^1\underline{P}(t) = [\,0.75\,t^3 - 3.75\,t^2 + 2\,;-2t^3 + 3t^2\,]\,.$$

Druhý bude vyjádřen v parametru $v \in <0,1>$ pro body $\underline{P}_1$ a $\underline{P}_2$ a tečné vektory $\underline{P}_1'$ a $\underline{P}_2'$.

$$^2\underline{P}(v) = [-1;1].F_0(v) + [-1;-1].F_1(v) + [-1.5;0].F_2(v) + [0.75;-3].F_4(v) =$$
$$= [-0.75v^3 + 2.25v^2 - 1.5v - 1;\ v^3 - 3v^2 + 1].$$

Výsledná křivka tedy bude popsána rovnicemi

$$\underline{P}(t) = \begin{cases} [0.75t^3 - 3.75t^2 + 2;\ -2t^3 + 3t^2] & \text{pro } t \in <0,1> \\ [-0.75(t-1)^3 + 2.25(t-1)^2 - 1.5(t-1) - 1; \\ \quad (t-1)^3 - 2(t-1) + 1] & \text{pro } t \in <1,2>. \end{cases}$$

$$\underline{R}(t) = F_0(t)\cdot\underline{G} + F_1(t)\cdot\underline{H} + F_2(t)\cdot\underline{g} + F_3(t)\cdot\underline{h} \qquad \text{pro } t \in <0,1>.$$

$\underline{G}$, $\underline{H}$ . . . polohové vektory bodů;

$\underline{g}$, $\underline{h}$ . . . vektory tečen v bodech, ve kterých je Fergusonova křivka jednoznačně určena.

Pro F_i, $i = 0, 1, 2, 3$ platí :

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$F_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$
$$F_3(t) = t^3 - t^2 \qquad t \in <0,1>.$$

Pro $t = 0$ . . . $\underline{R}(t) = \underline{G}$; pro $t = 1$ . . . $\underline{R}(t) = \underline{H}$

Pro $\underline{g} = \underline{h}$ . . . $\underline{GH}$ je aproximováno úsečkou.

Otázky 4.

1. Charakterizujte spline funkce, spline křivky. Zadání a použití.
2. Dejte příklad použití spline křivky. Otevřené, uzavřené.

Úlohy k řešení 4.

Příklad 4.1.

Jsou dány body P_0, P_1, P_2 a P_3 a tečny v nich P_0', P_1', P_2' a P_3'. Zobrazte a) zadané body; b) tečny v zadaných bodech (d = 2); c) přirozený spline zadanými body; d) pravoúhlý průmět do první průmětny.

Zobrazte v kosoúhlém promítání (q a ω volte parametricky).

Klíč 4.1.

P_0 [0 , 0 , 0] P_0' [0.75 ,-0.75 , 0]

P_1 [1 , 0 , 0] P_1' [0.75 , 0.75 , 0.75]

P_2 [1 , 1 , 1] P_2' [-0.75 , 0.75 , 0]

P_3 [0 , 1 , 0] P_3' [-0.75 ,-0.75 ,-0.75]

P_0 [0 , 0 , 0] P_0' [0.75 ,-0.75 , 0]

$\underline{P}'(t) = \underline{P_0}\, F_1(t) + \underline{P_1}\, F_2(t) + \underline{P_0}'\, F_3(t) + \underline{P_1}'\, F_4(t) =$

$P^1(t) = [0, 0, 0].F_1(t) + [1, 0, 0].F_2(t) + [0.75, -0.75, 0].F_3(t) +$

$+ [0.75, 0.75, 0.75].F_4(t)$

P^1 : první oblouk

"X" 1: $a_0 = -2 + 1.5 = \underline{-0.5\, t^3}$

$a_1 = 3(1 - 0) - 1.5 - 0.75 = \underline{0.75\, t^2}$

$a_2 = \underline{0.75\, t}$

$a_0 = 2(y_0 - y_1) + y_0' + y_1'$

$a_1 = 3(y_1 - y_0) - 2\, y_0' - y_1'$

$a_2 = y_0'$ $a_3 = y_0$

"Y" 2: $a_0 = 2(0 - 0)\,.. = \underline{0\, t^3}$ $a_1 = -0.75\, ... = \underline{-2.25\, t^2}$ $a_2 = \underline{-0.75\, t}$

"Z" 3: $a_0 = \underline{0.75}\, t^3$ $a_1 = \underline{-0.75}\, t^2$ $a_2 = 0$ $a_3 = 0$

$P^1(t) = [-0.5t^3 + 0.75t^2 + 0.75t; -2.25t^2 - 0.75t; t^3 - 0.75t^2]$ pro $t \in <0, 1>$.

