



Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava



TEORIE OBVODŮ I

Studijní opora

Jaromír Kijonka a kolektiv

Ostrava 2007

Recenze: Prof. Ing. Josef Paleček, CSc.

Název: Teorie obvodů I
Autor: Jaromír Kijonka a kolektiv
Vydání: první, 2007
Počet stran: 196
Vydavatel: VŠB – TUO

Studijní materiály pro studijní obor Elektrotechnika Fakulty elektrotechniky a informatiky
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Rozvoj lidských zdrojů

Název: E-learningové prvky pro podporu výuky odborných a technických předmětů

Číslo: CZ.O4.01.3/3.2.15.2/0326

Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava

Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Jaromír Kijonka

© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-1488-9

POKyny KE STUDIu

Teorie obvodů I

Pro předmět Teorie obvodů I zimního semestru studijního programu Elektrotechnika a studijního programu Mechatronika jste obdrželi studijní balík obsahující

integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu

- CD-ROM s doplňkovými animacemi vybraných částí kapitol
- harmonogram průběhu semestru a rozvrh prezenční části
- rozdělení studentů do skupin k jednotlivým tutorům a kontakty na tutorý
- kontakt na studijní oddělení

Prerevizity

Studium tohoto předmětu nenavazuje na žádný předchozí předmět, protože je vyučováno v prvním semestru.

Anotace:

Cílem výuky předmětu Teorie obvodů I je naučit studenty tvůrčím způsobem aplikovat fyzikální zákony a principy při analýze elementárních jevů ve stejnosměrných a střídavých elektrických obvodech s lineárními a nelineárními prvky. Poznatky z teorie obvodů patří mezi základní znalosti, které student uplatní v celém průběhu studia. Po absolvování výuky předmětu Teorie obvodů I umí student vypočítat napětí a proudy kdekoli v obvodu a na jejich základě posuzovat vlastnosti elektrických zařízení.

Předmět je možné studovat jak v prezenční, tak i kombinované formě bakalářského studijního programu Elektrotechnika a studijního programu Mechatronika. Odborný obsah studia předmětu Teorie obvodů I je shodný pro obě formy studia.

Tutoři kombinované formy studia zimního semestru akademického roku 2007/08

pro **L 1:** Ing. Petr Orság, Ph.D., kat.452, tel. 59 732 4253, místnost F307,

L 2: Doc. Ing. Jaromír Kijonka, CSc., kat.452, tel. 59 732 5109, místnost A436.

Garant předmětu: **doc. Ing. Jaromír Kijonka, CSc.**

Literatura

Podle akreditovaných studijních programů je základní studijní literaturou učebnice Mikulec, V., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I a doporučenou studijní literaturou učebnice Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. Obě knihy, obsahující výklady a řešené příklady, jsou určeny studentům elektrotechnických fakult.

Studijní opory

Studijní opory jsou tvořeny: „Bodovým systémem hodnocení výkonu studenta“, „Studijním textem“ a „Pracovním sešitem“. Bodový systém hodnocení výkonu studenta je smlouva garanta předmětu se studentem. Student smlouvu uzavírá odevzdáním vstupního testu. Cílem bodového hodnocení není pouze jen ocenit výkon, ale zejména podněcovat a rozvíjet tvůrčí činnost studentů. Student může získat v kurzu celkem 100 bodů z toho 40 bodů za samostatné práce do posledního dne výuky v semestru, ve kterém je předmět vyučován a 60 bodů u závěrečné zkoušky, kterou lze vykonat nejpozději do 25. srpna akademického roku, v němž si student předmět zapsal.

Studijní text vede studenta k aktivní práci. Je tvořen výkladem, příklady, úkoly, klíčem k řešení úkolů, jenž je nástrojem autokontroly, zadáním samostatných prací, zadáním laboratorních úloh a příkladem řešení semestrálního projektu. Pracovní sešit je virtuální laboratoř, v níž student může efektivně zpracovávat samostatné práce a referáty, teoreticky modelovat jevy, posuzovat je a porovnávat z výsledky laboratorních měření.

Podmínky udělení zápočtu

Každému studentu, jenž uzavře smlouvu s garantem předmětu, je udělen zápočet s počtem bodů, které získá nejpozději do posledního výukového dne semestru, v němž je předmět vyučován za aktivity:

- | | |
|--|--------------------|
| a) Odevzdání vstupního testu | J = 0 nebo 3 body. |
| b) Realizaci zapojení příslušného elektrického obvodu, vyhodnocení veličin a zpracování zpráv 7 zadání | K = 0 až 21 bodů. |
| c) Prezentaci a obhajobu zprávy v češtině | L = 0 až 3 body |
| d) Prezentaci a obhajobu zprávy v cizím jazyce | M = 0 až 3 body. |
| e) Zpracování semestrálního projektu | N = 0 až 10 bodů. |

Bodové hodnocení výkonu studenta v průběhu semestru je součtem získaných bodů

$$P = J + K + L + M + N.$$

Odborná úroveň zpracování zprávy je podmíněná technickou formou zápisu výpočtů: obecný výraz, dosazení, výsledek, jednotka.

Podmínky vykonání zkoušky

Zkouška je praktická, písemná a ústní. Body u zkoušky jsou studentům přidělovány za aktivity:

- | | |
|--|------------------|
| a) Zpracování 1. realizačního projektu | R = 0 až 2 body. |
| b) Zpracování 2. realizačního projektu | S = 0 až 3 body. |
| c) Realizace jednoho z projektů | T = 0 až 5 bodů. |

Student si sám zvolí jedno ze zapojení zpracovaných projektů a v době do 30 min. ho verifikuje.

Díleč aktivity:

- | | |
|---|---------------|
| • realizace zapojení | 0 nebo 1 bod, |
| • oživení a nastavení projektovaných podmínek | 0 nebo 1 bod, |
| • změření proudů a napětí | 0 nebo 1 bod, |
| • posouzení verifikace studentem | 0 nebo 1 bod, |
| • zhodnocení verifikace pedagogem | 0 nebo 1 bod. |

Realizačními projekty jsou zadání samostatných prací nebo vlastní témata studentů z teorie obvodů.

- | | |
|-----------------------------|------------------|
| d) Písemnou a ústní zkoušku | U = 0 až 5 bodů. |
|-----------------------------|------------------|

Bezprostředně po písemném ohodnocení realizace projektu pedagogem se student dostaví s projekty do zkušební místnosti, kde si sám vybere typ otázky pole náročnosti

- | | |
|---------------------------------|----------------|
| A (typ: nakreslete...) | 0 nebo 1 bod, |
| B (typ: popište...) | 0 nebo 2 body, |
| C (typ: odvoďte, sestrojte...) | 0 nebo 3 body, |

a po té mu je počítačem vylosována konkrétní otázka a vydán zkušební protokol , v němž je vypsána vylosovaná otázka. Následně student v časovém intervalu do 15 min. zapíše do zkušebního protokolu písemnou přípravu. Po té se dostaví s písemnou přípravou k jednomu ze zkoušejících, který ji bez jakékoli komunikace se studentem ohodnotí nulou nebo počtem bodů podle zvoleného typu. Pak, v intervalu do 10 min, následuje oboustranná ústní komunikace ke zvolené otázce, která je zkoušejícím ohodnocena 0 nebo 1 nebo 2 body.

Výsledný počet bodů u zkoušky „V“ je součtem získaných bodů v aktivitách a) až d) vynásobených počtem aktivit „X“, v nichž student obdržel alespoň jeden bod

$$V = (R + S + T + U) \cdot X.$$

Celkový počet bodů „Z“ za absolvování kurzu předmětu je součtem bodů získaných v průběhu semestru a u zkoušky

$$Z = P + V .$$

Podle celkového počtu bodů „Z“ je studentovi přiřazena známka. Minimální hranice pro úspěšné absolvování kurzu je 51 bodů.

Každý zkušební protokol je tři roky archivován na katedře z důvodu případné kontroly.

Slepá zkouška

Každý student má právo ověřit si realizaci navrženého zařízení v laboratoři, i opakovaně, samozřejmě před tím, než se dostaví ke zkoušce. K tomu je studentům vymezena doba od 12.00 do 13.00 hod. ve dnech zkušebních termínů. Dozor v laboratoři konají dva studenti prezenční formy doktorského studijního programu.

Podmínky komunikace

Prezenční forma studia

V prezenční formě studia je výuka předmětu Teorie obvodů I zajištěna dvěma hodinami přednášek, dvěma hodinami výpočetních cvičení a dvěma hodinami laboratorních cvičení týdně ve 13-ti týdenním semestru, tedy celkem 78 hodinami. Laboratorní cvičení vedou dva pedagogové. V laboratorních cvičeních první dva týdny slouží k proškolení studentů, od 3. týdne semestru pedagog rozdělí studijní skupinu do dvou podskupin. V první polovině laboratorních cvičení studenti jedné podskupiny měří a současně studenti druhé podskupiny prezentují své referáty zpracované v MS PowerPoint s využitím dataprojektoru, v druhé polovině laboratorních cvičení si podskupiny studentů činnost zamění. Náplní referátu může být zpráva z laboratorního měření nebo jakákoliv samostatná práce studenta z teorie obvodů. Doba na referát je deset minut. Od 2. týdne pedagog v každé podskupině určuje pro referáty v následujícím laboratorním cvičení tři studenty a dva náhradníky. Ve 3. až 11. týdnu semestru studenti zpravidla ve dvojicích měří devět laboratorních úloh, ale protokoly z měření odevzdávají osobně pouze v hodinách výpočetního cvičení nejpozději. Ve dvanáctém týdnu má student právo nahradit pouze jednu laboratorní úlohu. Pokud se laboratorní cvičení nekoná v důsledku nařízeného volna (státní svátek, děkanský či rektorský den) je činnost studenta ohodnocena třemi body. Do bodového hodnocení se počítá ohodnocení dvou referátů a sedmi protokolů s nejvyšším ohodnocením.

V prezenční formě studia protokol z laboratorního měření student odevzdává osobně pedagogovi v hodinách výpočetního cvičení dané skupiny. Odevzdá-li student protokol do 14 dnů ode dne měření získá za odevzdání 1 bod, jinak 0 bodů.

Kombinovaná forma studia

Kombinovaná forma studia je určena studentům, kteří jsou schopni samostatně studovat a mají dostatečnou odpovědnost za svůj vzdělávací postup k cíli. Harmonogram kombinované formy studia je tvořen sedmi tutoriály, z nichž dva jsou laboratoře. Tutoriály slouží studentům ke konzultacím studované látky. Na posledním tutoriálu mohou studenti vykonat závěrečnou praktickou, písemnou a ústní zkoušku, jejíž náplň je stejná jako pro studenty prezenčního studia. Stěžejní podněty ke konzultacím studentů ve výuce jsou vymezeny v zadáních samostatných prací.

V kombinované formě studia je zpracování samostatné práce rovnocenné zpracování protokolu z laboratorního měření. V kombinované formě studia vstupní test, samostatné práce a semestrální projekt lze odevzdat tutorovi

- elektronickou poštou
- písemně poštou
- písemně na tutoriálu.

Jeden bod za odevzdání každé z prvních čtyř samostatných prací získají studenti kombinované formy studia pouze do 23. 11. 2007.

Opravené samostatné práce budou studentům osobně předávány na tutoriálech, s bodovým hodnocením budou studenti seznámeni elektronicky.

Společné pro prezenční i kombinovanou formu studia

Referáty lze prezentovat pouze v době laboratorních cvičení pouze před ostatními studenty. Doba trvání referátu včetně následné diskuze je deset minut, jejich náplní může být zpráva z laboratorního měření nebo jakákoliv samostatná práce studenta z teorie obvodů..

V kombinované formě studia může student požádat o prezentaci referátu, jinak ji může nahradit zpracováním samostatné práce.

Odevzdají-li studenti semestrální projekt před 15. prosincem získají za odevzdání 3 body, jinak 0 bodu.

Realizační projekty přinesou studenti až ke zkoušce, a to i v opakovaných termínech.

Zadání a bodové hodnocení semestrálního projektu:

V dané kostře stejnosměrného obvodu tvořeného šesti větvemi a čtyřmi uzly charakterizujte jednotlivé větve tak, aby jedna z nich byla tvořena:

- ideálním zdrojem napětí,
- ideálním zdrojem proudu,
- skutečným zdrojem napětí,
- skutečným zdrojem proudu

a dvě větve rezistory. Student si sám volí číselné hodnoty parametrů.

