

2. Vyplňování, transformace



Cíl Po prostudování této kapitoly budete umět

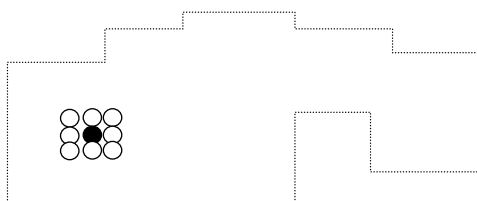
- vyplňovat a šrafovat ohraničenou oblast
- zobrazovat objekty 3D do roviny
- odvodit vztahy pro zobrazení 3D objektů do roviny



Výklad

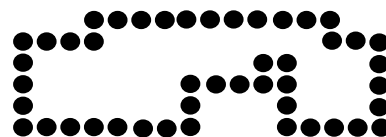
2.1. Algoritmy vyplňování

2.1.1. Semínkové algoritmy jsou založeny na principu, že známe jeden bod vybarvované oblasti. K danému bodu - semínku - určíme jeho čtyři sousední body v rastru. Jestliže tyto sousední body nemají barvu hranice oblasti, ani barvu vyplňovací, vybarvíme je. Takto postupujeme rekurzivně dále.



Obr. 2.1.

Na obrázku 2.1. je znázorněna oblast pro vyplnění metodou „ze semínka“ (SEED).

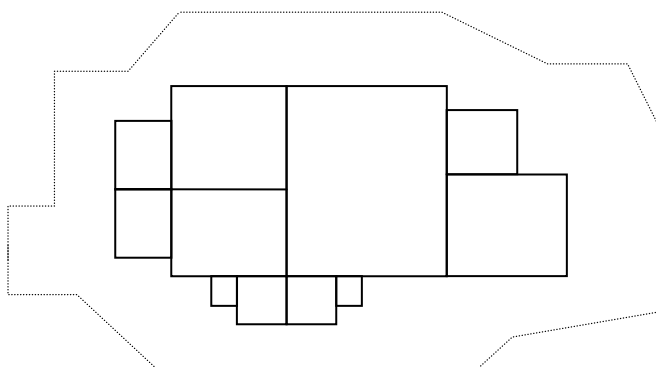


Obr. 2.2.

Na obrázku 2.2. je znázorněn postup při analýze čtyř resp. osmi sousedních bodů.

Při možnosti hardwarového vyplňování **čtvercové** oblasti, je vhodné rozložit vyplňovanou oblast na čtverce s postupně půlenými stranami. Postup je následující. Jestliže čtverec je celý v oblasti - je vyplněn. Pokrývá-li čtverec oblast jen částečně, je rozčtvrcen a procedura se rekurzivně opakuje na menších čtvercích až do strany čtverce jednoho pixelu.

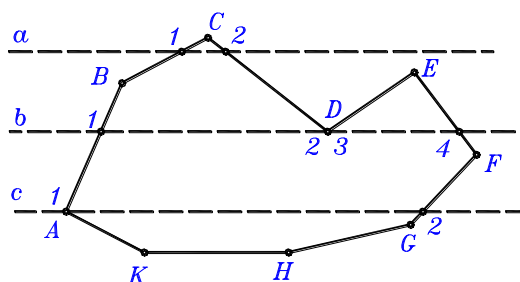
Začínáme čtvercem celé kreslicí plochy. Oblast vyplňované rekurzivním čtvrcením čtverců.



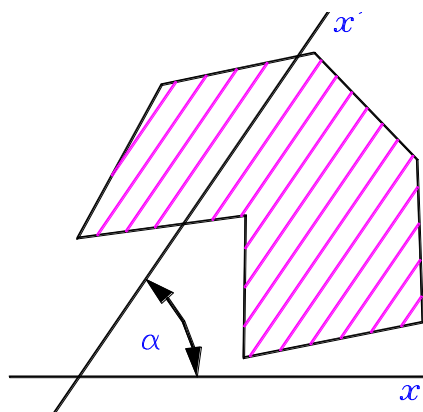
Obr. 2.3

2.1.2. Řádkové algoritmy (šrafovaní) jsou založeny na výpočtu průsečíků vyplňovací - šrafovací - přímky. Šrafovaní - vyplňování je výhodnější, jestliže šrafy jsou rovnoběžné s osou x (y). (Transformace otočením.)