P^2 : druhý oblouk

"X":	"Y":	"Z":
$a_0 = 2(0) + 0 = 0.v^3$	$-2 + 1.5 = -0.5\, v^3$	$-2 + 0.75 = -1.25\, v^3$
$a_1 = 0 - 0.75 = -0.75\, v^3$	$3 - 2.25 = 0.75\, v^3$	$3 - 1.25 = 1.75$
$a_2 = 0.74\, v$ $a_3 = v$		

$P^2(v) = [-0.75v^2 + 0.75v + 1; -0.5v^3 + 0.75v^2 + 0.75v; -1.25v^3 + 1.5v^2 + 0.75v]$

pro $v \in <0,1>$.

P^3 : třetí oblouk

$P^3(s) = [-0.5s^3 - 0.75\, s^2 - 0.75\, s + 1; -0.75\, s^2 + 0.75s + 1; -1.25\, s^3 - 2.25\, s^2 + 1]$

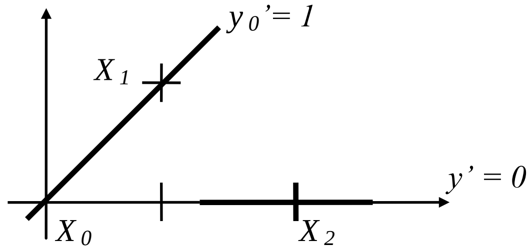
pro $s \in <0, 1>$.

P^4 : čtvrtý (poslední) oblouk

$P^4(u) = [0.75u^2 - 0.75\, u; 0.5\, u^3 - 0.75\, u^2 - 0.75u + 1; -0.75\, u^3 + 1.5\, u^2 - 0.75\, u]$

pro $u \in <0, 1>$.

Příklad 4.2. Určete kubickou spline funkci pro opěrné body $X_0 = (0, 0)$, $X_1 = (1, 1)$, $X_2 = (2, 0)$, kde $y' = 1$ a $y' = 0$.



$X_0(0, 0)$, $y_0' = 1$

$X_1(1, 1)$,

$X_2(2, 0)$, $y_2' = 0$

$f(x) = f_0(x) = x \in \langle 0, 1 \rangle$

$f_1(x) = x \in \langle 1, 2 \rangle$ $\qquad$ $f_i = 3^\circ$ - polynomy 3 - stupně

$f_i(x) = R_i (x-x_i)^3 + S_i (x-x_i)^2 + T_i (x-x_i) + U_i, \quad i = 0, 1.$

Klíč 4.2.

Ze zadání plyne:

$$\left.\begin{array}{lllll} (5) & f_0(x0) = f_0(0) = 0 \\ & f_1(x1) = f_1(1) = 1 \\ & f_0(x1) = f_0(1) = 1 \\ & f_1(x2) = f_1(2) = 0 \\ & f_0'(x0) = f_0'(0) = 1 \\ (6) & f_1'(x2) = f_1'(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(7) $\quad f_0'(x_1) = f_1'(x_1)$ a $f_0''(x_1) = f''(x_1)$

$x_0 = 0$ (8) $\quad U_0 = 0 \qquad R_0 + S_0 + T_0 + U_0 = 1$

$x_1 = 1$ $\quad U_1 = 1 \qquad R_1 + S_1 + T_1 + U_1 = 0$

$f_0'(0) = 1$ (9) $\quad T_0 = 1 \qquad 3R_1 + 2S_1 + T_1 = 0$

(10) $\quad$ ze (7) $\Rightarrow \quad 3R_0 + 2S_0 + T_0 = T$

(11) $\quad f_0''(x_1) = f_1''(x_1) \Rightarrow \quad 6R_0 + 2S_0 = 2S_1$

Z (10) $\Rightarrow \quad 3R_0 + 2S_0 + T_0 = y_1'$, $\quad T_1 = y_1'$

Z (8), (9) a (10) $\Rightarrow$ koeficienty pro funkce f_1'.

