3. KŘIVKY A PLOCHY

Cíl Po prostudování této kapitoly budete umět

- definovat interpolační a aproximační křivky pro dané body
- definovat plochy z daných prvků
- aplikovat křivky a plochy na praktických příkladech

Výklad

Úvod

V této kapitole budete seznámeni s křivkami a plochami, které se využívají jednak v technické praxi a dále pro potřeby počítačové grafiky. V technické praxi jde především o rovinné křivky, které vyjadřují určitý děj. Může jít o fyzikální děj - změna teploty, změna tvaru, vývoj populace a pod. V těchto případech je požadovaná křivka vyjádřena zadanými body, které jsou uspořádány. Zadavatel požaduje proložit těmito body křivku pro potřebu zjištění hodnot mezi jednotlivými měřeními. Jako příklad je možno uvést měření teplot počasí. Teploty se odečítají v určitém časovém intervalu. Jestliže se berou v úvahu teploty na jedné stanici, lze měřenými body proložit interpolační křivku, která právě těmito body bude procházet. Jestliže se berou měřené hodnoty z více stanic, nelze proložit interpolační křivku, která bude procházet měřenými body, ale je nutno najít aproximační křivku, která se bude měřeným bodům co nejlépe přibližovat. Jestliže zadavatel má představu, jaká funkce vyjadřuje příslušný chemický, fyzikální je použita metoda nejmenších čtverců pro nalezení hledané křivky na danou funkci. Nemáme-li žádný poznatek o daném ději, je nutno vybírat z více funkcí a použít tu funkci, kde rozdíl mezi měřenými hodnotami a teoretickými je nejmenší.

Další aplikace rovinných křivek v počítačové grafice jsou křivky, kde záleží na tvaru a vlastnostech křivek a nejde zde o křivky, které vyjadřují nějaký děj. Na příklad fonty, výtvarné křivky, a pod. Pro tyto křivky jsou většinou zadány body, kterými křivky procházejí nebo neprocházejí, ale jsou těmito body řízeny. Dalším požadavkem bývá spojitost, křivost křivky a pod. Do této skupiny křivek patří Fergusnovy, Bézierovy a Coonsovy křivky.

V oblasti strojní jsou důležité tzv. kinematické křivky, které vznikají skládání pohybů (rotační, posun). Jsou to cykloidy, konchoidy, spirály a pod. Tyto křivky, stejně jako Nurbsy nejsou obsahem tohoto předmětu. Jsou v obsahu volitelných předmětů z počítačové grafice.

3.1. Rovinné křivky

Pro pochopení křivek a ploch , které se používají v počítačové grafice je nutné připomenout některé kapitoly matematiky resp. geometrie.

Nejprve připomenutí základních způsobů zadání a vyjádření křivek.

a) **Explicitní rovnice** $y = f(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$.

Příklad: $y = x^2 + x + 1$ . . . jde o parabolu . . .

Poznámka: Pozor na definiční obor funkce *f(x)* .

Na příklad řetězové funkce.

$y = \dfrac{1}{a + f(x)}$, *kde* $f(x) = \dfrac{1}{a + g(x)}$.... je nutno řešit případ jmenovatelů zlomků, které musí být různé od nuly.

b) **Parametrické rovnice**.

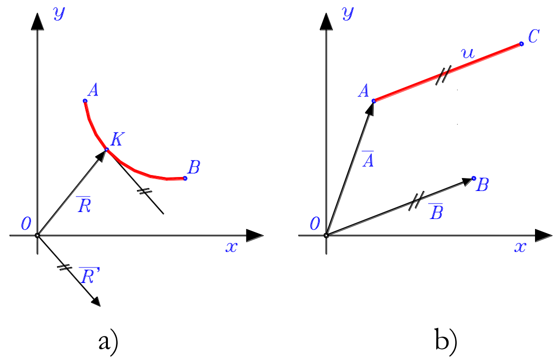
$x = x(t)$ (3.1)

$y = y(t)$, kde $a \le t \le b$

Jde o parametrické vyjádření dráhy pohybujícího se bodu.

Tento bod má časové souřadnice

$x(t)$ a $y(t)$.



Obr. 3.1

Příklad 1: Jsou dány parametrické rovnice:

$x = r * \cos(t)$ jde o kružnici se středem v počátku a poloměrem *r*.

$y = r * \sin(t)$, kde $0 \le t \le 2\pi$.

S rostoucím *t* - úhlem jsou zobrazeny body kružnice.

c) **Vektorová rovnice.**

$\underline{R} = \underline{R}(t)$, $a \le t \le b$.

↑ polohový vektor $\overline{OK}$.

Jde o symbolický zápis vlastních parametrických rovnic (3.1a).

Vektorová rovnice $\underline{R}(t)$ je dána vztahem:

$\underline{R}(t) = (x(t), y(t))$

derivaci $d\underline{R} / dt$ . . . označíme $\underline{R}'(t)$.