Předpokládejme, že přímky (a, b, c, \dots) budou rovnoběžné s osou ve vodorovném směru. Algoritmus pro vyplňování řádkovou konverzí počítá s tím, že přímka může mít pouze **sudý**



Obr. 2.4



Obr. 2.5

počet průsečíků s n -úhelníkem, který tvoří hranici vyplňované plochy. V okamžiku, kdy přímka p "protíná" n -úhelník pouze v jednom bodě, nebo se dotýká, řešíme tuto situaci takto:

- 1) Prochází-li přímka zpracovávaného řádku vrcholem, potom se
 - a) do seznamu průsečíků zapíše pouze **jeden** průsečík, jestliže protínající se hrany jsou **klesající** nebo **rostoucí**.
Např.: pro hrany BA , AK se vrchol A uvažuje pouze jednou.
 - b) V opačném případě se obě hrany zkrátí - právě ten bod se vynechá.
(Na obrázku 2.4 jde o vrcholy C , D a E .)

- 2) Jestliže přímka zpracovávaného řádku je rovnoběžná s hranou vyplňované oblasti - vypustíme tuto hranu.

Postup řádkového algoritmu lze napsat takto:

- Postupujeme od nejvyššího vrcholu n -úhelníku směrem dolů.
- V každém řádku zleva doprava.
- Vyřadíme vodorovné hrany.
- Upravíme rostoucí resp. klesající hrany a současně upravíme orientaci hran tak, aby jejich první vrchol měl y - souřadnici vyšší než druhý vrchol. (Úprava spočívá v eventuálním zkrácení.)

Předpokladem je tedy uspořádaná tabulka hran. V této tabulce rozlišujeme aktivní a pasivní hrany. Aktivní jsou ty, které jsou protínající přímkou prořaty.

Šrafování objektů je možno provádět stejně jako při řádkovém vyplňování. Posun ve směru druhé osy je větší než jedna. Posun je nutno přepočítat dle počtu pixelů na požadovanou vzdálenost šraf. Jestliže šrafy nejsou rovnoběžné s vodorovnou osou x , tj. svírají s osou x úhel α , otočíme hranici šrafované oblasti o úhel $-\alpha$. Vypočtené jednotlivé šrafy otočíme zpět o úhel α . Na obrázku 2.5 je tento postup znázorněn.



Shrnutí pojmů

Semínkové vyplňování - vybarvování pixelů určenou barvou místo barvy pozadí.

Vhodné použití – vyplňování malých ploch (tučně vyplňované písmo). Pro velké plochy (při použití rekurzivních procedur) je možnost přeplnění paměti počítače. Pro vyplňování velkých ploch není vhodné semínkovou metodu programovat rekurzivně.

Řádkové vyplňování - vybarvování pixelů určenou barvou místo barvy pozadí po jednotlivých řádcích. Je nutno určit počáteční a koncový bod řádku vyplňování určenou barvou a sudý počet průsečíků hranice vyplňování.

Šrafování je vlastně řádkové vyplňování, kde posun ve směru svislé osy je přičítání „řádků“ o více než jeden pixel. Jestliže šrafy nejsou rovnoběžné s vodorovnou osou x , ale svírají s osou x úhel α , je nutné šrafovaný útvar otočit o úhel $-\alpha$, a po výpočtu jednotlivých šraf, tyto otočit „zpět“ o úhel α .

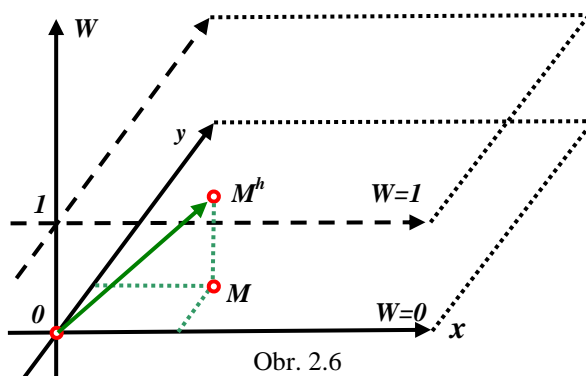
2.2. Homogenní souřadnice

Před kapitolou o transformacích souřadnic bodů v prostoru je nutné se seznámit se způsobem zadávání souřadnic. Jde o homogenní souřadnice.