$R_0 = t'_1 - 1 = -\frac{5}{4} \qquad R_1 = y_1' + 2 = \frac{7}{4}$

(12) $\quad S_0 = -y_1' + 1 = \frac{5}{4} \qquad S_1 = -2y_1' - 3 = -\frac{5}{2}$

$T_0 = 1 \qquad T_1 = y_1'$

$U_0 = 0 \qquad U_1 = 1$

Z (12) $\Rightarrow$ (11) pro y_1':

$$6y_1' - 6 - 2y_1' + 2 = -4y_1' - 6 \quad \Rightarrow \quad y_1' = -\frac{1}{4}$$

Spline funkce tedy je

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ -\frac{7}{4}(x-1)^3 - \frac{5}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1) + 1 & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

4.3 Bézierovy křivky.

Cíl Po prostudování této kapitoly budete umět

- popsat a definovat Bézierovy křivky, jejich vlastnosti
- definovat B-spline křivky
- konstruovat Bézierovy a B-spline křivky.

Výklad

Nechť $[\underline{P}_i]_{i=0}^{m}$, m > 0 jsou polohové vektory vrcholů lomené čáry.

Bézierova křivka (BK) pro danou lomenou čáru je dána rovnicí:

R(t) =

$$\underline{R}(t) = \sum_{i=0}^{m} \underline{P}_i B_{im}(t), \text{ kde } t \in \langle 0,1 \rangle$$

$\underline{R}(t)$ je polohový vektor bodů křivky

a B_{im} jsou tzv. Bernsteinovy polynomy.

Tj. $B_{im}(t) = \binom{m}{i} \cdot t^i \, (1-t)^{m-i}$. Dodefinováno: $\binom{m}{0} = 1$ a $0^0 = 1$.

Zobrazení grafů Bernsteinových polynomů pro hodnoty:

BK pro

m = 1

$$\underline{R}(t) = \sum_{i=0}^{m} \underline{P}_i B_{im}(t) \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$B_{im}(t) = \binom{m}{i} \cdot t^i \, (1-t)^{m-i}$$

m = 2

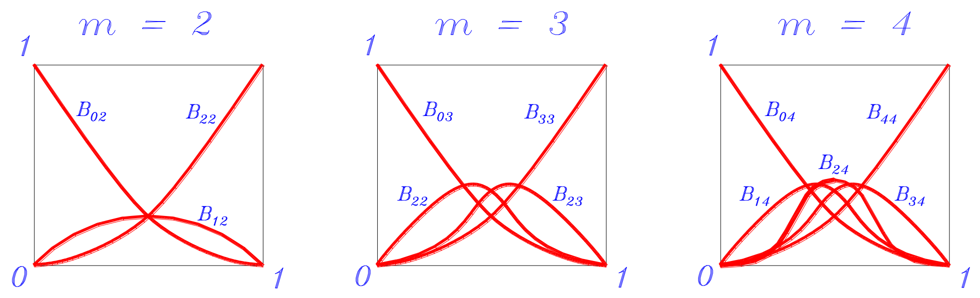
$$\underline{R}_2(t) = \underline{P}_0 \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 + \underline{P}_1 \binom{2}{1} t (1-t) + \underline{P}_2 \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0 =$$

$$= \underbrace{\underline{P}_0 (1-t)^2}_{B_{02}} + \underbrace{\underline{P}_1 2t(1-t)}_{B_{12}} + \underbrace{\underline{P}_2 t^2}_{B_{22}}$$

m = 3

$$\underline{R}_3(t) = \underline{P}_0\binom{3}{0}t^0(1-t)^3 + \underline{P}_1\binom{3}{1}t(1-t)^2 + \underline{P}_2\binom{3}{2}t^2(1-t) + \underline{P}_3\binom{3}{3}t^3(1-t)^0 =$$

$$= \underbrace{\underline{P}_0(1-t)^3}_{B_{03}} + \underbrace{\underline{P}_1 3t(1-t)^2}_{B_{13}} + \underbrace{\underline{P}_2 3t^2(1-t)}_{B_{23}} + \underbrace{\underline{P}_3 t^3}_{B_{33}}$$



Obr. 4.1

Na obrázku 4.1 jsou znázorněny polynomy pro jednotlivé stupně Bernsteinových polynomů.