$\underline{R}'(t) = (x'(t), y'(t))$ $\longleftarrow$ vektor je rovnoběžný s tečnou v bodě K.

Lineární vektorová funkce: $\underline{R}(t) = \underline{A} + \underline{B} * t$,

kde $0 \le t \le 1$ určuje úsečku, která vznikne posunutím úsečky $\overline{OA}$.

Počáteční bod je $A(t = 0)$, koncový je bod $C(t = 1)$. (Obr. 3.1b)

3.2. Prostorové křivky

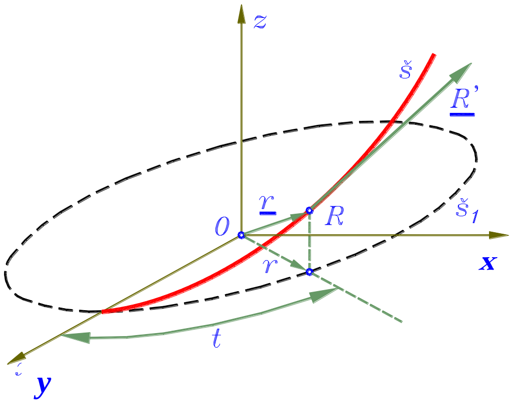
Zadání a vyjádření je obdobné jako v rovině.

Je přidán 3. rozměr.

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$, kde $a \le t \le b$.



Příklad 2: Zobrazte jeden závit šroubovice.

Poloměr řídící kružnice je r a výška závitu $\mathbf{v}_0$.

(V kosoúhlém promítání $\alpha = 120^{\circ}$, q = 0.7.)

$x = r * \cos(t)$

$y = r * \sin(t)$

$z = v * t$, kde $0 \le t \le 2\pi$, $v_0 \ne 0$.

(Proveďte pro r = 150, v = 20. Zobrazte jeden závit a souřadnicové osy promítání a řídící kružnice v rovině (x, y) a v rovině $z = v$. Výška zavitu šroubovice $v = v_0 * 2\pi$.)

Vektorová rovnice křivky.

Obdobně jako v rovině u přímky (úsečky) má obecný zápis tvar:

$\boldsymbol{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$.

Derivace (tečna):

$\boldsymbol{R}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

$\boldsymbol{R}'$ je tečný vektor v obecném bodě $K(x(t), y(t), z(t))$ křivky.

Pro zobrazení prostorové křivky je vhodné zobrazit mimo hlavní průmět prostorové křivky, ještě další (pomocný) průmět do souřadnicové roviny. Na obrázku 3.2 je zobrazen kosoúhlý průmět šroubovice $š$. Pro lepší názornost jsou zobrazeny souřadnicové osy x, y a z a první průmět $š_1$ šroubovice $š$. Zobrazení prvního průmětu prostorové křivky a souřadnicových os je pro názornost nezbytná.

Příklad 3:

Určete vektorovou rovnici úsečky AB pro jednotlivé proměnné dané polohovými vektory bodů $A\,(x_A, y_A, z_A)$ a $B\,(x_B, y_B, z_B)$.

Vektorová rovnice má tvar $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} * (1- t) + \boldsymbol{B} * t$,

kde bod A (pro $t = 0$) je počáteční bod a B (pro $t = 1$) je koncový bod.

Parametrické rovnice tedy jsou:

$$x = x_A * (1 - t) + x_B * t$$
$$y = y_A * (1 - t) + y_B * t$$
$$z = z_A * (1 - t) + z_B * t \quad \text{pro} \quad 0 \le t \le 1 .$$

3.3. Plochy

V matematice a geometrii jsme plochy vyjadřovali převážně v explicitní formě

$$z = f(x, y) .$$

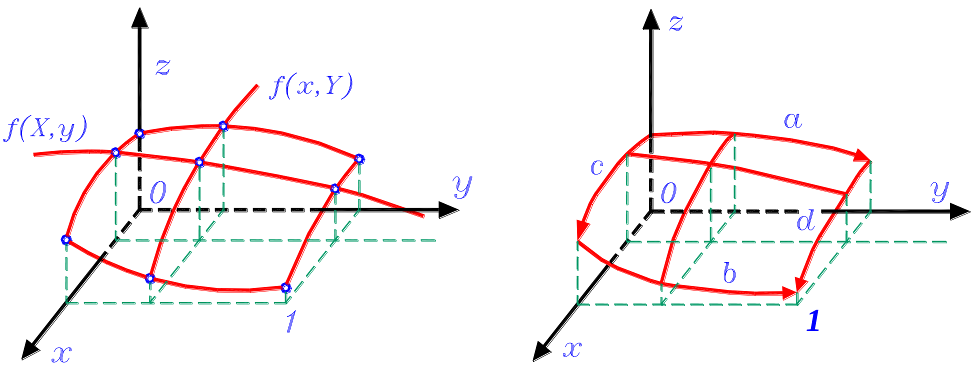
Plocha je "grafem" funkce dvou proměnných. Plochu "vytvoříme" tím, že vykreslíme řezy této plochy rovinami, nejčastěji rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami.