Zavedení homogenních souřadnic umožňuje (především) transformační výpočty provádět pomocí maticových operací včetně počátku souřadné soustavy. Homogenní souřadnice dále umožňují počítat s nevlastními body soustavy.

Bod $M(x,y)$ je reprezentován v homogenních souřadnicích $M^h (wx, wy, w)$, kde w je různé od nuly. Potom bod s homogenními souřadnicemi (X,Y,W) má kartézské souřadnice

$$x = X/W \text{ a } y = Y/W.$$



Obr. 2.6

Přepis jednotlivých operací pak můžeme psát v následujících tvarech:

2.3.1. Translace

Posunutí vektorem (a, b) , kde a je posun ve směru osy x , kde b je posun ve směru osy y .

Přepočítání souřadnic posunutých bodů je dán vztahem:

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

V homogenních souřadnicích

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad X' = T(a, b) \cdot X$$

Měřítko $x' = x \cdot k$ k - násobek ve směru osy x

$y' = y \cdot q$ q - násobek ve směru osy y

$z' = z \cdot r$ r - násobek ve směru osy z .

Lze v homogenních souřadnicích zapsat:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad X' = M(k, q, r) \cdot X$$

2.3.2. Rotace (2D)

Pro otáčení v rovině o úhel α kolem počátku souřadnicového systému platí vztah:

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

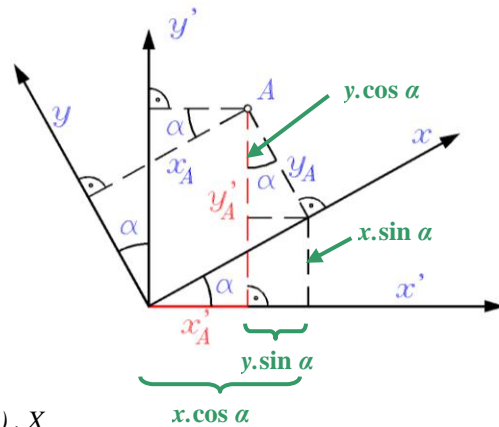
$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

V maticovém tvaru bude:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

V homogenních souřadnicích:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad X' = R(\alpha) \cdot X$$



Obr. 2.7

2.3.3. Rotace (3D) o úhel α kolem souřadnicových os.

Rotace okolo osy z:

$$\begin{aligned} z: \quad x' &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\ y' &= -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podobně lze zapsat i ostatní operace -

otočení okolo os y a x;

dále zrcadlení dle osy x resp. y.

Výhodou homogenních souřadnic je, že umožňuje realizovat jednotlivé geometrické operace pomocí jediné maticové operace.

Pozor! Při rotaci ve 3D prostoru musíme dávat pozor na znaménka u jednotlivých prvků matice. Čili - pozor na levo - pravotočivost soustavy.

Zřetězení jednotlivých operací lze ukázat na příkladě:

Máme geometrický objekt, který chceme otočit o úhel α kolem bodu A.

Postup řešení je:

- posun všech bodů útvaru tak, aby bod $A(a,b)$ byl v počátku nových souřadnic;
- otočíme objekt o úhel $\alpha = \pi/2$;
- posun všech bodů útvaru tak, aby bod A byl na původním místě.

Postup lze tedy zapsat: $X' = T(-a, -b) * X$
 $X'' = R(\alpha) * X'$
 $Xx''' = T(a, b) * X''$ t.j.
 $X''' = T(a, b) * R(\alpha) * T(-a, -b) * X$

tedy:

$$X''' = Q(a, b, \alpha) * X$$

kde:

$$Q(a, b, \alpha) = T(a, b) \cdot R(\alpha) \cdot T(-a, -b)$$

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po vyhodnocení výrazu Q dostaneme:

$$Q(a, b, \alpha) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & -a \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha + a \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -a \cdot \cos \alpha - b \cdot \cos \alpha + b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Po dosazení za $\alpha = \pi/2$ do $R(\alpha)$ dostaneme: $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vyhodnocení maticového výrazu pro $\alpha = -\pi/2$ dostaneme:

$$Q(a, b, -\pi/2) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -b + a \\ -1 & 0 & -a + b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Obecně tedy lze napsat: $Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_R & Q_P \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$