Specifikace problémů:

- a) vytvořte soubor větví stromu, nezávislých větví, nezávislých řezů a nezávislých smyček,
- b) orientujte každý nezávislý řez počítací šipkou, sestavte soustavu obvodových rovnic a vyřešte je,
- c) orientujte každou nezávislou smyčku počítací šipkou, sestavte soustavu obvodových rovnic a vyřešte je,
- d) ověřte, zda vypočtené hodnoty vyhovují Kirchhoffovým zákonům,
- e) určete hodnoty výkonu každého zdroje a rozhodněte, zda dodává nebo odebírá energii,
- f) ověřte, zda vypočtené hodnoty výkonů vyhovují Tellegenově větě.
- g) celková odborná úroveň řešení projektu (je podmíněna nenulovým hodnocením alespoň čtyř z dílčích problémů a, b, c, d, e, f, grafickou úrovní zpracování a požadovanou formou zápisu číselných výpočtů: obecný výraz, dosazení do něj, výsledek, jednotka).

Každý dílčí úkol je hodnocen 0 nebo 1 bodem. Bodové hodnocení semestrálního projektu N je součtem bodových ohodnocení dílčích úkolů a hodnoty sčítance termínu odevzdání A , jenž před 15. prosincem má hodnotu 3 body, jinak 0 bodu, potom $N = (a + b + c + d + e + f + g + A)$.

OBSAH

	PRŮVODCE STUDIEM	3
I. ČÁST	NÁPLŇ SAMOSTATNÉHO STUDIA	8
1. kapitola	Vymezení elektromagnetických jevů obvodovými modely	8
2. kapitola	Analýza lineárních obvodů v harmonickém ustáleném stavu	18
3. kapitola	Věty o náhradních zdrojích, výkonové přizpůsobení střídavého zdroje, princip superpozice, transfigurace	34
4. kapitola	Topologie elektrických obvodů, řešení elektrických obvodů přímou aplikací Kirchhoffových zákonů	48
5. kapitola	Analýza obvodů metodou smyčkových proudů a řezových napětí	66
6. kapitola	Imitanci funkce, rezonance, kompenzace jalových složek	87
7. kapitola	Magnetická vazba, vzájemná indukčnost, elementární modely transformátorů, náhrada magnetické vazby galvanickou vazbou	105
8. kapitola	Analýza obvodů s nelineárními prvky	116
9. kapitola	Analýza obvodů s neharmonickými průběhy veličin, výkony	127
10. kapitola	Určování parametrů a imitancí technických prvků, ekvivalence, Jouleovo teplo	138
11. kapitola	Dielektrické obvody	152
II. ČÁST	ZADÁNÍ SAMOSTATNÝCH PRACÍ	163
12. kapitola	Laboratorní úlohy	163
13. kapitola	Výpočetní úlohy	174
III. ČÁST	PŘÍKLADY ŘEŠENÍ	175
14. kapitola	Příklady řešení vybraných úkolů	175
15. kapitola	Příklady řešení projektu	189

I. ČÁST: NÁPLŇ SAMOSTATNÉHO STUDIA

1. VYMEZENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH JEVŮ OBVODOVÝMI MODELÝ



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl: Po prostudování textu této studijní podpory budete umět:

- charakterizovat napětí, proud, výkon, práci,
- definovat efektivní hodnoty veličin,
- sestavovat paralelní a sériové obvodové modely elektromagnetických jevů,
- rozlišovat stav naprázdno a nakrátko,
- zobrazovat výpočet skalárního součinu časových funkcí.



Výklad

Předmluva

Jestliže 19. století bylo charakterizováno bouřlivým rozvojem techniky, 20. století rozvojem přírodních věd, pak ve 21. století bude hrát rozhodující roli schopnost lidí třídit a zpracovávat informace.

Norbert Wiener

Je vhodné, abychom si občas uvědomili, že za určitých podmínek jsme schopni smysluplně řídit své chování a tím s určitým záměrem působit na utváření nejen své osobnosti, ale i prostředí, v němž žijeme. Takovéto poznání je přirozenou součástí našeho bytí, jehož charakteristickým rysem je osobní odpovědnost za efektivní řízení vlastního života.

Nepěstujeme-li toto vědomí, pak se stáváme objektem pro různé touhy, plány a cíle vzešlé z našeho okolí. Čím více podléháme tomuto vlivu, tím více se v našem nitru zakořeňuje pocit bezmocnosti. Časem si na tento stav zvykneme a ani si nepovšimneme, že paralyzoval některé části našeho vědomí, a tím i schopnost našich přirozených reakcí. Často, abychom se „na oko“ zachránili si vytváříme svůj vlastní svět, ve kterém se izolujeme před podněty reality a čekáme na nějaký zázračný impuls až se „něco“ změní.

Jak se vyhnout těmto stavům, respektive je minimalizovat? Odpověď je velmi jednoduchá! Pokračovat ve vývoji.

Lidský vývoj od prapředků po současnost je utvářen schopností jedinců směřovat svou pozornost do vlastního nitra na vnitřní procesy, uvědomovat si je a pomocí spolupráce (synergie) a zkoncentrované energie je oživovat a používat v reálném životě. Ve skutečnosti to znamená zaměřit svou aktivitu na vnitřní duševní potenciál a využívat jej; to je využívat schopnost Vašeho myšlení, sestavovat informace a vytvářet z nich racionální modely skutečnosti za účelem racionálního chování v racionálním světě a v reálném čase.

K tomu jsou nezbytné promyšlené (plánované) volby a reakce (rozhodnutí) o svoji aktivitě na základě informací o sobě (vlastní zdroje a cíle) a o prostředí (cizí zdroje a cíle). Je na každém z nás, jaké názory na svět si utváří, podle informací, které si o daném objektu vezme, jak je umí třídit a následně používat. Klíč k budoucnosti lze nalézt jedině teorií.

Ke studiu reálných jevů je nezbytné vymezit prostředí a metody. Prostor je velmi často stanoven obory – (chemie, strojírenství, elektrotechnika, informatika), mezi obory, záměrem studia apod.

Podle metod, které pro zkoumání volíme, je dělíme na teoretické, experimentální a praktické.

Cílem teoretické elektrotechniky je vymezit pojmy, formulovat obecné zákony a principy, utvářet představy, z nichž jsou deduktivní cestou logicky a důsledně matematicky vyvozovány nejen známé, ale i nové poznatky, třídit je a uvádět ve vzájemnou souvislost, zatímco experimentální elektrotechnika vychází z pokusů, z nichž jsou indukci vytvářeny obecně platné vztahy a tím jsou zároveň ověřovány předpoklady a představy teoretické elektrotechniky, kdežto záměrem praktické elektrotechniky je zabývat se praktickým i teoretickým studiem měřicích metod, zdokonalovat a zpřesňovat je. Cílem výuky je podněcování tvůrčího myšlení studentů, přičemž je kladen důraz na osvojování pojmů, přesnou formulaci myšlenek, algoritmizaci postupů řešení, zpracování samostatných prací a projektu.

Teoretická elektrotechnika má dva vědní obory: teorii obvodů (modeluje energii hmotných objektů) a teorii elektromagnetického pole (modeluje hustotu energie hmotných objektů). Předmět Teoretická elektrotechnika I se týká teorie obvodů. Základní úkoly teorie obvodů dělíme do tří kategorií:

1. Analýza obvodu - při analýze identifikujeme chování obvodu. Je dána fyzikální a topologická struktura obvodu (tj. parametry prvků obvodu a schéma zapojení - graf). Cílem analýzy je nalézt odezvy a posléze určit výkony. Řešení je vždy jednoznačné.

2. Syntéza obvodu - při syntéze navrhujeme obvod tak, aby měl předepsané vlastnosti vyhovující zadaným požadavkům. Určujeme fyzikální a topologickou strukturu navrhovaného obvodu. Řešení nikdy není jednoznačné.

3. Identifikace obvodu - jedná se o problém "černé skříňky". Experimentálně zjišťujeme chování obvodu a z něho pak vytváříme hypotézu o možné struktuře. Existují případy, pro něž nelze stanovit žádnou vyhovující strukturu.

1.1. Vymezení veličin

1.1.1 Energie

Stav hmotných objektů látek i polí, objektivně a nejobecněji charakterizujeme pojmem energie a označujeme písmenem w . Energie představuje celkovou práci, která byla vykonána k dosažení daného stavu.

K vědomému posuzování změny stavu hmotného objektu používáme tzv. kvantitu. Co je to kvantita? Přirozenou čili primární kvantitou je čas, podle něhož studujeme změny stavu. Na základě poznanych časových závislostí stavů hmotných objektů usuzujeme o jeho změnách.

1.1.2 Jev

Časovou **změnu stavu hmotného objektu** nazýváme jev a charakterizujeme ho okamžitým výkonem

$$p(t) = \frac{dw}{dt} \quad (1)$$

Okamžitý výkon udává rychlost změny stavu hmotného objektu.

1.1.3 Spádová a průtoková veličina

K posuzování energie je nezbytné vymezit určitou vlastnost hmotného objektu, podle níž budeme jeho stav hodnotit. Energie je funkcí této vlastnosti $w(q)$.

Znamená to, že změnu stavu lze určit pouze tak, že budeme určovat změnu energie podle vymezené vlastnosti a současně změnu vymezené vlastnosti v čase $p(t) = \frac{dw(q)}{dt} = \frac{dw(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dt}$. (2)

Okamžitý výkon nelze určit přímo, ale pouze součinem dvou veličin. Veličině charakterizující změnu energie podle vlastnosti hmotného objektu přiřazujeme přívlastek "spádová" a veličině charakterizující změnu této vlastnosti podle času přívlastek "průtoková". V topologii jevů spádovou veličinu obvykle modelujeme dvojicí uzlů (čili pomyslným rozhraním hmotného objektu vůči okolnímu prostředí) a průtokovou veličinu větví spojující oba uzly.

Rovnice (2) je definičním vztahem fyzikální duality: Průběh výkonu je v jakémkoliv čase jednoznačně určen součinem duálních veličin – spádové a průtokové. Duálními topologickými prvky jsou dvojice uzlů a větev je spojující.

1.1.4 Definice napětí a proudu

Nazveme-li spádovou veličinu elektrické napětí a průtokovou veličinu elektrický proud, vymezíme tím jeden ze dvou vědních oborů elektrotechniky - teorii obvodů. Symbolem pro vlastnost hmotného objektu - q označujeme elektrický náboj. Pak rovnici (2) přepíšeme do tvaru $p(t) = u(t)i(t)$ (3)

$$\text{Přičemž jsme označili napětí rovnici } u(t) = \frac{dw(q)}{dq} \quad (4) \text{ a proud } i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (5).$$

1.1.5 Stav naprázdno a nakrátko

Předchozími rovnicemi definujeme dva ideální stavy. Rovnicí (4) stav naprázdno pro $i(t) = 0$ a rovnicí (5) stav nakrátko pro $u(t) = 0$. Je-li $u(t) \neq 0$ a zároveň $i(t) \neq 0$, pak napětí definujeme podílem výkonu

$$\text{a proudu } u(t) = \frac{p(t)}{i(t)} \quad (6) \text{ a proud podílem výkonu a napětí } i(t) = \frac{p(t)}{u(t)}. \quad (7)$$

Jelikož napětí a proud jsou duální veličiny, což zapisujeme výrazem $u \leftrightarrow i$, pak i rovnice (4) a (5) jsou duální, stejně jako rovnice (4) a (5), (6) a (7), $(4) \leftrightarrow (5)$, $(6) \leftrightarrow (7)$.

1.1.6 Sekundární a terciální kvantita

Z různých důvodů se nezabýváme časovými závislostmi jevů přímo, ale zajímáme se jejich změnami na obecně libovolném časovém intervalu. V elektrotechnice je takovým významným časovým intervalem doba trvání jednoho cyklu sledovaného jevu - perioda T . Četnost period za sekundu nazýváme kmitočet $f = 1/T$, který je sekundární kvantitou. Terciální kvantitou je kruhový kmitočet, nebo-li úhlová rychlost rovnoměrného kruhového pohybu $\omega = 2\pi f$. Je zřejmé, že se změnami kvantit dochází i ke změně kvalit, které je možno posuzovat podle vymezených kvantit. Časovou závislost můžeme vyjadřovat jakékoliv průběhy, kmitočet f můžeme použít pouze pro periodické průběhy a kruhový kmitočet ω pouze pro harmonické průběhy.

1.1.7 Časové funkce

Časové závislosti veličin reálných jevů jsou měřitelné ohraničené časové funkce $v(t)$ na jakémkoliv časovém intervalu $J \in \langle a, b \rangle$, protože existují a mají konečnou hodnotu integrály

$$\int_a^b v(t) \cdot dt, \int_a^b |v(t)|^2 \cdot dt. \quad (x)$$

Měřené číselné (aritmetické) hodnoty veličin zapisujeme do tabulky, následně je graficky zobrazujeme body a poté proložíme (extrapolujeme) křivkou (grafem). Měřené okamžité hodnoty veličin je nejlépe snímat měřicí kartou a zapisovat je (do tabulky) do paměti počítače. Uložená data pak můžeme zobrazit, popřípadě podle potřeby dále zpracovávat metodami numerické matematiky (např. sečítat, násobit, derivovat, integrovat apod.).