Nebo-li $z = f(X, y)$ . . . řez rovinou // $s(y, z)$

$z = f(x, Y)$ . . . řez rovinou // $s(x, z)$.

Plocha na obrázku 3.3 je omezena rovinami $x = 0;\ x = 1;\ y = 0;\ y = 1.$

Na obrázku 3.3 jsou to křivky $f(x,Y)$ rovnoběžné s rovinou (x, z) a křivky $f(X,y)$ rovnoběžné s rovinou (y, z).



Obr. 3.3

Při volbě jednoho z parametrů x resp. y dostaneme "parametrické" rovnice křivek plochy.

Pro $x \in (a, b),\ y \in (c,d)$ dostaneme "okrajové" křivky plochy.

Parametrické rovnice: $x = x(u, w) \quad (a < u < b)$

$y = y(u, w) \quad (c < w < d)$

$z = z(u, w)$.

Na příklad: Parametrické rovnice - pro OTÁČENÍ + POSUV (šroubový pohyb) jsou:

$x = f(w) * \cos(u) - g(w) * \sin(u)$

$y = f(w) * \sin(u) + g(w) * \cos(u)$ .... otáčení okolo osy z (3.2)

$z = h(w) + v * u$ ...... posun ve směru osy z pro

$0 \leq w \leq 1,\ 0 \leq u \leq \pi/2, v \neq 0$

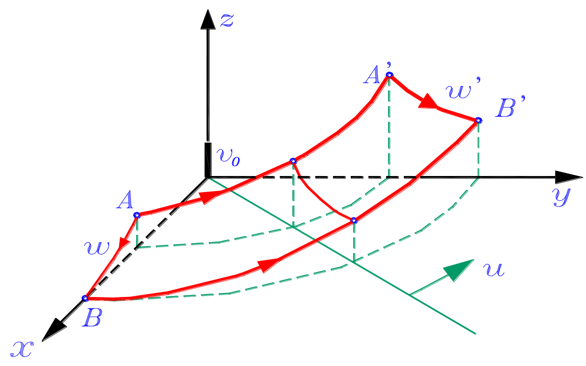
Šroubová plocha je tvořená šroubovým pohybem křivky k. (Obr. 3.4)

Kde $x = f(w)$,

$y = g(w)$,

$z = h(w)$, $0 \leq w \leq 1$.

Zobrazení ploch je možné v podstatě dvojím způsobem. Častější zobrazování ploch je tzv. "drátěný model". Jde o křivky na ploše, které jsou buď rovinné řezy nebo křivky vzniklé rotačním resp. šroubovým pohybem bodů tvořící křivky.



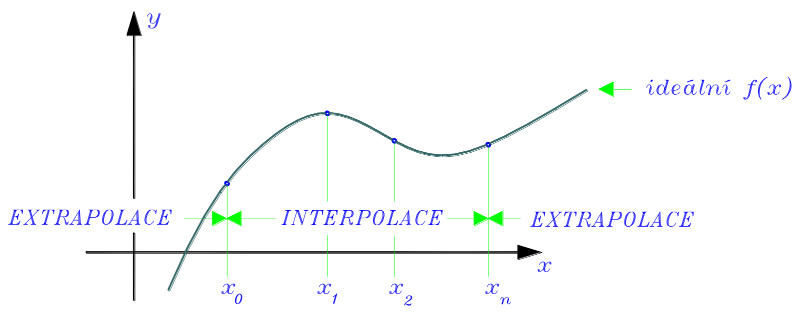
Obr. 3.4

3.4. Rovinné křivky

V technické praxi jsou velice často řešeny úlohy typu: jsou dány body v rovině a je třeba těmito body proložit křivku, která prochází přesně těmito body, nebo prochází v minimální blízkosti těchto bodů. Křivkám, které procházejí přesně zadanými body se nazývají **interpolační** křivky.