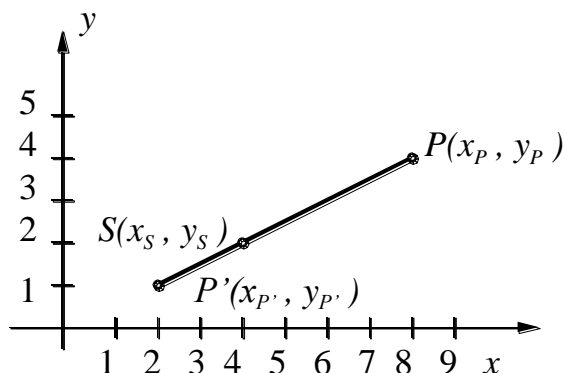
kde matice Q_R je rozměru 2×2 a jde o rotaci a matice Q_P je rozměru 2×1 a jde o posuv.

2.3.5. Geometrické transformace

Geometrickou transformací rozumíme transformaci určitého geometrického objektu na jiný objekt. Zatím jsme se seznámili s transformacemi, které objekt posouvali, otáčeli, měnili měřítko. Zavedením homogenních souřadnic a složení těchto "jednoduchých" transformací umožní vyjádřit jednou transformační maticí **stejnolehlost**. Tuto geometrickou příbuznost lze složit z posunutí, změny měřítko a zpětného posunutí.

Na obrázku 2.8 je dán bod $S(x_S, y_S)$, bod $P(x_P, y_P)$ a "obraz" $P'(x_{P'}, y_{P'})$ bodu P tak, že všechny body leží na jedné přímce. Potom definujeme pojem stejnohlosti bodů P a P' se středem stejnohlosti v bodě S . Zbývá určit koeficient q stejnohlosti.

Jak známo koeficient q stejnohlosti je poměr orientovaných úseček SP a SP' .



Obr. 2.8

$$q = \frac{\overline{SP}}{\overline{SP'}} .$$

Afinní vztahy budeme vyjadřovat maticově.

$$\text{Tedy rovnicí ve tvaru } [x', y', 1] = A \cdot [x, y, 1], \quad (2.1)$$

kde A je transformační matice.

Zopakujme si transformační matice pro

Posunutí:	Otočení:	Měřítko:
$A_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A_O = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \beta & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A_M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transformační matice A_S pro stejnohlost je:

$$A_S = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ x_S(1-q) & y_S(1-q) & 1 \end{bmatrix}$$

kde q je koeficient stejnohlosti; x_S a y_S jsou souřadnice středu stejnohlosti.

Jestliže dosadíme do rovnice (2.1) pro střed $S(4,2)$ stejnohlosti o koeficientu $q = -1/2$ dostaneme:

K bodu $P(8, 4)$ bod P' tak, že dostaneme:

$$[x', y', 1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) & 2\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tedy

$$x' = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot 4 + 4 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -4 + 6 = 2 ;$$

$$y' = 0 \cdot 8 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -2 + 3 = 1 .$$

Stejnolehlý bod P' k bodu P má souřadnice $P'(2, 1)$.

Lze tak odvodit transformační matici pro "převod" z jehlanového prostoru na hranolový, resp. krychlový a opačně.

2.4. Transformace v prostoru.

Obecný postup při otočení objektu kolem osy v obecné poloze. Postup v tomto případě je nutno rozdělit na více kroků.

1. Posuneme objekt tak, aby osa rotace procházela počátkem. (Osu považujeme za součást objektu.)

Translace $O \rightarrow O'(x, y, z)$

2. Otočíme objekt tak, aby osa padla do některé souřadnicové osy - nejspíše do osy z .

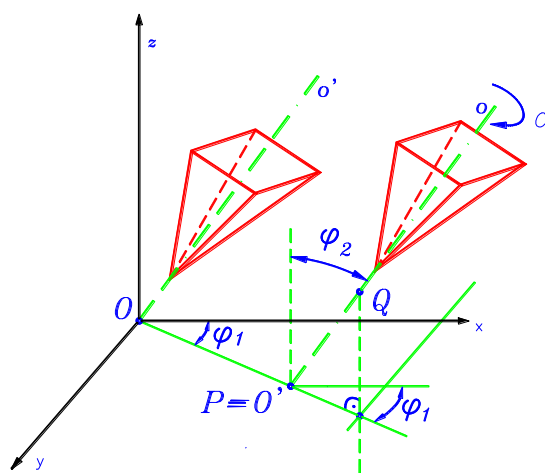
Tento bod však musíme provést ve dvou krocích.