Řešený příklad

Číselné (aritmetické) hodnoty zobrazujeme body, extrapolujeme grafem (např. pomocí počítačové grafiky) a analyticky popisujeme funkcí $y(x)$ závislé proměnné veličiny y na nezávislé proměnné veličině x . V následujících obrázcích jsou uvedeny grafy a stručně popsány změřené okamžité hodnoty napětí sítě $u(t)$ (obr. 1), proudu usměrňovače $i(t)$ (obr. 2) a vypočítané okamžité hodnoty výkonu $p(t)$ (obr. 3), práce $A(J)$ (obr. 4) a střední hodnoty práce $A(J)/J$ (obr. 5 a obr. 6). Často časovou funkci označujeme pouze písmeny malé abecedy, např. $u = u(t)$.

1.2. Skalární součin časových funkcí

1.2.1 Okamžitý výkon

Jednoznačnou informaci o změně stavu hmotného objektu v jakémkoliv čase udává hodnota okamžitého výkonu $p(t)$. Hodnotu okamžitého výkonu (obr. 3) v libovolném čase lze však určit pouze aritmetickým součinem okamžité hodnoty napětí (obr. 1) a proudu (obr. 2) $p(t) = u(t) \cdot i(t)$.

1.2.2 Práce

Integrál okamžitého výkonu na daném časovém intervalu $\int_a^b p(t) \cdot dt = A(J)$ udává hodnotu vykonané práce $A(J)$.

Integrál součinu dvou časových funkcí na určitém časovém intervalu je nazýván **skalárním součinem časových funkcí**, který je označován kulatými závorkami a matematicky definován zápisem

$$\int_a^b u(t) \cdot i(t) \cdot dt = (u, i) = A(J).$$

Hodnoty skalárního součinu časových funkcí (obr. 4), stejně jako jeho střední hodnoty $A(J)/J$, jsou závislé na době časového intervalu. Střední hodnoty skalárního součinu tlumeně oscilují (viz obr. 5), přičemž konvergují pro $J \rightarrow \infty$ k hodnotě $\lim_{J \rightarrow \infty} A(J)/J$ (obr. 6). Stejnou střední hodnotu skalárního součinu časových funkcí obdržíme, v případě periodických funkcí, volíme-li dobu časového intervalu rovnající se celočíselnému násobku doby jedné periody T . Pak

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{A(J)}{J} = \frac{A(n \cdot T)}{n \cdot T} = \frac{A(T)}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt,$$

kde n je přirozené číslo. Hodnota skalárního součinu je stanovena součtem ploch vymezených průběhem součinu dvou funkcí vůči časové ose na libovolném časovém intervalu.

1.2.3 Norma funkce

Pro časové funkce vyhovující podmínce (x) je definována na libovolném časovém intervalu J norma funkce jako geometrický průměr skalárního součinu dvou identických funkcí

$$\|v\| = \sqrt{\int_a^b v^2(t) \cdot dt} = \sqrt{(v, v)}.$$

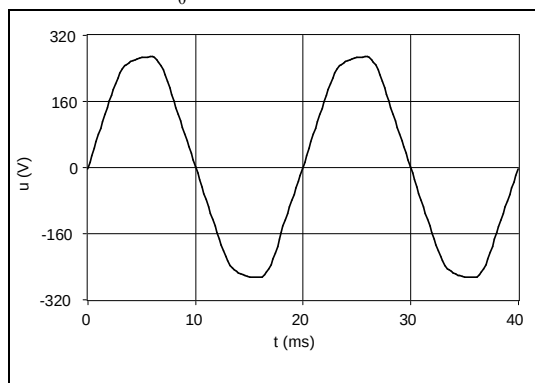
Hodnota normy funkce se rovná druhé odmocnině z hodnoty plochy vymezené průběhem druhé mocniny dané funkce, časovou osou a časovým intervalem.

Norma funkce i skalární součin dvou funkcí jsou reálná čísla, přičemž norma funkce má vždy kladnou hodnotu. Jedině aplikací skalárních součinů časových funkcí lze vytvořit prostředí pro jednoznačnou reprezentaci periodických časových funkcí a vytváření matematických modelů reálných systémů.

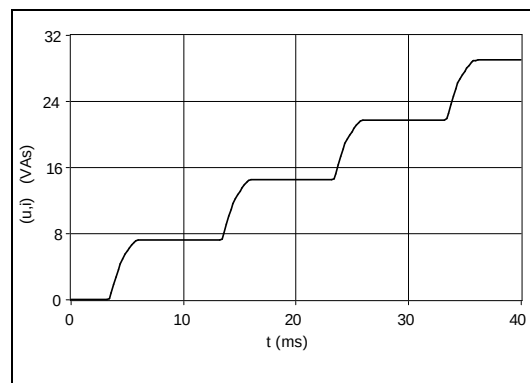
1.2.4 Výkon

Střední hodnotou skalárního součinu napětí a proudu na době periody je definován činný výkon vztahem

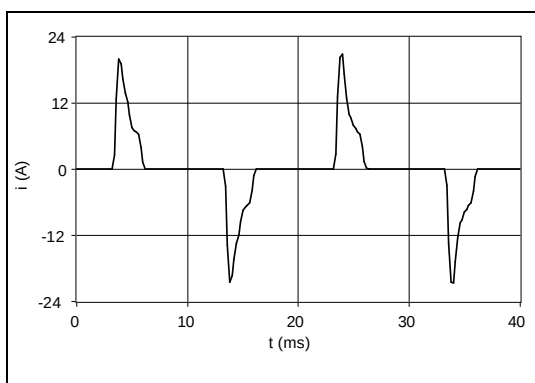
$$P_p = \frac{(u, i)}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt.$$



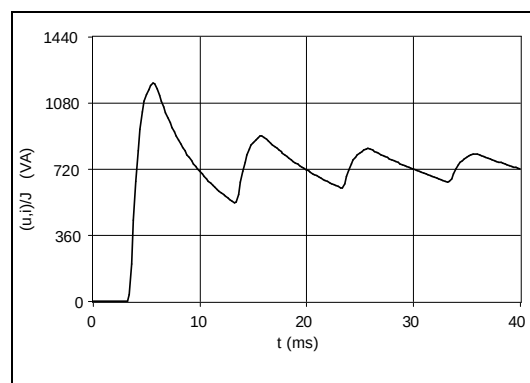
Obr. 1 Průběh napětí: $U = 193,7 \text{ V}$.



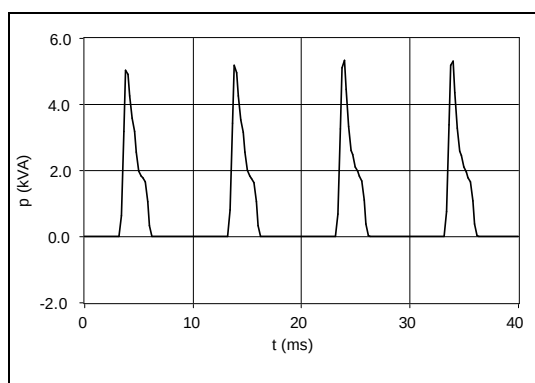
Obr. 4 Průběh skalárního součinu (u, i) .



Obr. 2 Průběh proudu: $I = 6,105 \text{ A}$

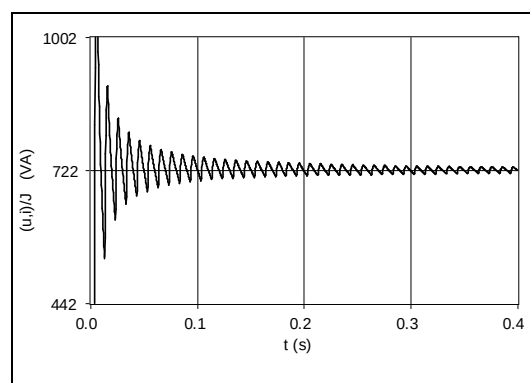


Obr. 5 Průběh podílu $(u, i) / J$.



Obr. 3 Průběh výkonu:

$$P_p = 722 \text{ W}, P = 1182 \text{ VA}, \lambda_p = 0,611.$$



Obr. 6 Průběh podílu $(u, i) / J$.

Jeho hodnota udává přírůstek střední hodnoty práce za dobu jedné periody a zároveň střední hodnotu aktivní složky elektromagnetické energie dodané vnějším obvodem za tutéž dobu.

Střední hodnota skalárního součinu dvou stejných (identických) veličin na době periody udává přírůstek střední hodnoty práce na lineárním prvku s jednotkovou hodnotou parametru, buď $R=1\Omega$, potom $u=1\cdot i$ nebo $G=1S$, potom $i=1\cdot u$ a následně

$$\frac{(u,i)}{T} = \frac{(i,i)}{T} = I^2, \quad \frac{(u,i)}{T} = \frac{(u,u)}{T} = U^2.$$

Podíly $P_p/I^2 = R$, $P_p/U^2 = G$ udávají kolikrát je hodnota činného výkonu větší než střední hodnota práce příslušného lineárního prvku s jednotkovou hodnotou parametru. Součinem hodnot R a G zjistíme, že

$$RG = \frac{P_p^2}{U^2 I^2} = \frac{P_p^2}{P^2} = \lambda_p^2 \leq 1.$$

V důsledku této nerovnosti definujeme rozdílem čtverců hodnotu $P_F^2 = P^2 - P_p^2$, kde písmenem P_F označujeme tzv. fiktivní výkon a písmenem P zdánlivý výkon, který je definován geometrickým průměrem středních hodnot práce prvků s jednotkovými hodnotami parametru

$$P = \sqrt{U^2 I^2}.$$

S ohledem na důslednost (konzistenci) termínů v této publikaci, budeme také místo přívlastku činný používat i přívlastek aktivní v návaznosti na fiktivní, a následně zaváděný termín reaktivní.

1.2.5 Činitel výkonu

V roce 1897 Steinmetz definoval podílem aktivního a zdánlivého výkonu činitel aktivního výkonu, zatímco podílem fiktivního a zdánlivého výkonu definoval v roce 1979 Depenbrock činitel fiktivního výkonu

$$\lambda_p = \frac{P_p}{P}, \quad \lambda_F = \frac{P_F}{P}.$$

1.2.6 Definice složek efektivních hodnot veličin

Efektivní hodnota veličiny je definována druhou odmocninou střední hodnoty práce na době periody prvku s jednotkovou hodnotou parametru vztahem

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{(v,v)}{T}} = \frac{\|v\|}{\sqrt{T}}.$$

Zdánlivý výkon je definován součinem efektivních hodnot napětí a proudu $P=UI$. I aktivní a fiktivní výkon můžeme stanovit součinem efektivních hodnot napětí a proudu, definujeme-li jejich aktivní, resp. fiktivní složky vztahy

$$U_p = \frac{P_p}{I}, \quad I_p = \frac{P_p}{U}, \quad U_F = \frac{P_F}{I}, \quad I_F = \frac{P_F}{U}.$$

1.2.7 Definice imitancí

Podílem výkonů a středních hodnot práce na prvcích s jednotkovými hodnotami imitancí definujeme hodnoty **imitancí** a jejich aktivní a fiktivní složky vztahy:

a) pro imitance

$$Y = \frac{P}{U^2} = \frac{I}{U}, \quad Z = \frac{P}{I^2} = \frac{U}{I},$$

přičemž hodnoty admitance a impedance jsou inverzní, protože v jakémkoliv případě je splněna rovnost $YZ=1$,

b) pro fiktivní složky imitancí

$$Y_F = \frac{P_F}{U^2} = \frac{I_F}{U}, \quad Z_F = \frac{P_F}{I^2} = \frac{U_F}{I},$$

c) aktivní složky imitancí byly definovány v kapitole 2.1, přičemž platí

$$Y_P = G = \frac{P_P}{U^2} = \frac{I_P}{U}, \quad Z_P = R = \frac{P_P}{I^2} = \frac{U_P}{I}.$$

1.3. Stručný komentář

Pomocí definovaných složek lze jednoznačně sestavit rovnice (matematické modely):

$$P^2 = P_P^2 + P_F^2 = P^2(\lambda_P^2 + \lambda_F^2), \quad (\text{xx})$$

$$I^2 = I_P^2 + I_F^2 = I^2(\lambda_P^2 + \lambda_F^2),$$

$$Y^2 = Y_P^2 + Y_F^2 = Y^2(\lambda_P^2 + \lambda_F^2),$$

$$U^2 = U_P^2 + U_F^2 = U^2(\lambda_P^2 + \lambda_F^2),$$

$$Z^2 = Z_P^2 + Z_F^2 = Z^2(\lambda_P^2 + \lambda_F^2),$$

kteří jsou matematickým modelem paralelního či sériového řazení obvodových prvků – duálních topologických útvarů, jenž jsou charakteristické stejnými (identickými) hodnotami výkonů duálně korespondujících prvků. Paralelní model je charakterizován společným napětím a sériový model je charakterizován společným proudem.