Křivky, které procházejí v minimální blízkosti zadaných bodů se nazývají **aproximační.**

Výpočet hodnot f(x) uvnitř intervalu křivky vyjádřené **analytickým** předpisem se nazývá **interplolací** křivky. Výpočet mimo interval měřených hodnot se nazývá **extrapolací**. (Obr. 3.5)

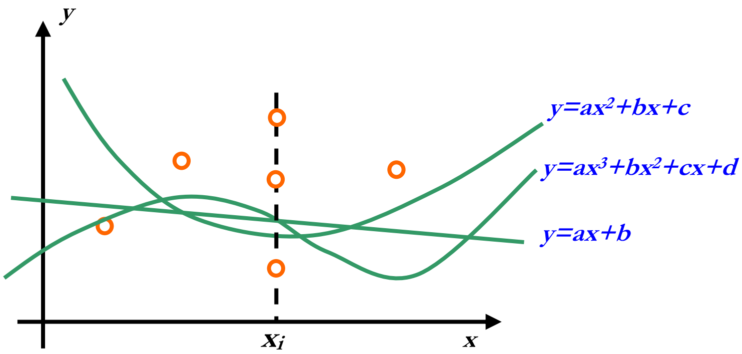


Obr. 3.5

Na obrázku č. 3.5 je interpolační křivka zadaná body v intervalu < x_0 , x_n >. V tomto intervalu křivka dané body interpoluje, mimo tento interval křivka extrapoluje .

REGRESNÍ (aproximační) křivka prochází s určitou přesností danými měřenými body. Na obrázku 3.6 je ukázka aplikace aproximačních křivek na zadané body. Aproximační křivky jsou : přímka, parabola a kubická parabola.

Na obrázku 3.6 jsou zobrazeny aproximační křivky, které aproximují čtyři zadané body v rovině. Jde o křivky 1., 2. a 3. stupně.



Obr. 3.6

Co rozhoduje o kvalitě aproximační křivky? 1. Požadavek na stupeň křivky. Jsou-li dány více než dva obecné body - prvky, nelze aproximovat přímkou.

2. Jestliže pro jednu nezávisle proměnnou máme více naměřených hodnot. Na obrázku 3.6 hodnotě x_i odpovídají tři naměřené hodnoty.

Příklad 4:

Určete aproximační křivku pro body $P_0\ (0\ ,\ 0)$, $P_1\ (1\ ,\ 2)$, $P_2\ (3\ ,\ 3)$.

Obecná rovnice přímky (křivky)

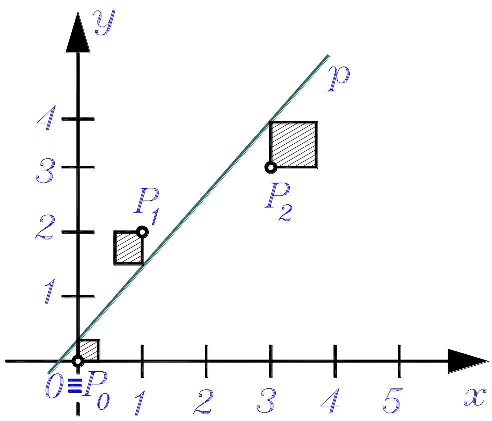
$f(x) = a_0\, x + a_1$ tak, aby kvadratická odchylka byla minimální.

Je třeba určit koeficienty a_0 , a_1 = ?

$$a_0 \cdot x + a_1 = y$$

Pro : : : :

$$P_0 \ldots \quad (a_0 \cdot 0 + a_1 - 0)^2 = a_1^2$$
$$P_1 \ldots \quad (a_0 \cdot 1 + a_1 - 2)^2 = (a_0 + a_1 - 2)^2$$
$$P_2 \ldots \quad (a_0 \cdot 3 + a_1 - 3)^2 = (3a_0 + a_1 - 3)^2$$



Obr. 3.7 .

Určíme minimum funkce

$$\delta_2(a_0, a_1) = a_1^2 + (a_0 + a_1 - 2)^2 + (3 \cdot a_0 + a_1 - 3)^2$$

Extrahujeme nulové 1. parciální derivace :

$$\frac{\delta\sigma_2}{\delta a_0} = 2(a_0 + a_1 - 2) + 2(3a_0 + a_1 - 3) \cdot 3 = 0 \qquad (3.4)$$

$$\frac{\delta\sigma_2}{\delta a_1} = 2a_1 + 2(a_0 + a_1 - 2) + 2(3a_0 + a_1 - 3) = 0 \qquad (\ 3.5\ )$$

Z (3.4) a (3.5) plyne : $\left.\begin{array}{r} 10a_0 + 4a_1 = 11 \\ 4a_0 + 3a_1 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow a_0 = \frac{13}{14}\,;\, a_1 = \frac{3}{7}$.

Aproximační - lineární - funkce (dle metody **nejmenších čtverců**) je tedy :

$$f(x) = \frac{13}{14}x + \frac{6}{14} \ .$$

Graf této funkce <u>nemusí</u> procházet zadanými pevnými body.

3.4.1. Interpolace algebraickým polynomem

Interpolační polynom pro (n+1) daných bodů

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ je předepsáno (n + 1) podmínek.

Nechť $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n$ a jsou dány body $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$.

To je pro jednu hodnotu x_i nezávisle proměnné je jedna hodnota y_i :

$$p_n(x_i) = y_i \,, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (3.6)$$

Pak existuje právě <u>jeden</u> interpolační polynom p_n (x) stupně nejvýše <u>n</u>.