4.3.1. Vlastnosti Bézierových křivek.

1. Počáteční a koncový bod oblouku výsledné křivky.

Pro $\underline{R}(0)$ . . . . $B_{0m}(0) = 1$ a $B_{im}(0) = 0$ pro i = 1, . . . , m =>

$\underline{R}(0) = \underline{P}_0$ ← počáteční bod.

Protože $B_{im}(1) = 0$ pro i = 0 , . . . , m-1 a $B_{mm}(1) = 1$ =>

$\underline{R}(1) = \underline{P}_m$ ← koncový bod polynomu i Bézierových křivek.

2. Tečné vektory BK v počátečních a koncových bodech.

Je zřejmé $$\underline{R}'(0) = \sum_{i=0}^{m} \underline{P}_i \underline{B}'_{im}(0)$$

Jelikož $$B'_{0m}(0) = \left[(1-t)\right]'_{t=0} = -m\,,$$

$$B'_{1m}(0) = \left[m.t.(1-t)^{m-1}\right]'_{t=0} = m$$

a $B'_{im}(0) = 0$ pro $i = 2, ..., m$

platí

$$\underline{\underline{R}'(0) = m\,.\,(\underline{P}_1 - \underline{P}_0)} \leftarrow \text{tečna v počátečním bodě}$$

a podobně

$$\underline{\underline{R}'(1) = m\,.\,(\underline{P}_m - \underline{P}_{m-1})} \leftarrow \text{tečna v koncovém bodě.}$$

4.3.2. Geometrická konstrukce bodů Bézierových křivek.

Pro jednoduchost zvolíme m = 3.

a) Zvolíme hodnotu parametru $t_0 \in <0,1>$.

b) Určíme body $^1P_1$, $^1P_2$ a $^1P_3$ na stranách řídicího polygonu tak, že

$$\frac{^1P_1\,P_0}{P_0\,P_1} = \frac{^1P_2\,P_1}{P_1\,P_2} = \frac{^1P_3\,P_2}{P_2\,P_3} = t_0$$

c) Určíme bod $^2P_2$ na přímce $^1P_2\,^1P_2$

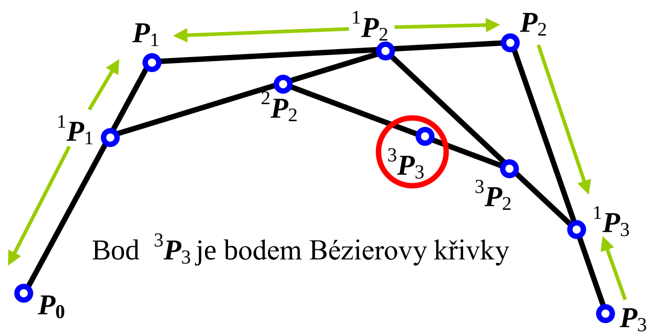
a bod $^3P_2$ na přímce $^1P_2\,^1P_3$ tak, že

$$\frac{^2P_2\,P_1}{^1P_1\,^1P_2} = \frac{^3P_3\,^1P_2}{^1P_2\,^1P_3} = t_0$$

d) Bod $^3P_3$ na přímce $^2P_2\,^3P_2$ splňující vztah

$$\frac{^3P_3\,^2P_2}{^2P_2\,^3P_3} = t_0$$

je bodem Bézierovy křivky pro parametr t_0.



Obr. 4.2

Příklad 3.

Určete Bézierovu křivku pro polygon $\underline{P}_0(0,0)$, $\underline{P}_1(10,15)$, $\underline{P}_2(20,15)$ a $\underline{P}_3(30,0)$.