Z výše uvedených rovnic je zřejmá rovnost (identita)

$$\lambda_P^2 + \lambda_F^2 = 1,$$

přičemž činitel aktivního výkonu je definován podílem hodnoty skalárního součinu napětí a proudu a součinu hodnot jejich norem

$$\lambda_P = \frac{P_P}{P} = \frac{(u, i)}{\sqrt{(u, u) \cdot (i, i)}} = \frac{(u, i)}{\|u\| \cdot \|i\|}.$$

3) Určením hodnoty činitele aktivního výkonu a efektivní hodnoty napětí a proudu stanovíme jednoznačně všechny složky matematických modelů. Aktivní složky modelují rozptyl (disipaci) elektromagnetické energie a v náhradních schématech je aktivní složka imitance modelována rezistorem. Zdánlivý výkon modelujeme imitancí. V náhradních schématech nelze modelovat fiktivní složky, protože prezentovaným postupem jim nelze jednoznačně přiřadit fyzikální význam. Význam slova fiktivní je možné chápat i jako „doposud nespecifikovaný“.



Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Skriptum ČVUT Praha 1999, kapitoly 1, 2, 3 (podkapitoly 3.1 až 3.5)



Další studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitoly 2.1, 2.2, 2.4



Příklady

1. Napište slovní definici napětí, proudu a výkonu.

Řešení:

Napětí $u = \frac{dw}{dq}$ udává hodnotu změny elektromagnetické energie na jednotku náboje, proud $i = \frac{dq}{dt}$ udává ... (doplňte)
výkon

2. Napište, jakou hodnotu má výkon ve stav naprázdno a nakrátko

Řešení:

Stav naprázdno je charakterizován jakoukoliv hodnotou napětí a nulovou hodnotou proudu, proto je hodnota jejich součinu – výkonu vždy nulová.

Stav nakrátko ... (doplňte)
.....

3. Uveďte fyzikální význam aritmetického a skalárního součinu okamžitých hodnot napětí a proudu.

Řešení:

Aritmetický součin udává hodnotu přírůstku práce v časovém okamžiku, skalární součin ... (doplňte)
.....

4. Pro zadané hodnoty $P_p = 6W$, $U = 5V$, $I = 2A$ určete číselné hodnoty matematických modelů.

Řešení:

Nejdříve určíme hodnotu fiktivní složky výkonu

$$P_F = \sqrt{U^2 I^2 - P_p^2} = \sqrt{5^2 \cdot 2^2 - 6^2} = 8 \text{ VA}$$

a) pro paralelní model stanovíme složky proudu

$$I_p = \frac{P_p}{U} = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ A}; \quad I_F = \frac{P_F}{U} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ A}$$

a následně admitanci a její složky

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ S}; \quad Y_p = \frac{I_p}{U} = \frac{1,2}{5} = 0,24 \text{ S}; \quad Y_F = \frac{I_F}{U} = \frac{1,6}{5} = 0,32 \text{ S}.$$

b) pro sériový model stanovíme složky ... (doplňte)

.....
a následně ... (doplňte)

.....

5. Po vyřešení příkladu 4. ověřte, zda hodnoty admitance a impedance, resp. jejich složek jsou inverzní.

Řešení:

Součin vypočtených hodnot admitance a impedance $YZ = 0,4 \cdot 2,5 = 1$ je inverzní, součin vypočtených hodnot jejich aktivních složek $Y_p Z_p = GR = 0,24 \cdot 1,5 = 0,36$ není inverzní, (doplňte)

.....



Otázky

1. Čím charakterizujeme stav hmotného objektu?
2. Jak popisujeme změnu stavu hmotného objektu?
3. Jak je definován skalární součin časových funkcí?
4. Jak získáme efektivní hodnotu veličiny?
5. Co to jsou imitance?



Odpovědi na otázky naleznete ve větách se slovy zvýrazněnými tučnou kurzívou.



Úlohy k řešení

Z rovnice výkonu (xx) odvoďte matematické modely:

1. Napětí
2. Proudů
3. Admitance
4. Impedance
5. Posuďte, zda hodnoty odporu a vodivosti jsou inverzní



Klíč k řešení

Druhou mocninu výkonu vyjádříme součinem druhých mocnin efektivní hodnoty napětí a efektivní hodnoty proudu a následně dělíme:

1. druhou mocninou efektivní hodnoty napětí a upravíme (obdržíme model paralelního zapojení prvků),
2. druhou mocninou efektivní hodnoty proudu a upravíme (obdržíme model sériového zapojení prvků).
3. Rovnici paralelního modelu dělíme druhou mocninou efektivní hodnoty napětí a upravíme.
4. Rovnici sériového modelu dělíme druhou mocninou efektivní hodnoty proudu a upravíme.
5. Hodnoty jsou inverzní pouze v případě, když je jejich součin roven jedné, jinak inverzní nejsou. Řešení je v dávce 1.2.4.



Autokontrola

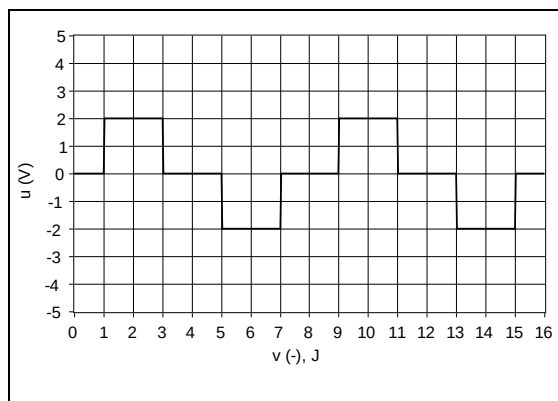
Pokud jste reagovali správně na více jak polovinu podnětů z každé oblasti, pokračujte ve studiu jiné kapitoly, pokud ne, pak text studijní opory znovu prostudujte a opakovaně vypracujte odpovědi na podněty.



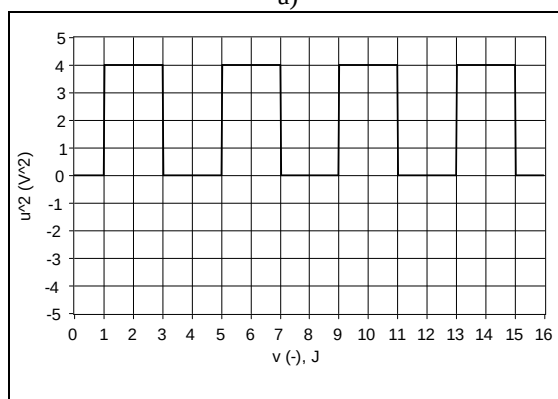
Zadání 1. samostatné práce

Písemně, vedle obrázku 7, popište postup výpočtu efektivní hodnoty.

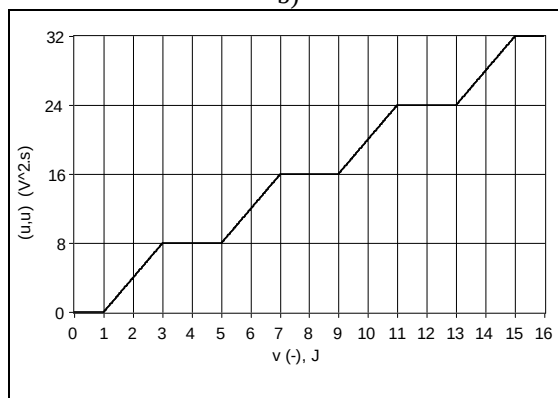
Zpracoval: Jaromír Kijonka



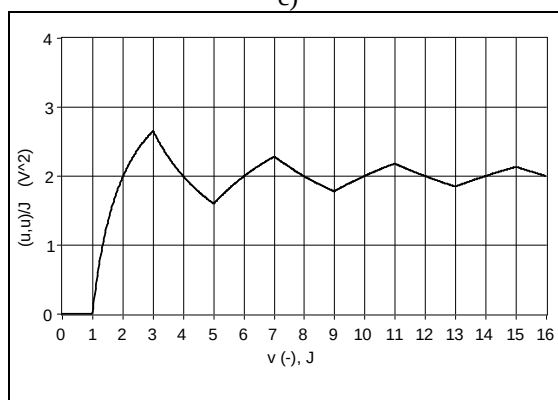
a)



b)



c)



d)

Obr. 7 Grafické znázornění postupu určení efektivní hodnoty napětí, $U = \sqrt{2}$ V.

2. ANALÝZA LINEÁRNÍCH OBVODŮ V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- popsat elektrický obvod základními pojmy z oblasti analýzy obvodových prvků a obvodových veličin,
- vyjádřit graficky obvodové veličiny na časové ose (oscilogram) a znázornit jejich fázory v komplexní rovině,
- definovat hodnoty obvodových prvků a veličin pomocí komplexních čísel,
- sestavit fázorový diagram elektrického obvodu.



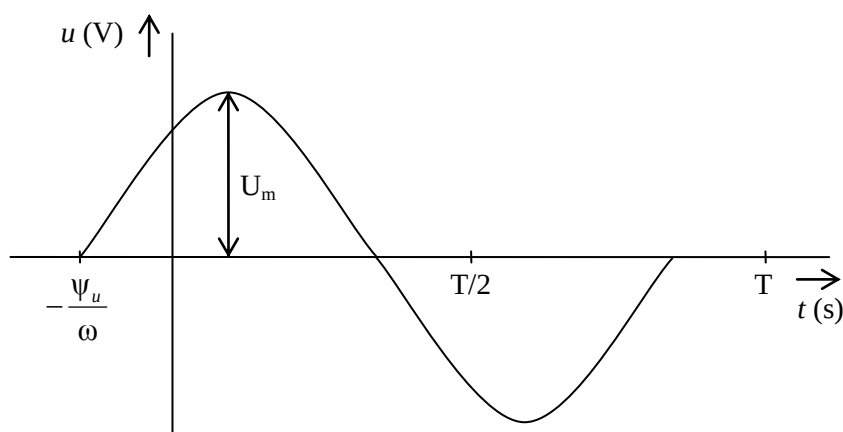
Výklad

Veličiny s harmonickým časovým průběhem (nazývané také harmonické veličiny) mají v elektrotechnické praxi mimořádný význam, protože prakticky celá výroba a rozvod elektrické energie jsou realizovány pomocí harmonických průběhů napětí a proudů.

Harmonické veličiny můžeme vyjádřit pomocí funkcí sinus nebo cosinus. Například harmonické napětí znázorněné na obr. 8 můžeme matematicky vyjádřit:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) \quad (1)$$

u je	okamžitá hodnota napětí (V),
U_m –	maximální hodnota napětí (amplituda) (V),
$\omega = 2\pi/T = 2\pi \cdot f$ –	úhlový kmitočet (úhlová rychlost) ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$),
Ψ_u –	počáteční fáze (rad),
T –	perioda harmonické funkce (s),
f –	frekvence harmonického děje (s^{-1}), (Hz).



Obr. 1 Harmonické napětí $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \Psi_u)$

Efektivní a střední hodnota harmonických veličin

Pro praktické počítání je výhodné zavést pojmy:

Efektivní hodnota střídavého proudu – je to hodnota stejnosměrného proudu (tedy v ustáleném stavu neměnného), který má stejné tepelné a mechanické účinky jako daný střídavý proud, definujeme ho pomocí ztrát na jednotkovém odporu za 1 periodu:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 \cdot I_m \Rightarrow I_m = \sqrt{2} \cdot I$$

Střední hodnotu je nutné definovat za polovinu periody (střední aritmetická hodnota jedné poloviny periody):

$$I_{str.} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \doteq 0,637 \cdot I_m$$

Stejným způsobem jsou definovány i efektivní a střední hodnoty napětí.

Především efektivní hodnoty mají pro praxi velký význam. Když mluvíme o proudu a napětí máme vždy na mysli hodnoty efektivní (např. jmenovité hodnoty napěťových soustav 400 V, 22 kV, 110 kV jsou hodnoty efektivní apod.), pokud není zdůrazněno, že se jedná o hodnoty jiné. Z toho důvodu, u harmonických veličin, označujeme efektivní hodnoty bez indexů (U , I), střední a maximální hodnoty s indexy (U_m , I_m ; $U_{str.}$, $I_{str.}$).