Příklad 5:

Pro body (0 ,0) , (1 , 2) , (3 , 3) určete interpolační polynom.

Interpolační polynom bude stupně 2. ve tvaru: $p_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$

Po dosazení (viz (6)) dostaneme soustavu:

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 9a_0 + 3a_1 + a_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_0 = -\frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = \frac{5}{2} \quad , \quad a_2 = 0 \ .$$

Interpolační polynom je tedy ve tvaru $p_2(x) = -0.5x^2 + 2.5x$

Výpočet tedy vede na řešení soustavy lineárních rovnic.

Zobecněním lze odvodit tzv. **Lagrangeův tvar interpolačního polynomu.**

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}} \qquad (3.7)$$

Ověřte na příkladu bodů P_0 (0 , 0), P_1 (1 , 2), P_2 (3 , 3) .

Bude platit n = 2.

$$p_2(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Po výpočtu:

$$0\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(-1)\cdot(-3)}+2\cdot\frac{x\cdot(x-3)}{1\cdot(-2)}+3\cdot\frac{x\cdot(x-1)}{3\cdot 2}= -x^2+3x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x= \underline{-0.5x^2+2.5x}\ .$$

Jestliže pro zadané hodnoty $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ platí x_{i+1} - x_i = konstanta $\Rightarrow$ i = 0, 1, ..., n - 1 $\Rightarrow$ tabulka hodnot je ekvidistantní, je zde možno použít tzv.

Newtonova tvaru interpolačního polynomu.

$$\boxed{p_n(x)=y_0+\sum_{i=1}^{n}\Delta^i y_0\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})}{i!\cdot h^i}} \qquad (3.8)$$

Obecně bude platit:

K výpočtu se používá diferencí vpřed v dané tabulce.

Tyto diference jsou dány takto :

a) $\Delta^0 y_i = y_i$ (nultá diference je rovna funkční hodnotě);

b) $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

c) $\Delta^k y_i = \Delta\left(\Delta^{k-1} y_i\right)$.

Příklad 6: Pro zadanou tabulku hodnot sestavte interpolační polynom.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	5	1	3	4	0	1

Tabulka je ekvidistantní a krok h = 1.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	5	1	3	4	0	1
i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	5	-4	6	-7	3	11
1	1	2	-1	-4	14	
2	3	1	-5	10		
3	4	-4	5			
4	0	1				
5	1					

V tabulce jsou uvedeny diference vpřed a pomocí (3.8) můžeme psát :

$$p_5(x) = 5 + (-4)\cdot\frac{x+2}{1!} + 6\cdot\frac{(x+2)(x+1)}{2!} + (-7)\cdot\frac{(x+2)(x+1)x}{3!} + 3\cdot\frac{(x+2)(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{4!} +$$
$$+11\cdot\frac{(x+2)(x+1)\cdot x\cdot(x-1)(x-2)}{5!} = \frac{1}{120}\left(360 + 334x - 75x^2 - 165x^3 + 15x^4 + 11x^5\right).$$

Pro cvičení: vykreslete graf a vyznačte zadané vstupní hodnoty.

3.4.2. Hermitova interpolace vychází ze zadaných bodů

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ a hodnot derivací $y_0', \ldots, y_n'$ v jednotlivých bodech.

Lze dokázat, že existuje právě jeden polynom $h(x)$ stupně nejvýše $2n + 1$ tak, že

$$h(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n \tag{3.9}$$

a

$$h'(x_i) = y_i', \quad i = 0, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Příklad: Napište Hermitův interpolační polynom daný tabulkou:

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	0	16
y_i'	-1	-4	92

Platí $n = 2$, tedy polynom $h(x)$ bude stupně nejvýše 5.

Je nutno tedy určit koeficienty $a_0, \ldots, a_5$ polynomu

$$h(x) = a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$$

Z (3.9) a $x = 0 \Rightarrow$ $a_0 \,.\, 0 + a_1 \,.\, 0 + a_2 \,.\, 0 + a_3 \,.\, 0 + a_4 \,.\, 0 + a_5 = 1$

pro $x = 1 \Rightarrow$. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$

pro $x = 3 \Rightarrow$. $243\,a_0 + 81a_1 + 27\,a_2 + 9\,a_3 + 3\,a_4 + a_5 = 16$

Z (3.10) ($h(x)' = 5a_0 x^4 + 4\,a_1 x^3 + 3a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4$) a

pro $x = 0 \Rightarrow$ $a_4 = -1$

pro $x = 1 \Rightarrow$ $5\,a_0 + 4a_1 + 3\,a_2 + 2\,a_3 + a_4 = -4$

pro $x = 3 \Rightarrow$ $405\,a_0 + 108a_1 + 27\,a_2 + 6\,a_3 + a_4 = 92$

Řešením soustavy dostaneme:

$a_0 = 1$; $a_1 = -3$; $a_2 = 0$; $a_3 = 2$; $a_4 = -1$; $a_5 = 1$. $\Rightarrow$
Hermitův polynom tedy je: $\boldsymbol{h(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1}$

Obecné odvození HP pro $n = 1$.