a) Otočíme osu rotace (tedy i objekt) kolem osy z do roviny (xz) o úhel φ_1 . Úhel φ_1 je úhel prvního průmětu osy o' do roviny (xy) .

b) Otočíme objekt okolo osy y o úhel φ_2 . Úhel φ_2 je úhel, který svírá osa o' s osou z .

3. Otočíme objekt okolo osy z o úhel α .

Nyní provedeme celou translakci v opačném směru.



Obr. 2.9

Tedy:

4. Otočíme objekt okolo osy y o úhel $-\varphi_2$.
5. Otočíme objekt okolo osy z o úhel $-\varphi_1$.
6. Provedeme translaci $O \rightarrow O'(-x_p, -y_p, -z_p)$.

Potřebné úhly resp. jejich kosiny získáme pomocí směrových kosinů vektoru osy rotace.

Platí:
$$PQ = v = \left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_1 = \left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{v_1}{v} \qquad \cos \varphi_1 = \frac{z_p - z_q}{v}$$

Program pro cvičení: Vypracujte proceduru, která množinu bodů (vrcholů těles) otočí okolo osy dané dvěma různými body P, Q .

2.5. Transformace prostoru (3D) do roviny (2D)

Význam promítacích metod pro počítačovou grafiku a opačně. Prostředky počítačové grafiky umožňují efektivnější řešení konstruktivních úloh. Jde především o zmechanizování kresličské práce, efektivnější práce projektantů a pod.

Základní rozdíl mezi tradiční geometrií a počítačovou grafikou :

1. V geometrii jsme **nejprve volili promítací metodu** a potom v této zobrazili objekt. V počítačové grafice je tomu právě naopak. Nejprve vytvoříme objekt - nemusí to být ani v žádné promítací metodě - a potom volíme metodu vhodnou pro požadovaný účel.
2. Při změně dat bylo nutno celý proces tj. konstrukci objektu i jeho zobrazení zpracovat znovu. Vypracované procedury v PG nás tohoto ušetří. Neboť stačí vyvolat tentýž transformační program s jinými parametry.

Pro práce je nutno vypracovat procedury ve všech používaných promítacích metodách. A to v Mongeově projekci, kosoúhlém promítání resp. v technickém kosoúhlém promítání, axonometrii (ortogonální) a perspektivě.

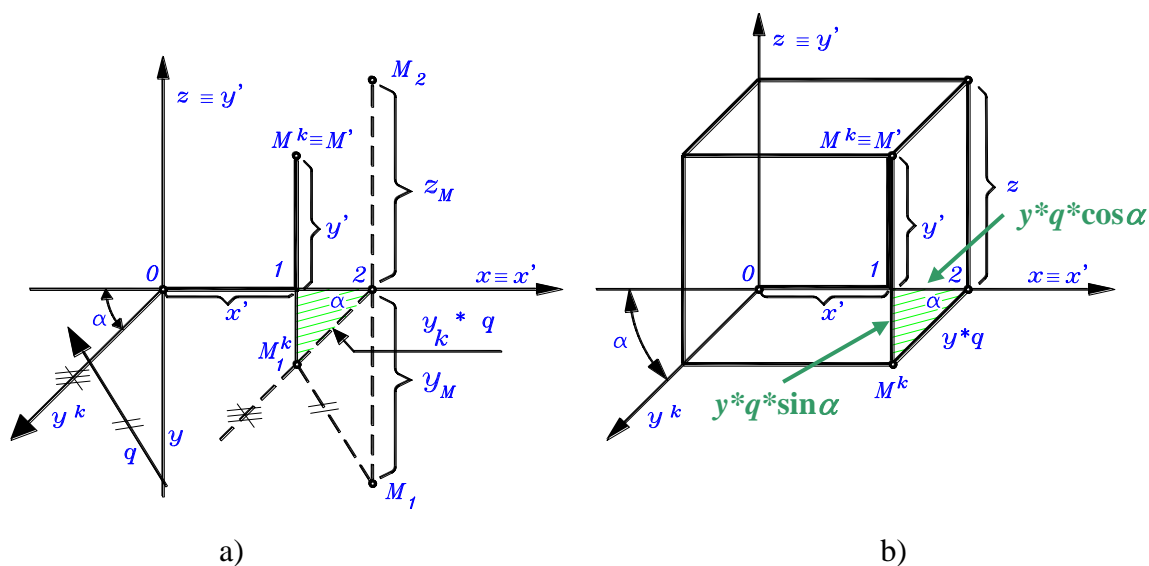
V pravoúhlém promítání - tedy v Mongeově projekci nebo kótovaném promítání, stačí "zanedbat" jednu souřadnici. Jestliže ztotožníme náčrt s jednou průmětnou, vynulujeme