2.1. Okamžitý výkon

Okamžitý výkon je definován jako součin okamžitých hodnot napětí a proudu:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = U_m \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = \\ &= U_m \cdot I_m \cdot (\sin^2 \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega t) = \\ &= U \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [(1 - \cos 2\omega t) \cdot \cos \varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi] = \\ &= U \cdot I \cdot [\cos \varphi - \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi] = \\ &= U \cdot I \cdot [\cos \varphi - (\cos 2\omega t \cdot \cos \varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi)] = \\ &= U \cdot I \cdot [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] = S [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] \end{aligned} \quad (2)$$

kde φ je fázovým posunem mezi u a i , vzhledem k tomu, že počáteční fáze proudu je rovna nule, je φ v tomto případě také počáteční fáze napětí,

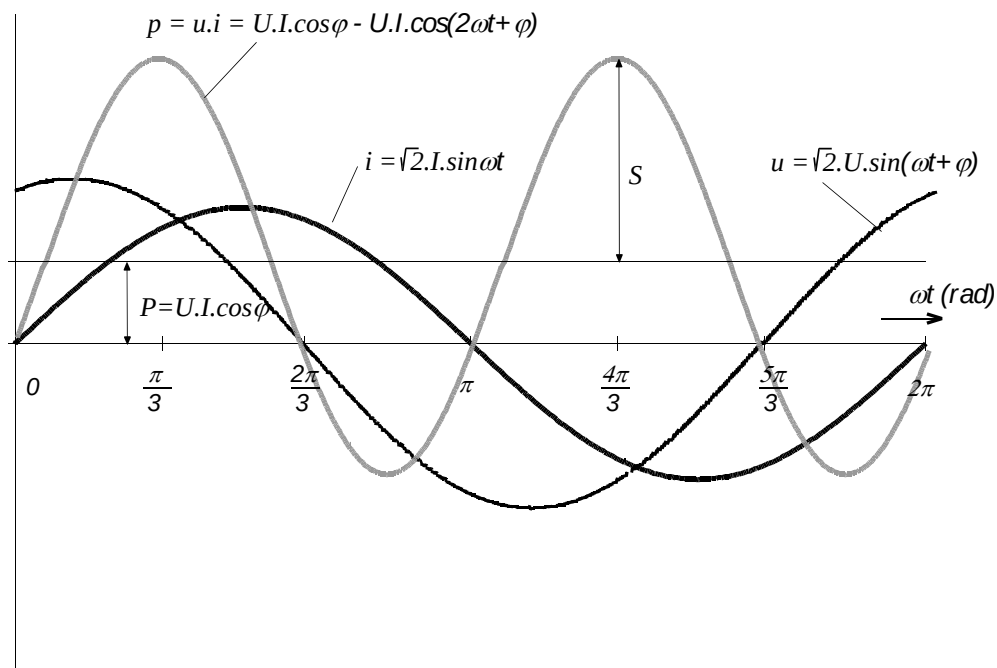
S - zdánlivý výkon (V.A)

Okamžitý výkon se skládá z konstantní složky (její hodnota je rovna činnému výkonu) a periodické složky s úhlovým kmitočtem 2ω (její amplituda je rovna zdánlivému výkonu). Během kladných hodnot okamžitého výkonu dodává zdroj energii činnou - ta se v obvodu mění nevratně na jiný druh energie, a jalovou - ta se v obvodu mění na energii elektrického pole kapacitorů a energii magnetického pole induktorů. Během záporných hodnot se část energie (jalová energie) vrací z obvodu do zdroje.

Činný výkon kryje v obvodu činné ztráty a vytváří ve spotřebiči činnou práci. Jalový výkon vytváří v obvodu magnetická a elektrická pole, která ke své činnosti potřebují elektrické stroje a přístroje.

Činný výkon je definován jako střední hodnota okamžitého výkonu za dobu jedné periody:

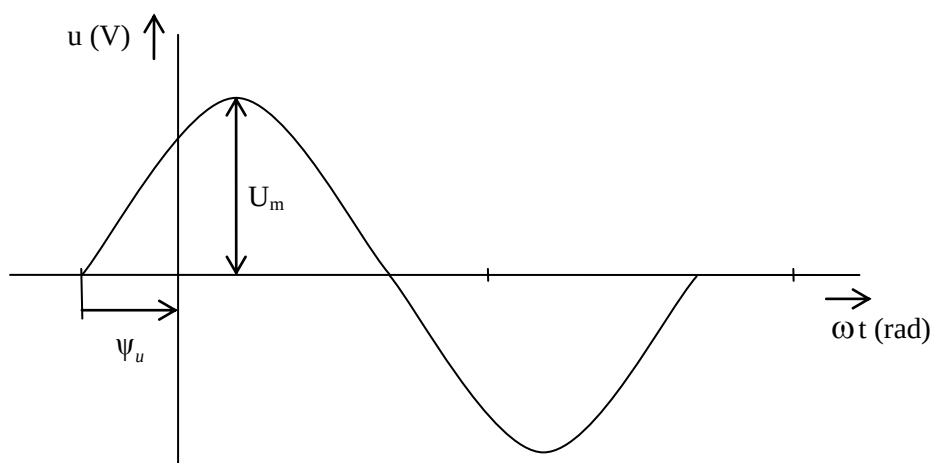
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I \cdot [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] \, dt = U \cdot I \cdot \cos \varphi \text{ (W)} \quad (3)$$

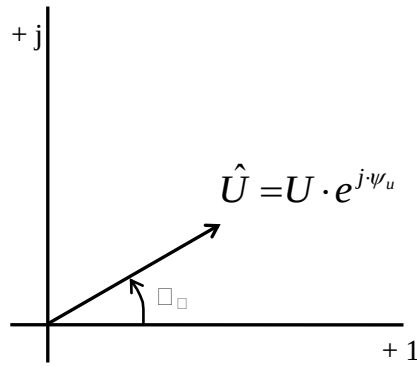


Obr. 2 Grafické znázornění vztahu (2)

2.2. Grafické znázornění veličin harmonických obvodů v komplexní rovině, fázor

Při řešení obvodů velmi často potřebujeme provádět základní výpočetní úkony (sčítání, odčítání apod.) a to je při vyjádření obvodových veličin pomocí sinových resp. kosinových funkcí velmi pracné. Z toho důvodu je při počítání ve střídavých obvodech využíván především symbolicko – komplexní počet, při kterém veličiny harmonických obvodů nahrazujeme jejich fázory. Z matematického hlediska jsou fázory komplexní čísla a také tak se s nimi počítá (musí být splněna podmínka stejné frekvence všech veličin). Vztah mezi obvodovou veličinou a jejím fázorem je zřejmý z obr. 3 a obr. 4.

Obr. 3 Jedna perioda harmonického napětí $u = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \psi_u)$



Obr. 4 Fázor napětí z obr 3

Na obr. 4 je fázor napětí z obr. 10, důležité je uvědomit si, že počáteční fáze v Gaussovo rovině představuje orientovaný úhel mezi kladným směrem reálné osy a směrem fázoru. Kladné počáteční fáze posunují fázor v kladném směru otáčení v Gaussovo rovině, tj. proti smyslu otáčení hodinových ručiček a naopak.

S využitím Eulerova vztahu můžeme vyjádřit fázory ve složkovém tvaru:

$$\hat{U} = U \cdot e^{\pm j\psi_u} = U \cdot \cos \psi_u \pm jU \cdot \sin \psi_u \quad (4)$$

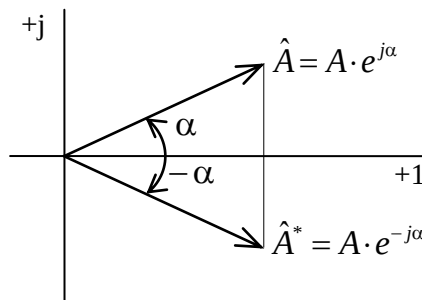
Exponenciální tvar je vhodný pro násobení, mocnění, dělení a odmocňování, složkový tvar se užívá při sčítání a odčítání.

2.3. Komplexní výkon

V Gaussově rovině definujeme komplexní výkon, jehož absolutní hodnota je rovna výkonu zdánlivému z předcházející kapitoly:

$$\hat{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = P \pm jQ_{kap}^{ind} \quad (\text{V}\cdot\text{A}; \text{W}, \text{var}) \quad (5)$$

kde $\hat{I}^*$ je komplexně sdružený fázor k fázoru proudu $\hat{I}$
Význam komplexně sdružených čísel je zřejmý z obr. 5.

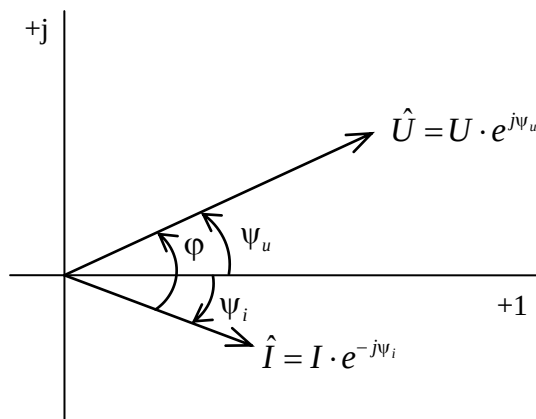


Vyjádříme-li $\hat{S}$ ve složkovém tvaru, představuje reálná část činný výkon P a imaginární část jalový Obr. 5

Komplexně sdružená čísla $\hat{A}$ a $\hat{A}^*$ (jsou umístěna zrcadlově vůči reálné ose)

výkon Q . Je zřejmé, jak je uvedeno i ve vztahu (5), že zatímco reálná část (činný výkon) je vždy kladná, imaginární část (jalový výkon) může nabývat kladné i záporné hodnoty. Při této definici

komplexního výkonu, je kladné znaménko u jalových výkonů s charakterem induktivním a záporné znaménko u jalových výkonů s charakterem kapacitním.



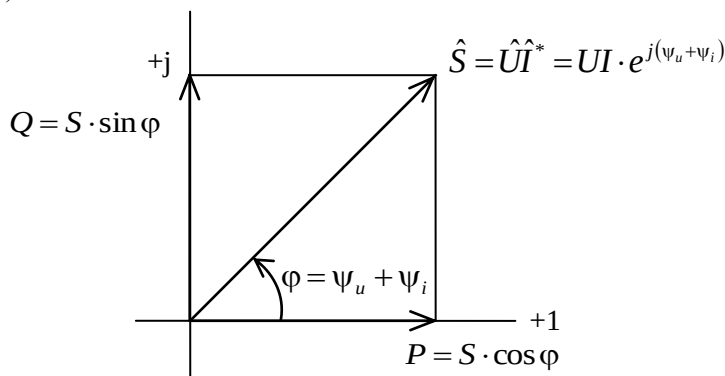
Obr. 6 K příkladu určení komplexního výkonu, φ je fázový posun mezi I a U

Nyní si určíme komplexní výkon pro obvod, jehož napětí a proud jsou znázorněny na obr. 6. Podle vzájemné polohy fázorů proudu a napětí je zřejmé, že se jedná o obvod s induktivním charakterem (napětí předbíhá proud). Komplexně sdružené číslo k fázoru proudu $\hat{I}$, vyjádříme v exponenciálním tvaru je $\hat{I}^* = I \cdot e^{+j\psi_i}$ a dosadíme do (5):

$$\hat{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = U \cdot e^{j\psi_u} \cdot I \cdot e^{+j\psi_i} = UI \cdot e^{j(\psi_u + \psi_i)} = S \cdot e^{j\varphi} = S \cdot \cos \varphi + jS \cdot \sin \varphi = P + jQ \quad (6)$$

Také znaménko exponentu výkonu S a u jalového výkonu Q potvrzuje, že se jedná o obvod s induktivním charakterem.

Graficky je vztah (6) znázorněn na obr. 7.



Obr. 7 Grafické znázornění výkonů (trojúhelník výkonů)

V praktických případech nás zajímají především absolutní hodnoty jednotlivých výkonů:

$$S = U \cdot I \text{ (V.A)}; \quad P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \text{ (W)}; \quad Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \text{ (var)} \quad (7)$$

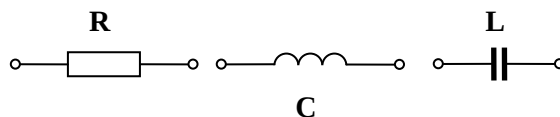
Velmi důležitým pojmem v elektrotechnice je výraz $\cos \varphi$, kterému se říká účinník. Jeho velikost se při rozvodu elektrické energie přísně sleduje - neměl by klesnout pod hodnotu 0,95. To úzce souvisí s energetickými ztrátami při rozvodu elektrické energie a tedy i s jeho ekonomikou.

2.4. Jednoduché obvody střídavého proudu

Jak již bylo uvedeno dochází ve střídavých obvodech k nevratné přeměně elektrické energie na jiné druhy energií a k vytváření magnetických a elektrických polí. I když ve skutečnosti k těmto jevům dochází v každém místě obvodu, je vhodné při řešení ustálených, resp. pomaluběžných jevů soustředit

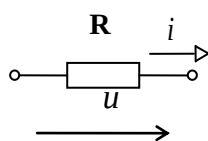
tyto děje do ideálních prvků: rezistoru (ideálního odporníku), kde probíhá nevratná změna elektrické energie na teplo, induktoru (ideální cívky), kde vzniká magnetické pole a kapacitoru (ideálního kondenzátoru), kde vzniká jen elektrické pole.