Jsou dány body $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ a y_0' a y_1'.

HP: $h(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad \Rightarrow$

$$a_0 x_i^3 + a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 = y_i \qquad i = 0, 1 \tag{3.11}$$

$$3a_0 x_i^2 + 2a_1 x_i + a_2 = y_i' \qquad i = 0, 1 \tag{3.12}$$

Rovnice (3.11) a (3.12) jsou vlastně soustavou 4 lineárních rovnic s koeficienty

$$a_0 , a_1 , a_2 , a_3 .$$

Provedeme řešení pro $x_0 = 0$ a $x_1 > 0$. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{lrl}
x_0 = 0 \text{ a (3.11)} \Rightarrow & a_3 & = y_0 \\
x_1 > 0 \text{ a (3.11)} \Rightarrow & x_1^3 a_0 + x_1^2 a_1 + x_1 a_2 + a_3 & = y_1 \\
x_1 = 0 \text{ a (3.12)} \Rightarrow & a_2 & = y_0' \\
x_1 > 0 \text{ a (3.12)} \Rightarrow & 3 x_1^2 a_0 + 2x_1^2 a_1 + a_2 & = y_1'
\end{array}\right\} \qquad (3.13)$$

2. rovnici z (3.13) násobíme třemi .

4. rovnici z (3.13) násobíme x_1 $(x_1 > 0)$ a odečteme od rovnice dvojku. $\Rightarrow$

$$x_1^2 a_1 + 2x_1 a_2 + 3a_3 = 3y_1 - x_1 y_1' \ . \qquad \Rightarrow$$

po dosazení do druhé rovnice z (3.13) vypočteme

$$a_1 = \frac{3(y_1 - y_0)}{x_1^2} - \frac{y_1' + 2y_0'}{x_1}$$

$$a_0 = \frac{2(y_0 - y_1)}{x_1^3} + \frac{y_1' + y_0'}{x_1^2} \ .$$

Obecně pro případ $x_0 > 0$, $x_1 > x_0$ pro body (x_0 , y_0) , (x_1 , y_1) a derivace y_0' a y_1' můžeme psát Hermitův polynom ve tvaru:

$$\boxed{\begin{array}{l}
h(x) = a_0 (x - x_0)^3 + a_1 (x - x_0)^2 + a_2 (x - x_0) + a_3 \ \text{, kde} \\[2ex]
a_0 = \dfrac{2(y_0 - y_1)}{k^3} + \dfrac{(y_0' + y_1')}{k^2} \\[2ex]
a_1 = \dfrac{3(y_1 - y_0)}{k^2} - \dfrac{2y_0' + y_1'}{k} \\[2ex]
a_2 = y_0' \quad , a_3 = y_0 \quad \text{a} \quad k = x_1 - x_0
\end{array}} \qquad (3.14)$$

Příklad 7: Z tabulky (předcházejícího příkladu)

Tab. : 1

i	0	1
x_i	0	1
y_i	1	0
y_i'	-1	-4

Tab. : 2

i	1	2
x_i	1	3
y_i	0	16
y_i'	-4	92

Z (3.12) plyne:

$$^{\circ}k = 1$$
$$^{\circ}a_3 = 1$$
$$^{\circ}a_2 = -1$$
$$^{\circ}a_1 = 3(1-0)+(-1)+(-4) = 3$$
$$^{\circ}a_0 = 2(1-0)+(-1)+(-4) = -3$$
$$^{\circ}h(x) = -3x^2 + 3x^2 - x + 1$$

(pro x ≤ 1)

$$^{1}k = 2$$
$$^{1}a_3 = 0$$
$$^{1}a_2 = -4$$
$$^{1}a_1 = \frac{3(16-0)}{2^2} - \frac{2(-1)+92}{2} = -30$$
$$^{1}a_0 = \frac{2(0-16)}{2^3} - \frac{-4+92}{2} = 18$$
$$^{1}h(x) = 18(x-1)^3 - 30(x-1)^2 - 4(x-1)$$

(pro x ≥ 1).

3.4.3. Fergusonovy křivky.

Jestliže jsou dány dva body s tečnými vektory v nich a užijeme Hermitovu interpolaci na složky vektorového vyjádření křivky pro jednotkovou změnu parametru na obloucích, získáme tzv. **Fergusonovy křivky.** Mohou být i třídimenzionální.