příslušnou souřadnici bodů. Pro kótované promítání je nulována z -tová souřadnice. Pro promítání na nárysnu je nulována souřadnice y .

V ostatních promítáních musíme provést přepočet souřadnic.

2.5.1. Kosouhlé promítání

Jde o rovnoběžné promítání, kde jedna osa (zpravidla osa y) se promítá pod úhlem, který je kosý vzhledem k ostatním průmětům os a průmětnám. Jednotková délka ve směru této osy je v průmětu násobena kladným číslem obvykle (zkrácením) $q \neq 0$.



Obr. 2.10

Nákresnu (zobrazovací rovinu $(x'z')$) ztotožníme s rovinou (xz) .

Průmět osy z ztotožníme s osou z' zobrazovací roviny, osu x' zobrazovací roviny ztotožníme s osou x souřadnicového systému.

Tedy $\Rightarrow z \equiv y', \quad x \equiv x'$.

Potom dle obrázku 2.10 plyne:

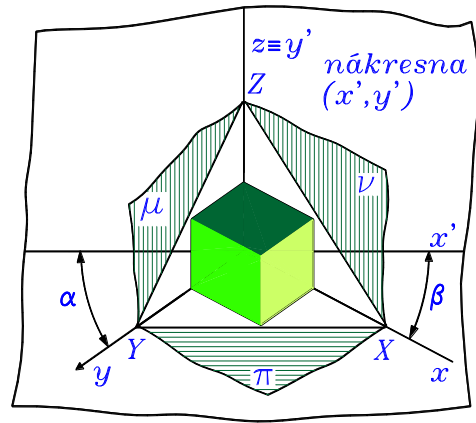
$$\begin{aligned} x' &= x - y * q * \cos \alpha \\ y' &= z - y * q * \sin \alpha. \end{aligned}$$

Na obrázku 2.10a) je zobrazen bod M ve vztahu k Mongeově promítání na dvě kolmé průmětny. Na obrázku 2,10b) zobrazena krychle, jejíž tři hrany leží na souřadnicových osách. Průměty hran krychle, které jsou rovnoběžné s osou y se zkracují ($y * q$).

Jsou zde naznačeny vztahy mezi souřadnicemi v pravoúhlém a kosouhlém promítání.

2.5.2. Axonometrie

Pod pojmem axonometrie je všeobecně považována ortogonální axonometrie. To znamená, že promítací paprsek je kolmý na zobrazovací rovinu, která není rovnoběžná se žádnou souřadnicovou rovinou kartézské soustavy. Na obrázku 2.11 je soustava zadána osami x, y, z , kde na souřadnicových osách leží hrany hranolu. Nákresna, která je dána obecným trojúhelníkem XYZ , do které se zobrazuje hranol, není rovnoběžná se žádnou souřadnicovou rovinou. Souřadnicová osa y' nákresny se promítá do průmětu osy z souřadnicového systému. Osa x' prochází počátkem O souřadnicového systému a je kolmá na osu y' . Jestliže zvolíme obecný bod $M(x, y, z)$ v soustavě



Obr. 2.11

Odvození je patrné z obrázku číslo 2.12.

$$x'_M = y_M \cdot \cos \beta - x_M \cdot \cos \alpha$$

$$y'_M = z_M - a - b \Rightarrow z_M - y_M \cdot \sin \beta - x_M \cdot \sin \alpha$$

Nahradíme obecné souřadnice bodu M násobkem jednotky na osách x, y, z .