Jedinou elektrickou vlastností rezistoru je rezistance (odpor) – symbol R (Ω), induktoru indukčnost - L (H) a kapacitoru kapacita – C (F).



Obr. 8 Značky základních prvků elektrických obvodů

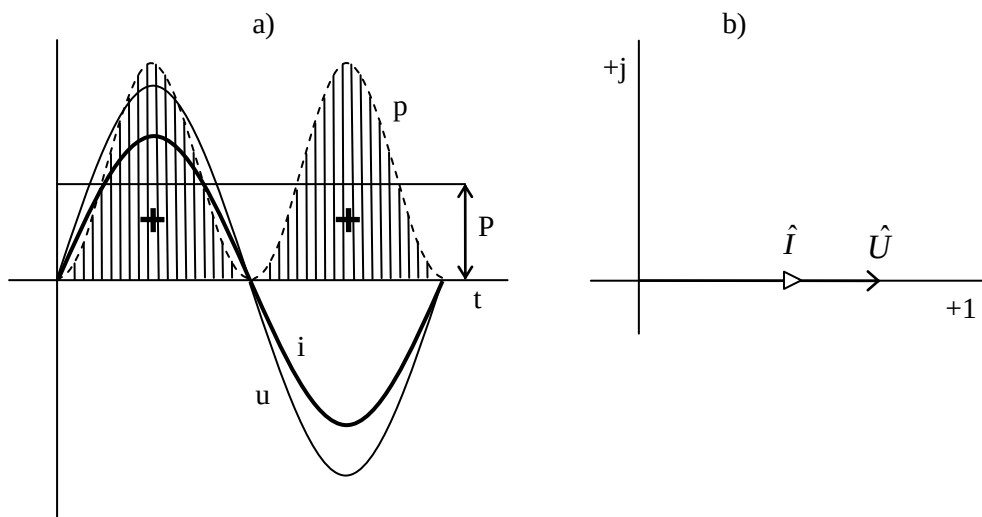
Rezistor napájený harmonickým napětím $u = U_m \cdot \sin \omega t$



Obr. 9 Počítací šipky proudu a napětí rezistoru

Rezistorem připojeným ke zdroji harmonického napětí protéká harmonický proud stejné frekvence:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \cdot \sin \omega t}{R} = I_m \cdot \sin \omega t \quad (8)$$



Obr. 10 Proud, napětí a okamžitý výkon v obvodu s rezistorem

a) časový průběh, b) fázorový diagram

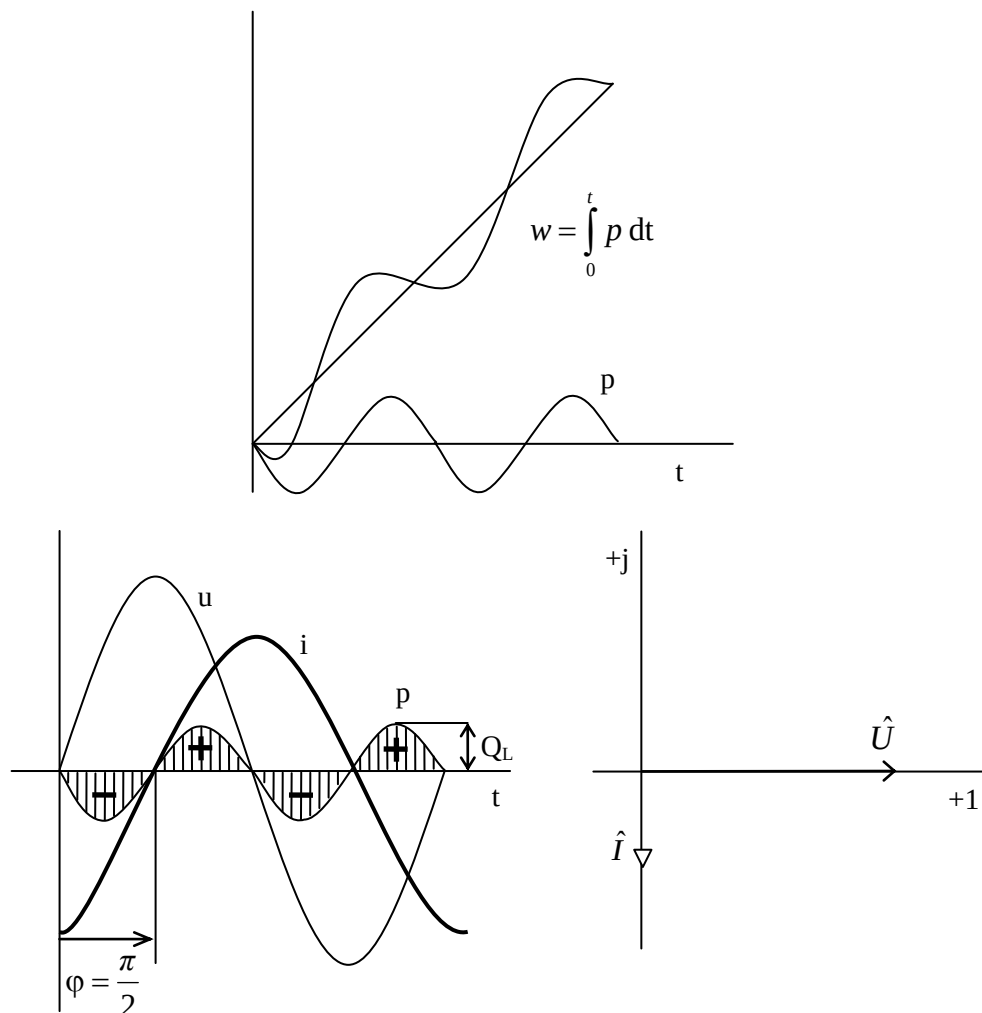
Pro okamžitý výkon můžeme napsat:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = U_m I_m \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) = UI - UI \cos 2\omega t \quad (9)$$

Okamžitý výkon – obr.10 se skládá ze dvou složek : ze stejnosměrné a střídavé, která kmitá s dvojnásobnou frekvencí okolo složky stejnosměrné. Kmitavý výkon nabývá pouze nezáporných hodnot, to znamená, že elektrická energie proudí jen ze zdroje do rezistoru kde se nevratně mění na teplo. V obvodu není jalový výkon. Zdánlivý výkon je roven výkonu činnému:

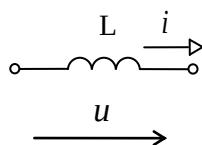
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (UI - UI \cos 2\omega t) \, dt = UI \quad (P = UI \cos 0 - \text{podle (7)}) \quad (10)$$

Na obr.11 je zakreslen průběh energie, která- je integrálem výkonu podle času.



Obr. 11 Průběh energie a výkonu rezistoru

Induktor napájený harmonickým napětím $u = U_m \cdot \sin \omega t$



Obr. 12 Počítací šipky proudu a napětí induktoru

Při analýze tohoto obvodu vycházíme z indukčního zákona, podle kterého vypočteme napětí na induktoru protékaným proudem:

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} = U_m \sin \omega t \quad (11)$$

kde Φ je magnetický tok (Wb)

z (11) vypočteme proud:

$$i = \frac{1}{L} \int U_m \sin \omega t \, dt = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (12)$$

Vidíme, že proud induktoru je zpožděný za napětím o $\frac{\pi}{2}$

Grafické znázornění proudu, napětí a okamžitého výkonu je na obr.13. Z (12) vyjádříme vztah pro maximální a efektivní hodnotu proudu:

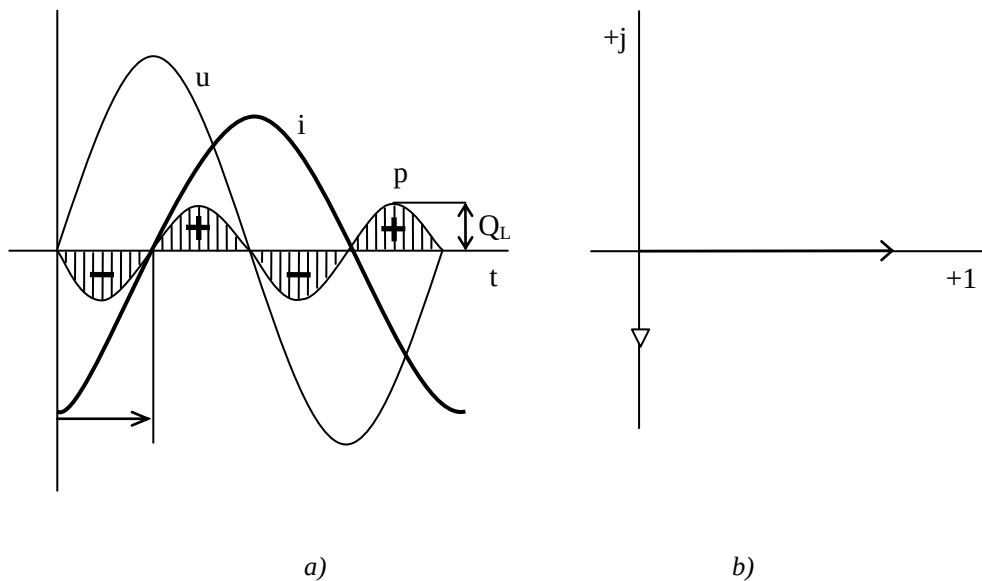
$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} \quad I = \frac{U}{\omega L} \quad (13)$$

Výraz ve jmenovateli nazýváme induktivní reaktance a označujeme

$$X_L = \omega \cdot L \quad (\Omega) \quad (14)$$

Dále určíme okamžitý výkon:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = -UI \sin 2\omega t \quad (15)$$



Obr. 13 Proud, napětí a okamžitý výkon induktoru

a) časový průběh, b) fázorový diagram

Vidíme, že okamžitý výkon je také harmonický a má dvojnásobnou frekvenci (oproti u a i). Jeho střední hodnota za jednu periodu (činný výkon) je rovna nule:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = -\frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t \, dt = 0 \quad \left(P = UI \cos \frac{\pi}{2} \right) \quad (16)$$

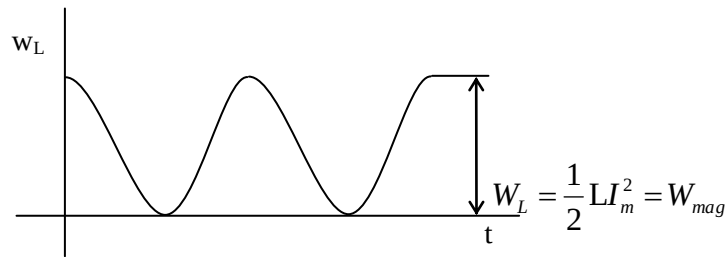
V induktoru nedochází k nevratné přeměně elektrické energie na jiný druh energie.

Energie dodaná zdrojem do induktoru za čtvrtperiodu (od $T/4$ do $T/2$, resp. od $3/4 T$ do T), když proud stoupá z nulové hodnoty do maxima:

$$w_L = \int_{T/4}^{T/2} ui \, dt = -UI \int_{T/4}^{T/2} \sin 2\omega t \, dt = \omega LI^2 \frac{1}{2\omega} [\cos 2\omega t]_{T/4}^{T/2} = LI^2 \frac{1}{2\omega} [1 - (-1)] = LI^2 = \frac{1}{2} LI_m^2 = W_{mag} \quad (17)$$

Ve zbylých čtvrtperiodách, kdy klesá proud z maxima do nuly, bychom dostali stejné výrazy, ale se záporným znaménkem, to odpovídá toku energie z induktoru do zdroje.

Mezi induktorem a zdrojem nastává kmitání energie při které se nevykonává žádná práce (když jsme zanedbali všechny odpory v obvodu). Když mají napětí a proud současně kladné nebo záporné hodnoty dodává zdroj energii do induktoru, kde se mění na energii magnetického pole. Když mají proud a napětí současně nestejnou polaritu probíhá tento dej obráceně, z induktoru je dodávána energie do zdroje. Amplitudu kmitavého výkonu nazýváme jalovým indukčním výkonem (18).