Ve vztahu (3.14) pro k = 1 obecně:

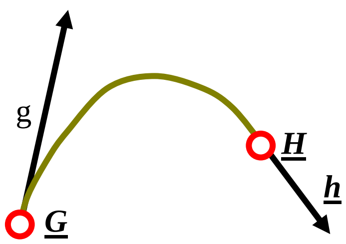
$$\underline{R}(t) = F_0(t)\cdot\underline{G} + F_1(t)\cdot\underline{H} + F_2(t)\cdot\underline{g} + F_3(t)\cdot\underline{h} \qquad \text{pro } t \in \langle 0 , 1 \rangle .$$

$\underline{G}$, $\underline{H}$ . . . polohové vektory bodů;

$\underline{g}$, $\underline{h}$ . . . vektory tečen v bodech, ve kterých je Fergusonova křivka jednoznačně určena.

Pro F_i , $i = 0, 1, 2, 3$ platí :

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$F_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$
$$F_3(t) = t^3 - t^2 \qquad t \in \langle 0 , 1 \rangle .$$



Pro $t = 0$ . . . $\underline{R}(t) = \underline{G}$; pro $t = 1$ . . . $\underline{R}(t) = \underline{H}$

Pro $\underline{g} = \underline{h}$ . . . $\underline{GH}$ je aproximováno úsečkou.

3.4.4. Interpolace po obloucích.

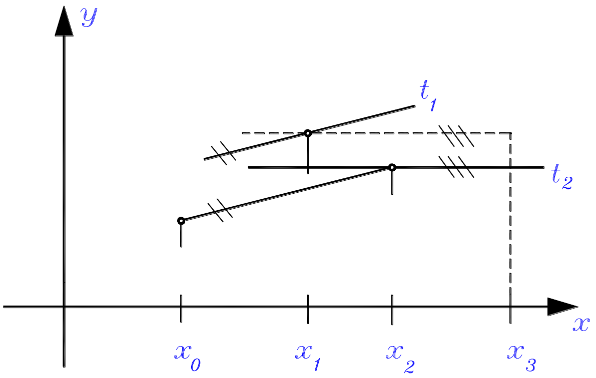
Častým případem zadání křivky jsou pouze body s tím, že je možné křivku vykreslit po částech. Změnou parametru se mění pouze křivka v určitém intervalu a nikoliv na celém zadaném intervalu. Na rozdíl o Lagrangeovy resp. Newtonovy interpolace, kde změnou jediného parametru v daném bodě, se změnila křivka na celém intervalu. Tento způsob interpolace, tak kde je to možné, je v počítačové grafice často využívána. Je však nutno zachovat spojitost křivky. Spojitost křivky zajistíme tak, že vypočítáme nebo zadáme tečny v zadaných bodech. Je tedy třeba znát derivaci v jednotlivých bodech.

Snaha je o co nejednodušší výpočet - rychlost výpočtu. Pro přesnější vykreslení křivek je složitější výpočet a tím delší čas výpočtu.

Výpočet tečen v opěrných bodech.

Jestliže pro funkci známe (n + 1) opěrných bodů a chceme využít interpolace po obloucích, kde jednotlivé oblouky jsou popsány polynomy třetího stupně, je možné využít HP, jestliže v těchto opěrných bodech vypočteme

$y_0', y_1', \dots, y_n'$.



Obr. 3.8

K určení derivací $y_1', y_2', \dots, y_{n-1}$

použijeme vzorce
$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \,. \qquad (3.15)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ (Obr. 3.8)

Z geometrického hlediska budeme předpokládat, že tečna v daném bodě grafu bude rovnoběžná se spojnicí sousedních bodů. Pro určení tečny v bodech x_0 a x_n se zpravidla určí derivace polynomem druhého stupně, kde

$x = x_0$, resp. $x = x_n$ a určíme derivace y_0', resp. y_n' tohoto polynomu.

Koeficienty a_0, a_1, a_2 polynomu
$$a_0(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_2 \qquad (3.15)$$

dostaneme pro

$$x = x_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = y_0$$
$$x = x_1 \quad \Rightarrow \quad a_0(x_1 - x_0)^2 + a_1(x_1 - x_0) + a_2 = y_1$$
$$x = x_2 \quad \Rightarrow \quad a_0(x_2 - x_0)^2 + a_1(x_2 - x_0) + a_2 = y_2'$$

z toho vypočteme

$$a_0 = \frac{y_2 - y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \qquad (3.16)$$
$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \qquad (3.17)$$
$$a_2 = y_0$$

Z (3.15) plyne $y_0' = a_1$. Tedy derivace v bodě x_0 :

$$\boxed{y_0' = \frac{(y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}$$

(3,18)