$$\text{A to } x'_M = x_M \cdot J^x$$

$$y'_M = y_M \cdot J^y$$

$$z'_M = z_M \cdot J^z.$$

Dostaneme transformační rovnice axonometrie:

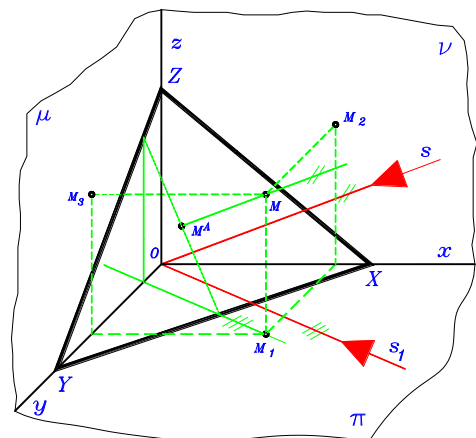
$$x' = -x \cdot J^x \cdot \cos \alpha + y \cdot J^y \cdot \cos \beta$$

$$y' = -x \cdot J^x \cdot \sin \alpha - y \cdot J^y \cdot \sin \beta + z \cdot J^z$$

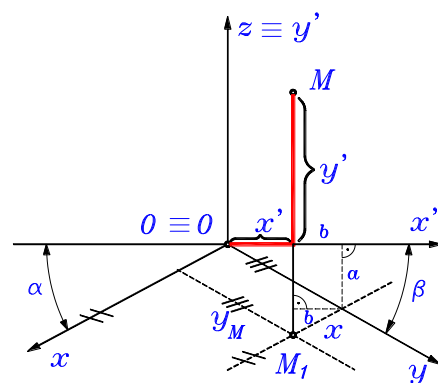
Pro naprogramování je vhodné zavést některé substituce:

$$x' = -x \cdot \underbrace{J^x \cdot \cos \alpha}_K + y \cdot \underbrace{J^y \cdot \cos \beta}_L$$

$$y' = -x \cdot \underbrace{J^x \cdot \sin \alpha}_M - y \cdot \underbrace{J^y \cdot \sin \beta}_N + z \cdot J^z$$



Obr. 2.12



Obr. 2.13

Dosadíme-li tyto konstanty do předešlých rovnic, dostaneme obecné transformační rovnice

$$K = -J^x \cdot \cos \alpha$$

$$L = J^y \cdot \cos \beta$$

$$M = -J^x \cdot \sin \alpha$$

$$N = -J^y \cdot \sin \beta$$

axonometrie:

$$x' = K \cdot x + L \cdot y$$

$$y' = M \cdot x + N \cdot y + J^z \cdot z .$$

Pro odvození zkrácení jednotek na osách (viz obrázek 2.13) platí:

$$Z \cos \alpha' = 12 \quad \text{a} \quad \cos \alpha = \frac{12}{J^x} \Rightarrow J^x = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \quad \text{a} \quad \text{obdobně} \quad J^y = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} \quad \text{a} \quad J^z = \frac{\cos \gamma'}{\cos \gamma} .$$

Je zřejmé, že jednotky zkrácení J^x , J^y , J^z **NELZE VOLIT LIBOVOLNĚ**.

Je nutno je vypočítat na základě matematických vztahů. Postup lze odvodit z obrázku 2.13,

který zde uvádím pro lepší pochopení

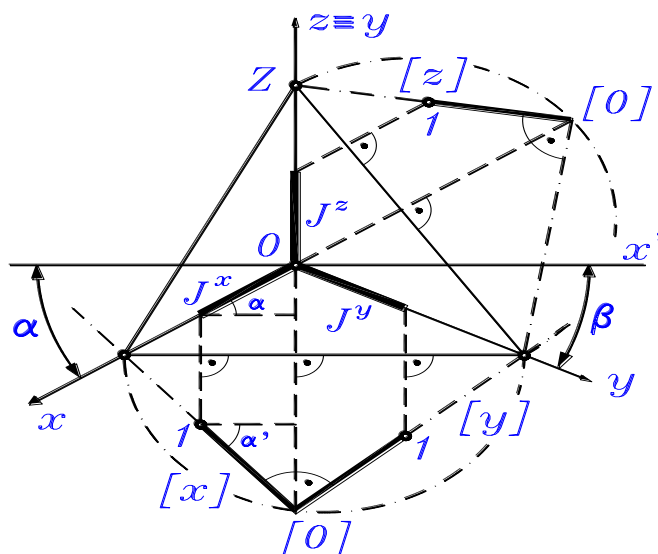
promítací metody ortogonální

axonometrie.