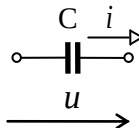
Obr. 14 Průběh energie na induktoru

$$Q_L = UI \quad (\text{var}) \quad (18)$$

Na obr.14 je průběh energie v induktoru, jeho maximální hodnota představuje maximální energii, kterou může akumulovat induktor ve formě energie magnetického pole:

$$W_L = \frac{1}{2} LI_m^2 = W_{mag} \quad (\text{var.s}) \quad (19)$$

Kapacitor napájený harmonickým napětím $u = U_m \cdot \sin \omega t$



Obr. 15 Počítací šipky proudu a napětí kapacitoru

Při analýze kapacitoru připojeného na harmonické napětí vycházíme ze vztahu pro náboj a proud kondenzátoru:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad q = Cu \quad (20)$$

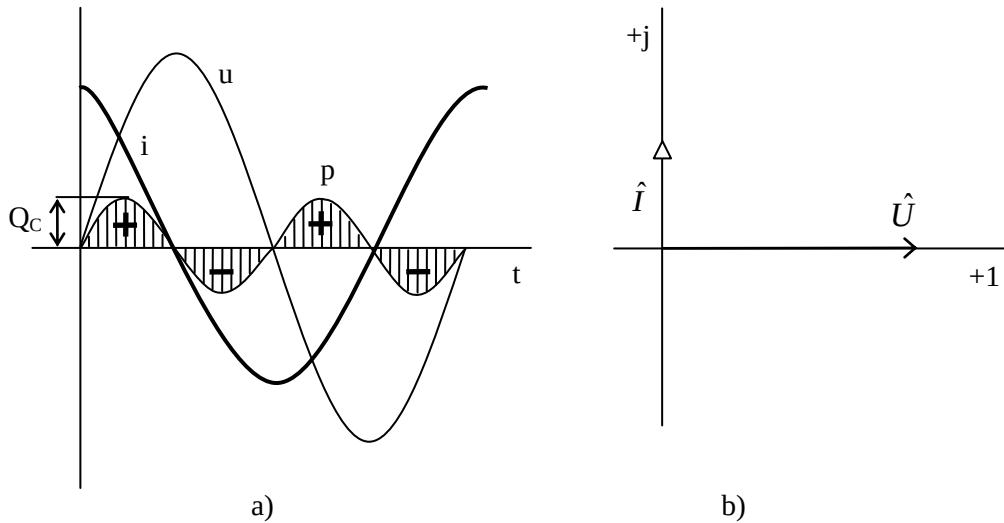
Pro proud při harmonickém napětí dostaneme z (20):

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_m \sin \omega t) = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (21)$$

Vidíme, že i v tomto případě je proud harmonický, má stejnou frekvenci jako napětí, ale je před napětím posunutý o $\frac{\pi}{2}$. Z (21) určíme:

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{X_C}, \quad I = \frac{U}{X_C}, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (22)$$

kde X_C je kapacitní reaktance (Ω).



Obr. 16 Proud, napětí a okamžitý výkon kapacitoru

a) časový průběh, b) fázorový diagram

Určíme okamžitý výkon:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \cos \omega t = UI \sin 2\omega t \quad (23)$$

Okamžitý výkon je harmonický a kmitá s dvojnásobnou frekvencí okolo nuly. Činný výkon je nulový:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t \, dt = 0 \quad (P = UI \cos \frac{\pi}{2}) \quad (24)$$

Energie dodaná zdrojem kapacitoru za čtvrtperiodu od 0 do $T/4$, resp. od $T/2$, do $3/4 T$ do T), když napětí stoupá z nulové hodnoty do maxima:

$$w_C = \int_0^{T/4} ui \, dt = UI \int_0^{T/4} \sin 2\omega t \, dt = -\omega CU^2 \frac{1}{2\omega} [\cos 2\omega t]_0^{T/4} = -CU^2 \frac{1}{2} [-1 - 1] = CU^2 = \frac{1}{2} CU_m^2 = W_{el} \quad (25)$$

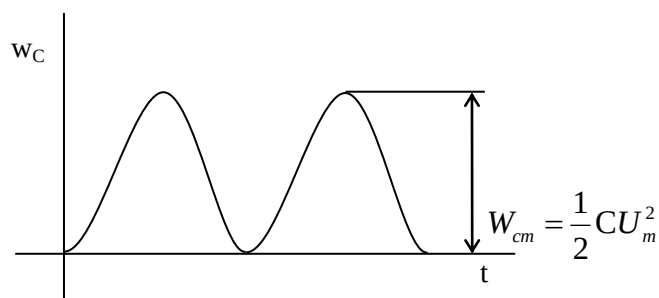
Ve zbylých čtvrtperiodách, kdy klesá napětí z maxima do nuly, bychom dostali stejné výrazy, ale se záporným znaménkem, to odpovídá toku energie z kapacitoru do zdroje.

Mezi kapacitorem a zdrojem nastává kmitání energie při které se nevykonává žádná práce (zanedbali jsme všechny odpory v obvodu). Když mají napětí a proud současně kladné nebo záporné hodnoty dodává zdroj energii do kapacitoru, kde se akumuluje ve formě energie elektrického pole. Když mají proud a napětí současně nestejnou polaritu probíhá tento dej obráceně, z kapacitoru je dodávána energie do zdroje. Amplitudu kmitavého výkonu nazýváme jalovým kapacitním výkonem (26).

$$Q_C = UI \quad (\text{var}) \quad (26)$$

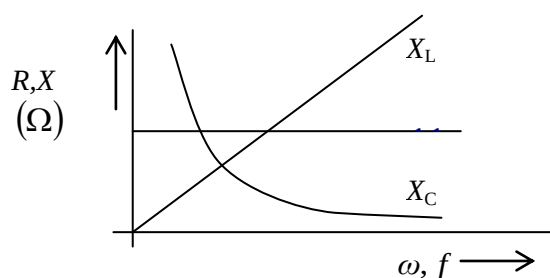
Na obr. 17 je průběh energie kapacitoru, její maximální hodnota představuje maximální energii, kterou může akumulovat kapacitor ve formě energie elektrického pole:

$$W_{cm} = \frac{1}{2} CU_m^2 \quad (\text{var.s}) \quad (27)$$



Obr. 17 Průběh energie v kapacitoru

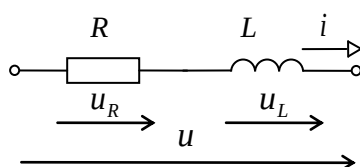
2.5. Shrnutí vlastností R, L, C prvků



Obr.18 Závislost R, X_L a X_C na frekvenci

Z obr. 15 je zřejmé chování obvodových prvků v harmonických obvodech. Nezávislost rezistance na frekvenci je možná jen při zanedbání skinefektu (nerovnoměrného rozložení proudu po průřezu vodiče), to platí jen pro frekvence řádově stovek Hz. Při vyšších frekvencích je potřebné vzrůst odporu vlivem skinefektu respektovat.

Obvod rezistoru a induktoru v sérii napájený harmonickým napětím $u = U_m \cdot \sin \omega t$



Obr. 19 Sériový obvod R, L připojený na harmonické napětí

Podle Kirchhoffova smyčkového zákona a vyjádření jednotlivých napětí můžeme napsat:

$$u_L + u_R = u; \quad L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin \omega t \quad (28)$$

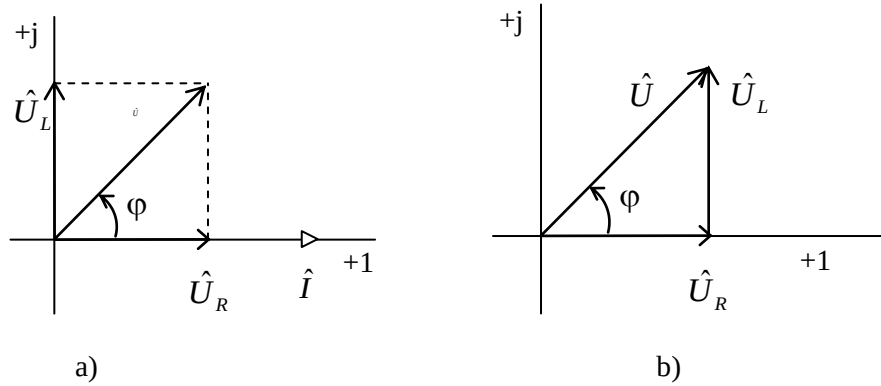
Rovnice (28) je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty. Pomocí fázorů můžeme rovnici (28) vyjádřit:

$$\hat{U}_R + \hat{U}_L = R\hat{I} + j\omega L\hat{I} = \hat{Z}\hat{I} = \hat{U} \quad (29)$$

$$\hat{Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}} = Z \cdot e^{j\varphi} \quad (\Omega) \text{ je impedance} \quad (30)$$

kde $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{\omega L}{R}$ je fázový posuv mezi proudem a celkovým napětím $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ –

obr.20, ve kterém jsme proud položili do reálné osy $\hat{I} = I \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j0}$



Obr. 20 Fázorový diagram obvodu R, L v sérii - grafické znázornění vztahu (29) (a), trojúhelník napětí sériového obvodu R, L (b)

Řešení diferenciální rovnice (28) pro ustálený stav:

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right) = I_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (31)$$

Vidíme, že řešení pomocí fázorů je jednodušší, než řešení pomocí okamžitých hodnot.

Z předchozího můžeme definovat Ohmův zákon pro harmonické obvody:

$$Z = \frac{U}{I}; \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (32)$$

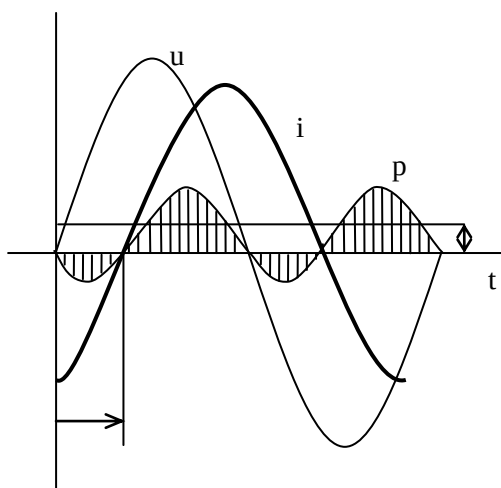
Když vynásobíme okamžité hodnoty napětí a proudu dostaneme vztah pro okamžitý výkon:

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin \omega t (\cos \varphi \sin \omega t - \sin \varphi \cos \omega t) = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) - \sin \varphi \sin 2\omega t] = UI [\cos \varphi - (\cos \varphi \cos 2\omega t) + \sin \varphi \sin 2\omega t] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (33)$$

Okamžitý výkon je kmitavý a skládá se ze stejnosměrné složky okolo které kmitá složka střídavá s dvojnásobnou frekvencí – obr.21. Jeho integrací za jednu periodu dostaneme činný výkon:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (UI \cos \varphi - UI \cos 2\omega t) dt = UI \cos \varphi \quad (34)$$

Při kladných hodnotách okamžitého výkonu proudí energie ze zdroje do obvodu, při záporných naopak z obvodu do spotřebiče. Rozíl mezi těmito hodnotami je energie, která se v obvodu (v rezistoru) přeměnila nevratně na teplo – jí odpovídá činný výkon zdroje.



Obr. 21 Časové průběhy proudu, napětí a okamžitého výkonu obvodu R, L v sérii

Pro lepší pochopení jednotlivých výkonů v obvodu vypočteme zvlášť okamžitý výkon rezistoru - u_R a i jsou ve fázi (obr.22):

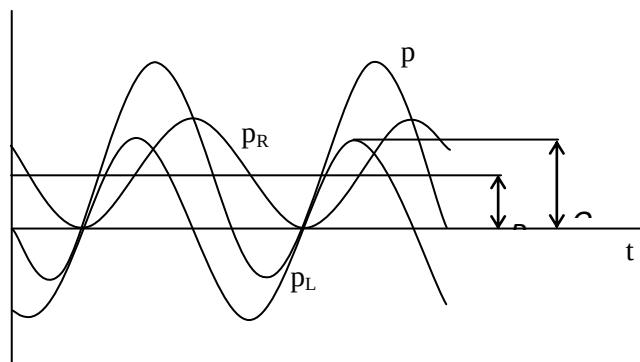
$$\begin{aligned} p_R = u_R i &= U_{Rm} \sin(\omega t - \varphi) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cos \varphi \sin(\omega t - \varphi) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= U_m I_m \cos \varphi \sin^2(\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)] \end{aligned} \quad (35)$$

a na induktoru - u_L předbíhá i o $\frac{\pi}{2}$ (obr.22)

Celkový okamžitý výkon je dán jejich součtem:

$$p = p_R + p_L = UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos(2\omega t - 2\varphi) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t - 2\varphi) \quad (37)$$

Výkon rezistoru p_R kmitá okolo střední hodnoty celkového kmitavého výkonu, tedy okolo činného výkonu obvodu $P = UI \cos \varphi$. Výkon induktoru p_L kmitá okolo časové osy, jeho střední hodnota je rovna nule (na induktoru nedochází k nevratné přeměně elektrické energie), jeho maximální hodnota $Q = UI \sin \varphi$ představuje jalový výkon obvodu.