Složky *R(t)* vektoru jsou:

$$x = 0.\mathrm{B}_{03}(t) + 10.\mathrm{B}_{13}(t) + 20.\mathrm{B}_{23}(t) + 30.\mathrm{B}_{33}(t) =$$
$$= 10.\binom{3}{1}t.\left(1-t^2\right) + 20.\binom{3}{2}t^2.(1-t) + 30.\binom{3}{3}t^3 =$$
$$= 30.\left(t - 2t^2 + t^3\right) + 60.\left(t^2 - t^3\right) = \underline{30t}$$

$$y = 0.\mathrm{B}_{03}(t) + 15.\mathrm{B}_{13}(t) + 15.\mathrm{B}_{23}(t) + 0.\mathrm{B}_{33}(t) =$$
$$= 15.\left(\mathrm{B}_{13}(t) + \mathrm{B}_{23}(t)\right) = 15.\left(3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t)\right) =$$
$$= 45.\left(t - 2t^2 + t^3 + t^2 - t^3\right) = \underline{45\left(t - t^2\right)}$$

Tedy parametrické vyjádření oblouku je *R(t)* = [30 *t* ; 45 (*t* - t^2)] pro $t \in <0, 1>$.

Příklad 4.

Určete Bézierovu křivku pro polygon $\underline{V}_1(0,0,0)$, $\underline{V}_2(1,1,0)$, $\underline{V}_3(0,1,1)$ a $\underline{V}_4$ (0,0,2).

$$x = 0.B_{03}(t) + 1.B_{13}(t) + 0.B_{23}(t) + 0.B_{33}(t) = 1.\binom{3}{1}.t.(t-1)^2 = 3.t.\left(t^2 - 2t + 1\right) = \underline{3t^3 - 6t^2 + 3t}$$

$$y = 0.B_{03}(t) + 1.B_{13}(t) + 1.B_{23}(t) + 0.B_{33}(t) = 3t^2 - 6t^2 + 3t + 3t.(t-1) = \underline{3t^3 - 3t^2}$$

$$z = 0.B_{03}(t) + 0.B_{13}(t) + 1.B_{23}(t) + 2.B_{33}(t) = 3.\binom{3}{2}.t^2(t-1) + 2.\binom{3}{3}.t^3.1 = 3t^3 - 3t^2 + 2t^3 = \underline{5t^3 - 3t^2}$$

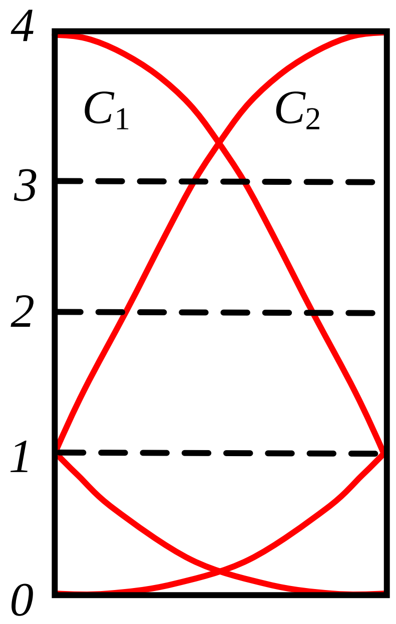
Tedy $\underline{R}(t) = \underline{\underline{\left[3t^3 - 6t^2 + 3t ; 3t^3 - 3t^2 ; 5t^3 - 3t^2\right]}}$ pro t $\in <0, 1>$.

4.4. Coonsova B-spline křivka

je zobecněním Bézierových křivek - dosahuje se interpolací křivky po obloucích.

Oblouk kubického Coonsova B-splinu je určen vektorovou rovnicí

$$\underline{R}(t) = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{3} \underline{P}_i C_i(t), \qquad t \in \langle 0,1 \rangle.$$



Obr. 4.4

a

$$C_0(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = (1-t)^3$$
$$C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4$$
$$C_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$
$$C_3(t) = 3t^3$$

Grafy bázových funkcí C_i (t) , i = 0,1,2,3, jsou na obrázku 4.3.

Základní vlastnosti Coonsova oblouku B-spline.