Podobně lze vypočítat y_n' derivováním polynomu:

$$a_0(x - x_{n-2})^2 + a_1(x - x_{n-2}) + a_2 \ . \tag{3.19}$$

Vztahy (3.16) a (3.17) budou mít tvar :

$$a_0 = \frac{y_n - y_{n-2}}{(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} \ ,$$

$$a_1 = \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})(x_n - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} - \frac{(y_n - y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2})}{(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} \ .$$

Z (3.19) plyne

$$y_n' = 2a_0(x_n - x_{n-2}) + a_1 \ .$$

Tedy derivace v bodě x_n :

$$y_n' = 2\frac{y_n - y_{n-2}}{x_n - x_{n-1}} - \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})(x_n - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} - \frac{(y_n - y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2})}{(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} \tag{3.20}$$

Příklad 8: Pro tabulku

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	0	16

určete po obloucích kubické polynomy s pomocí Hermitovy interpolace,

kde výpočet hodnot y_0', y_1' a y_2' bude dle výše uvedených vztahů.

Z (3.18) => $y_0' = \frac{(0-1)(3-0)}{(1-0)(3-1)} - \frac{(16-1)(1-0)}{(3-0)(3-1)} = -\frac{3}{2} - \frac{15}{6} = \underline{-4}$,

Ze (3.17) pro určení derivace => $y_1' = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{16-1}{3-0} = \underline{5}$,

Z (3.20) => $y_2' = 2\frac{16-1}{3-1} - \frac{(0-1)(3-0)}{(1-0)(3-1)} - \frac{(16-1)(1-0)}{(3-0)(3-1)} = 15 + \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = \underline{24}$

Vztahu (3.14) použijeme pro oba oblouky grafu funkce.

Polynomy jsou dány tabulkami:

i	0	1
x_i	0	1
y_i	1	0
y_i'	-4	5

Platí

$$ {}^0a_0 = 2.1 + 1 = \underline{3} $$

$$ {}^0a_2 = \underline{-4} $$

$$ {}^0a_1 = 3\cdot(-1) - (-8+5) = \underline{0} $$

$$ {}^0a_3 = \underline{1} $$

T. j. ${}^{\circ}h(x) = 3x^3 - 4x + 1$ pro $x \in <0, 1>$

i	1	2
x_i	1	3
y_i	0	16
y_i'	5	24

$$ {}^1a_0 = \frac{2(0-16)}{8} + \frac{5+19}{4} = \underline{2} $$

$$ {}^1a_1 = \frac{3(16-0)}{4} + \frac{2\cdot 5+19}{2} = \underline{-\frac{5}{2}} $$

$$ {}^1a_2 = \underline{5} $$

$$ {}^1a_3 = \underline{0} $$

$$ {}^1h(x) = 2(x-1)^3 - \frac{5}{2}(x-1)^2 + 5(x-1) $$

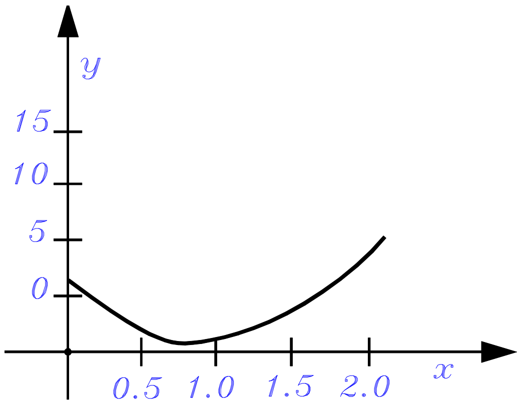
pro $x \in <1, 3>$.

Výsledná funkce

$$ h(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 3x^3 - 4x + 1 & pro\ \ x \le 1 \\ 2(x-1)^3 - \frac{5}{2}(x-1)^2 + 5(x-1) & pro\ \ x > 1 \end{array} \right. $$

je znázorněna na dále uvedeném obrázku 3.9.

(Bez ohledu na měřítko.)



Obr. 3.9.

Kontrolní otázky 3.

1. Jak lze vyjádřit křivky v počítačové grafice v rovině?
2. Jak lze vyjádřit křivky v počítačové grafice v prostoru?
3. Druhy rovnic pro vyjádření křivek (ploch) v počítačové grafice.
4. Charakterizujte druhy interpolačních křivek, které se používají v počítačové grafice.
5. Dělení a zadání křivek z hlediska počítačové grafiky.
6. Specifikujte pojmy interpolační křivka, regresní křivka, křivky určené lomenou čarou.
7. Lagrangeův - Newtonův interpolační polynom. Na příkladě uveďte jeho aplikaci.
8. Interpolace po obloucích. Uveïte příklad na Hermitovu interpolaci.

Úlohy k řešení 3.

1. Napište program na interpolaci pro body: $(2,3)$, $(3,8)$, $(4,1)$, $(6,3)$, $(7,6)$.

Zobrazte zadané body a vykreslete polynom, který danými body prochází. Zobrazení proveïte

a) polynomem

b) po obloucích.