$$J_x = \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\left(1 + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta}\right)}}$$

$$J_y = \frac{1}{\cos \beta \sqrt{\left(1 + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \beta \sin \alpha}\right)}}$$

$$J_z = \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{\left(1 + \frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos(\alpha + \beta)}\right)}}$$



Obr. 2.14

2.5.3. Perspektiva

Jde o středové promítání objektu do roviny. Promítací paprsky procházejí středem S . Jsou různoběžné a tím výpočet průmětu 3D těles je složitější, ale průmět je přirozenější lidskému vnímání. Odvození převodních vztahů je naznačeno na obrázku 2.14 a následuje.

Z podobnosti ΔMM_1S a $\Delta M'M_1'S \Rightarrow$

$$\frac{y'}{z} = \frac{M_1'S}{M_1S} \quad (2.2)$$

a z podobnosti ΔRM_1S a $\Delta OM_1'S \Rightarrow$

$$\frac{M_1'S}{M_1S} = \frac{x'}{x} = \frac{d}{d+y} \quad (2.3)$$

Z (2.2) a (2.3) \Rightarrow

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{z} = \frac{d}{d+y} = k \quad -$$

k ... transformační konstanta

Transformační rovnice perspektivní projekce:

$$x' = k \cdot x \quad \text{a}$$

$$y' = k \cdot z \quad \text{kde} \quad k = \frac{d}{d+y}.$$

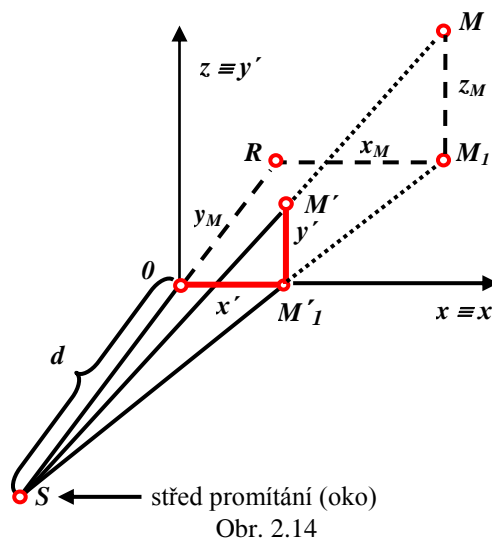
Pro volbu d by mělo platit $x'^2 + y'^2 < d^2/4$.

Jestliže střed perspektivy neleží na ose y a průmětna není totožná s rovinou (x,z) - nárýsnou, otočíme průmětnu kolem osy z o úhel α .

Ze vztahu otočení kolem osy z vypočteme a , b a nové x a y .

(Viz. předešlé vztahy o otáčení.)

$$\left. \begin{array}{l} a = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ b = x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{d}{d+b} = C \Rightarrow \begin{array}{l} x' = a \cdot C \\ y' = z \cdot C \\ (z = y) \end{array}$$



Obr. 2.14



Shrnutí pojmů

Vyplňování a) semínkové
b) řádkové (šrafování)

Homogenní souřadnice.

Homogenní souřadnice dále umožňují

- počítat s nevlastními body soustavy
- transformační vztahy realizovat maticovými operacemi.

Transformace a) posun (translace), měřítko, rotace (2D a 3D)
b) transformace Z 3D do 2D (promítání) kosoúhlé, axonometrie a perspektiva



Otázky 2.1.

- Odvoďte matematické vztahy pro translace, transformace rovinných a prostorových útvarů.
- Jaké výhody poskytuje počítačová grafika ve srovnání s tradiční konstruktivní geometrií?
- Odvoďte transformační rovnice pro promítání - kosoúhlé, axonometrii, perspektivu.



Úlohy k řešení 2.

- Vypracujte procedury pro kosoúhlé promítání, axonometrii a perspektivu.
- Vypracujte proceduru pro rotaci objektu okolo obecné osy.