1) Počáteční a koncový bod oblouku: pro t = 0 dostaneme

C_0 (0) = C_2 (0) = 1, C_1(0) = 4, C_3 (0) = 0.

Tedy $\underline{R}(0) = \frac{1}{6}(\underline{P}_0 + 4\underline{P}_1 + \underline{P}_2) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\underline{P}_0 + \underline{P}_2) - \underline{P}_1\right] + \underline{P}_1.$

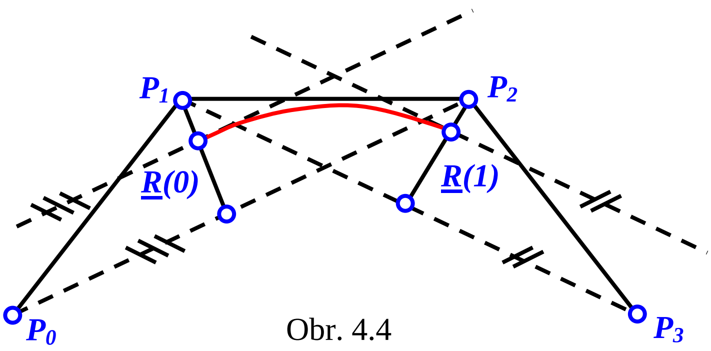
Počátek oblouku leží v bodě $\underline{R}$(0), který leží v jedné třetině délky těžnice trojúhelníka P_0 P_1 P_2 od bodu P_1 . Tento bod se nazývá "antitěžiště" trojúhelníka P_0 P_1 P_2 (Viz obrázek 4.4)

Pro t = 1 platí C_0 (1) = 0 , C_1 (1) = C_3 (1) = 1 a C_2 (1) = 4 tedy

$$\underline{R}(1) = \frac{1}{6}(\underline{P}_1 + 4\underline{P}_2 + \underline{P}_3) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\underline{P}_1 + \underline{P}_3) - \underline{P}_2\right] + \underline{P}_2.$$

Obdobně, koncovým bodem oblouku bude bod $\underline{R}(1)$, který leží v jedné třetině délky těžnice trojúhelníka P_1 P_2 P_3 od bodu P_2 . $\underline{R}(1)$ je tzv "antitěžištěm" trojúhelníka P_1 P_2 P_3.

2) Tečny v počátečním a koncovém bodě B-spline křivce.



Obr. 4.4

Určíme $\underline{R}'(0)$.

Platí: $C_0'(0) = -3$, $C_1'(0) = 0$, $C_2'(0) = 3$, $C_3'(0) = 0$.

Tedy $\underline{R}'(0) = \frac{1}{2}(\underline{P}_2 - \underline{P}_0).$

Tečna v bodě $\underline{R}'(0)$ je tedy rovnoběžná s přímkou P_0P_2 . Podobně lze ukázat, že tečna v bodě $\underline{R}(1)$ je rovnoběžná s přímkou P_1P_3 .

3. Porovnání Bézierovy a B-spline křivky pro daný polygon $\{\underline{P}_i\}_{i=0}^{m}$ pro $m \geq 3$.

Bézierova křivka je stupně m.

B-spline křivka je složena z m-2 oblouků.

(1. oblouk je určen body $\underline{P}_0$, $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$ a $\underline{P}_3$;

2. oblouk je určen body $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$, $\underline{P}_3$ a $\underline{P}_4$ atd. .....)

Nevýhodou B-spline křivky tedy je, že "neprochází" prvním ani posledním bodem zadaného polygonu $\underline{P}_0$, . . . , $\underline{P}_m$. Toto lze odstranit náhradním polygonem $\{\underline{Q}_i\}_{i=0}^{m}$.

Tento náhradní polygon musíme určit tak, aby se B - spline křivka pro tento náhradní polygon dotýkala původního polygonu v počátečním a koncovém bodě původního polygonu.

pro m = 4, bude platit

$$\underline{Q}_0 = \underline{P}_2 + 6(\underline{P}_0 - \underline{P}_1),$$

$$\underline{Q}_1 = \frac{3}{2}\underline{P}_1 - \frac{1}{2}\underline{P}_2, \qquad \left\{ = \underline{P}_1 + \frac{1}{2}(\underline{P}_1 - \underline{P}_2) \right\}$$

$$\underline{Q}_m = \underline{P}_{m-2} + 6(\underline{P}_m - \underline{P}_{m-1}),$$

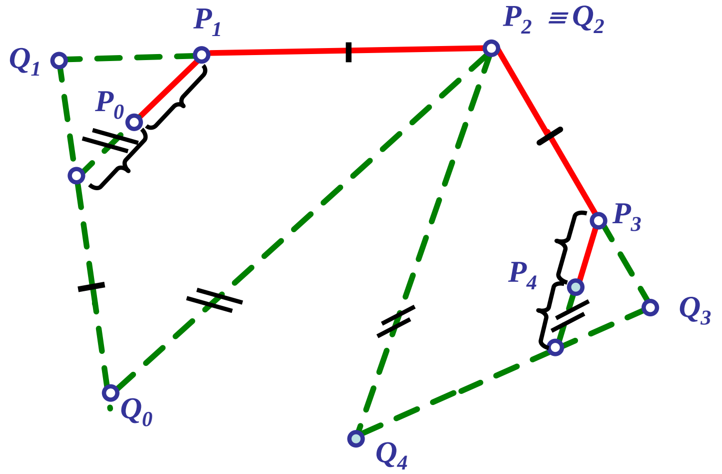
$$\underline{Q}_{m-1} = \frac{3}{2}\underline{P}_{m-1} - \frac{1}{2}\underline{P}_{m-2} \qquad \left\{ = \underline{P}_{m-1} + \frac{1}{2}(\underline{P}_1 - \underline{P}_{m-2}) \right\}$$

pro další vrcholy bude platit $\underline{Q}_i = \underline{P}_i$, pro i = 2 , . . . , m-2 .

pro m = 3 určíme náhradní polygon body (Obr. 4.5).

$$\underline{Q}_1 = 2\underline{P}_1 - \underline{P}_2, \qquad \underline{Q}_2 = 2\underline{P}_2 - \underline{P}_1,$$

$$\underline{Q}_0 = \underline{Q}_2 + 6(\underline{P}_0 - \underline{P}_1), \quad \underline{Q}_3 = \underline{Q}_1 + 6(\underline{P}_3 - \underline{P}_2).$$



Obr. 4.5

V následujícím programu je řešení Coonsovy B-spline křivky, která prochází počátečním a koncovým bodem. Jde o způsob, kdy je vypracována obecná procedura pro čtyři různé body *A, B, C* a *D*. Procedura je aplikována postupně na všechny zadané body tak, že vyvolána pro (*A, A, A, B*) ... první zadaný bod křivky je vzat 3-krát. Antitěžiště "trojúhelníka" *AAA* je bod *A*, je to tedy počáteční bod křivky. Dále je procedura vyvolána pro body (*A, A, B, C*) ... první zadaný bod křivky je vzat 2-krát. Spojnice bodů *A* a *B* je tečnou křivky. Dále je procedura aplikována až (n-2)-ho zadaného bodu. Následuje obdobný postup s tím, že jsou ztotožňovány poslední dva body. Z výpisu možného programového řešení je postup zřejmý.

```
procedure Coons (A, B, C, D: Bod);
  const Krok = 0.1;
  var   X, Y, XX, YY   : integer;
        T1, T2, T3, T4 : real;
         t             : real;
        SqrT, SqrTdec1 : real;
  begin
    t := 0;
    SqrTdec1 := sqr (1-t);                {přípravný přepočet}
    SqrT     := sqr (t);
    T1 := SqrTdec1*(1-t) / 6;             {Řídící funkce}
    T2 := (3*SqrT*t - 6*SqrT + 4) / 6;
    T3 := (-3*SqrT*t + 3*SqrT + 3*t + 1) / 6;
    T4 := SqrT*t / 6;
    XX := round (A.X*T1 + B.X*T2 + C.X*T3 + D.X*T4);
    YY := round (A.Y*T1 + B.Y*T2 + C.Y*T3 + D.Y*T4);
while t <= 1 do
      begin
       t := t + Krok;
       SqrTdec1 := sqr(t-1);
       SqrT     := sqr(t);
       T1 := SqrTdec1*(1-t) / 6;
       T2 := (3*SqrT*t - 6*SqrT + 4) / 6;
       T3 := (-3*SqrT*t + 3*Sqrt + 3*t + 1) / 6;
```

```
    T4 := SqrT*t / 6;                              {spočítej nové body}
    X := round (A.X*T1 + B.X*T2 + C.X*T3 + D.X*T4);
    Y := round (A.Y*T1 + B.Y*T2 + C.Y*T3 + D.Y*T4);
    put_line (XX, YY, X, Y);   {kresba úsečky ze starého bodu do bodu nového}
    XX := X; YY := Y;                              {uchování předchozí pozice}
   end                        {while}
 end;          {Coons}
```

Programové řešení.

```
procedure B_Spline (P: Body; N: byte);
 { vstupem je pole bodů   P[1...N]   řídícího polygonu }
 var i: byte;
 begin
   Coons (P[1], P[1], P[1], P[2]);  { z trojnásobného bodu do spojnice P1, P2 }
   Coons (P[1], P[1], P[2], P[3]);             { dále z tohoto bodu do antitěžiště }
  for i := 1 to N-3 do                          { po třech se navazují oblouky }
      Coons (P[i], P[i+1], P[i+2], P[i+3]);
   Coons( P[N-2], P[N-1], P[N], P[N]);          { analogicky na konci křivky }
   Coons( P[N-1], P[N], P[N], P[N])             { konec v trojnásobném bodu }
 end;            {B_Spline}
```

Příklad 5.

Určete kubický Coonsův B-spline k polygonu, který je náhradním polygonem příkladu 1.

Polygon je dán body $\underline{P}_0(0, 0)$, $\underline{P}_1(10, 15)$, $\underline{P}_2(20, 15)$ a $\underline{P}_3(30, 0)$.

Protože m = 3 dostaneme:

$$\underline{Q}_1 = 2\underline{P}_1 - \underline{P}_2 = (0{,}15)\ ,\ \underline{Q}_2 = 2\,\underline{P}_2 - \underline{P}_1 = (30{,}15),$$

$$\underline{Q}_0 = \underline{Q}_2 + 6(\underline{P}_0 - \underline{P}_1) = (-30, -75)$$

a

$$\underline{Q}_3 = \underline{Q}_1 + 6(\underline{P}_3 - \underline{P}_2) = (60, -75).$$

Pro polygon $\underline{Q}_1$, $\underline{Q}_2$, $\underline{Q}_3$ stanovíme kubickou Coonsovu B-spline křivku. Jestliže rozepíšeme uvedené vztahy do složek, dostaneme rovnice

$$x = 30\,t\ ; \qquad y = 45\,(t - t^2\,).$$

Při použití náhradního polygonu jsme dostali stejné vyjádření, jako je výsledná křivka (Fergusonova) pro body $\underline{P}_0$ a $\underline{P}_3$ a tečné vektory 3 ($\underline{P}_1$- $\underline{P}_0$) a 3 ($\underline{P}_3$ - $\underline{P}_2$).

Úlohy k řešení 4.

1. Určete prostorovou Fergusonovu křivku pro body $\underline{G}$ = (0, 0, 0), $\underline{H}$ = (1,0,0) a tečné vektory $\underline{g}$ = (0, 0, 1), $\underline{h}$ = (1, 1, 1). Proveďte promítací metodou, kde je možno volit úhel pohledu. Zobrazte jeden pomocný průmět prostorové křivky do některé z rovin (x,y) nebo (y,z).

2. Určete kubickou spline funkci pro opěrné body (0,0), (1,1) a (2,0) a hodnoty druhých derivací y'' = 5/2 a y'' = -10/2.

3. Stanovte rovnice rovinné Bézierovy křivky o vrcholech řídicího polygonu (0,0), (1,3), (2,2), (3,3), (4,0).

Kontrolní otázky 4.

1. Dejte příklad použití Bézierových křivek. Co je Bézierova křivka?
2. Křivky určené lomenou čarou. Bézierovy křivky, princip, zadání.
3. B-spline křivky - Bézierovy křivky. Porovnejte.