Obr.22 Průběh okamžitého výkonu, okamžitého výkonu rezistoru a induktoru



Text k prostudování

Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitoly 7.1; až 7.7



Další studijní texty

Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 6



Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Co je efektivní hodnota harmonického proudu?
2. Jak je definován komplexní výkon?
3. Co je účinník elektrického spotřebiče?
4. Jakou energii může akumulovat induktor?



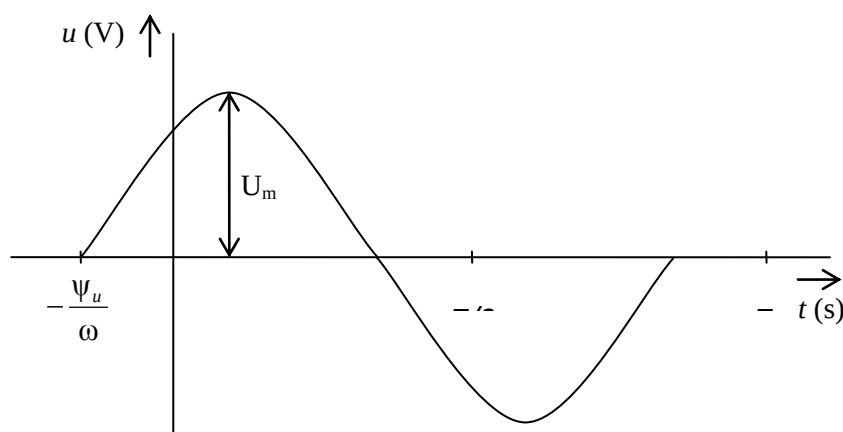
Odpovědi naleznete ve Výkladu

úvodní odstavec (1. otázka), odst. 2.3 (2. otázka), odst. 2.3 (3. otázka), odst. 2.4 (4. otázka).

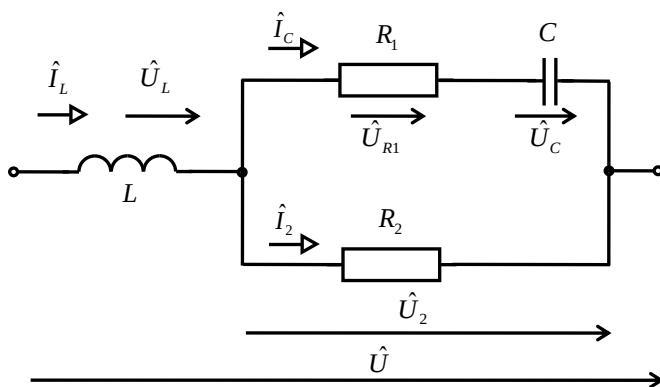


Úlohy k řešení

1. (3 body) Pro harmonické napětí z obr. 1 nakreslete fázor.
2. (3 body) Napište vztahy pro činný výkon a jalový výkon a vysvětlete je.
3. (3 body) Napište vztah pro účinník a vysvětlete ho.
4. (3 body) Odvoďte vztah pro okamžitý výkon.
5. (3 body) Nakreslete orientační fázorový diagram pro obvod z obr. 2. Zadán je proud I_C a hodnoty všech obvodových prvků



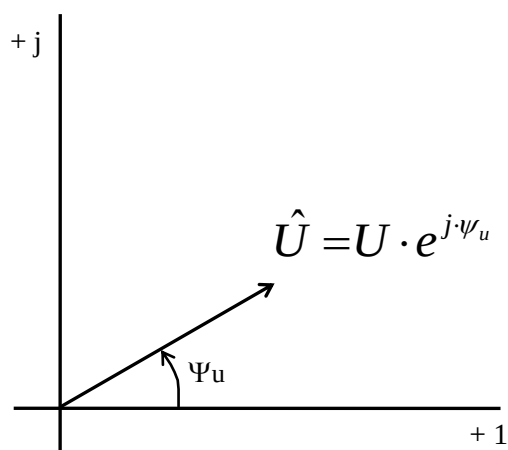
Obr. 1 Průběh jedné periody harmonického napětí s počáteční fází Ψ_u



Obr.2 Schéma elektrického obvodu k úloze č.5

**Klíč k řešení**

1. Fázor je grafické znázornění harmonické veličiny v komplexní rovině pomocí maximální hodnoty (amplitudy) nebo efektivní hodnoty, a počáteční fáze, při daném kmitočtu.



Obr.3 Fázor napětí z obr.1

$$2. P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U \cdot I_{\varepsilon} \quad (\text{W}) \quad (1)$$

Činný výkon vytváří v obvodu činnou práci a kryje činné ztráty (činný výkon reprezentuje elektrickou energii, která se v obvodu nevratně mění na jiný druh energie). Vypočteme ho ze vztahu (1) – je to střední hodnota okamžitého výkonu za dobu jedné periody:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = U \cdot I_j \quad (\text{var}) \quad (2)$$

Jalový výkon vytváří v obvodu energii potřebnou pro vznik elektrického pole kapacitorů a magnetického pole induktorů. Přeměna elektrické energie na energii elektrického a magnetického pole není nevratná. V obvodu dochází k periodické výměně jalové energie mezi zdrojem a induktory a kapacitory. Přenosem této energie vznikají ve vodičích činné (Jouleovy) ztráty. Jalový výkon vypočteme podle vztahu (2).

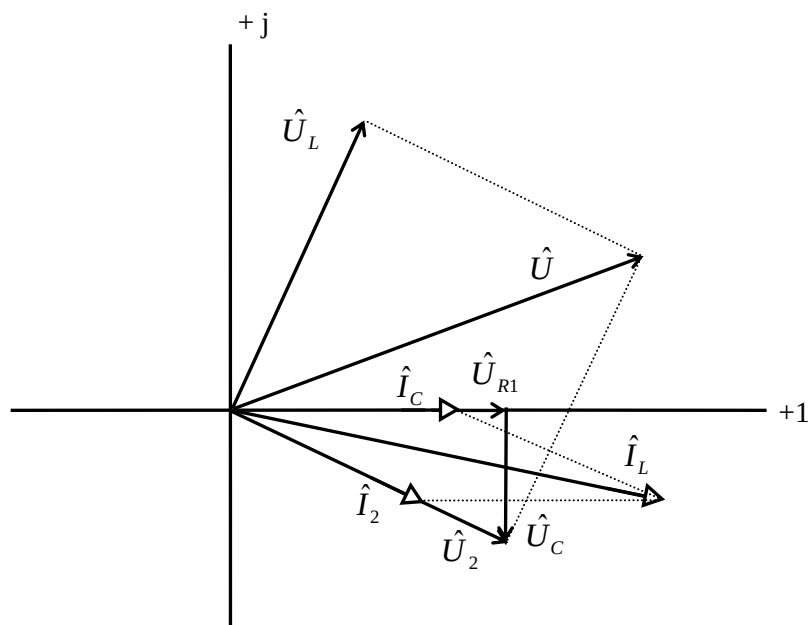
3. Účinník je poměr činného a zdánlivého výkonu (udává míru využitelnosti energetických zařízení)

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \\
 &= U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \cdot \sin \omega t = U_m \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi) \cdot I_m \cdot \sin \omega t = \\
 &= U_m \cdot I_m \cdot (\sin^2 \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega t) = \\
 &= U \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [(1 - \cos 2\omega t) \cdot \cos \varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi] = \\
 &= U \cdot I \cdot [\cos \varphi - \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi] = \\
 &= U \cdot I \cdot [\cos \varphi - (\cos 2\omega t \cdot \cos \varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi)] = \\
 &= U \cdot I \cdot [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] \quad (4)
 \end{aligned}$$

Okamžitý výkon je tvořen součinem okamžitých hodnot napětí a proudu. Skládá z konstantní složky (její hodnota je rovna činnému výkonu) a periodické složky s úhlovým kmitočtem 2ω (její amplituda je rovna zdánlivému výkonu). Během kladných hodnot okamžitého výkonu dodává zdroj energii (činnou a jalovou) do obvodu, během záporných hodnot se část energie (jalová energie) vrací z obvodu do zdroje.

5. Jako první zakreslíme fázor proudu I_C (položíme ho do kladného směru reálné osy)



Obr.4 Orientační fázorový diagram obvodových veličin z obr.2



Autokontrola

Pokud jste získali z úloh k řešení alespoň **12** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat úlohy k řešení.



Zadání 2. samostatné práce

Při napájení ze zdroje proud $i = \sqrt{2} \sin 2000\pi$ A je v sériovém zapojení zdroje, rezistoru, induktoru a kapacitoru efektivní hodnota napětí každého prvku 6 V. Určete hodnoty imitancí a parametrů, zobrazte časový průběh veličin, výkonů, energie induktoru a kapacitoru a nakreslete (v měřítku) příslušné fázorové diagramy.

Zpracoval: Josef Paleček

3. VĚTY O NÁHRADNÍCH ZDROJÍCH, VÝKONOVÉ PŘIZPŮBOENÍ STŘÍDAVÉHO ZDROJE, PRINCIP SUPERPOZICE, TRANSFIGURACE



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět:

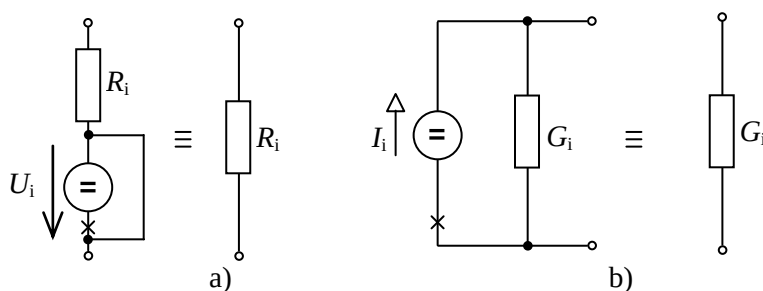
- zjednodušovat schémata elektrických obvodů s využitím transfigurací trojúhelník – hvězda a hvězda – trojúhelník,
- vyřešit elektrické obvody s využitím principu superpozice,
- vyřešit elektrické obvody s použitím Theveninovy věty,
- vyřešit elektrické obvody s použitím Nortonovy věty,
- určit zátěžovací impedanci napěťového zdroje pro odběr největšího výkonu ze zdroje.



Výklad

3.1. Věty o náhradních zdrojích

Při řešení mnoha elektrotechnických problémů je potřebné vyšetřit proudové, resp. napěťové poměry jen v jedné větvi rozvětveného obvodu. K takovému úkolu je výhodné použít věty o náhradních zdrojích. Podle nich rozdělíme analyzovaný obvod na 2 části - dva dvojpóly: na zkoumanou větev a na zbytek obvodu, který obsahuje všechny zdroje v obvodu, představuje tedy složený aktivní dvojpól. Princip této věty spočívá v tom, že složený aktivní dvojpól nahradíme jednoduchým aktivním dvojpólem – elektrickým zdrojem. O náhradě napěťovým zdrojem mluví Thèveninův teorém, o náhradě proudovým zdrojem mluví Nortonův teorém.



Obr.1 Vyjmutí zdrojů, a) napěťového, b) proudového

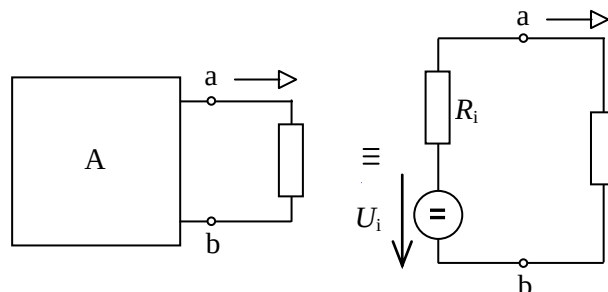
Při aplikaci těchto teorémů se provádí vyjmutí zdrojů napěťových tak, že všechny ideální zdroje napětí odpojíme z obvodu a nahradíme je zkratem, obvodu takz ůstanou jen jejich vnitřní odpory R_i – obr.1a). Vyjmutí zdrojů proudových se provede tak, že ideální zdroje proudu odpojím a v obvodu zůstanou jen vnitřní vodivosti G_i – obr.1b).

Thèveninův teorém - věta o náhradním zdroji napěťovém

Podle ní můžeme každý složený aktivní lineární dvojpól nahradit skutečným napěťovým zdrojem s vnitřním napětím U_i a vnitřním odporem R_i – obr.2. Tato náhrada je splněná, když:

vnitřní napětí náhradního zdroje U_i je rovno napětí naprázdno na svorkách $a-b$ nahrazovaného aktivního dvojpólu - U_{ab} ,

vnitřní odpor náhradního zdroje R_i se rovná výslednému odporu nahrazovaného dvojpólu vztaženému ke svorkám $a-b$, když byly vyjmuty všechny zdroje v obvodu.

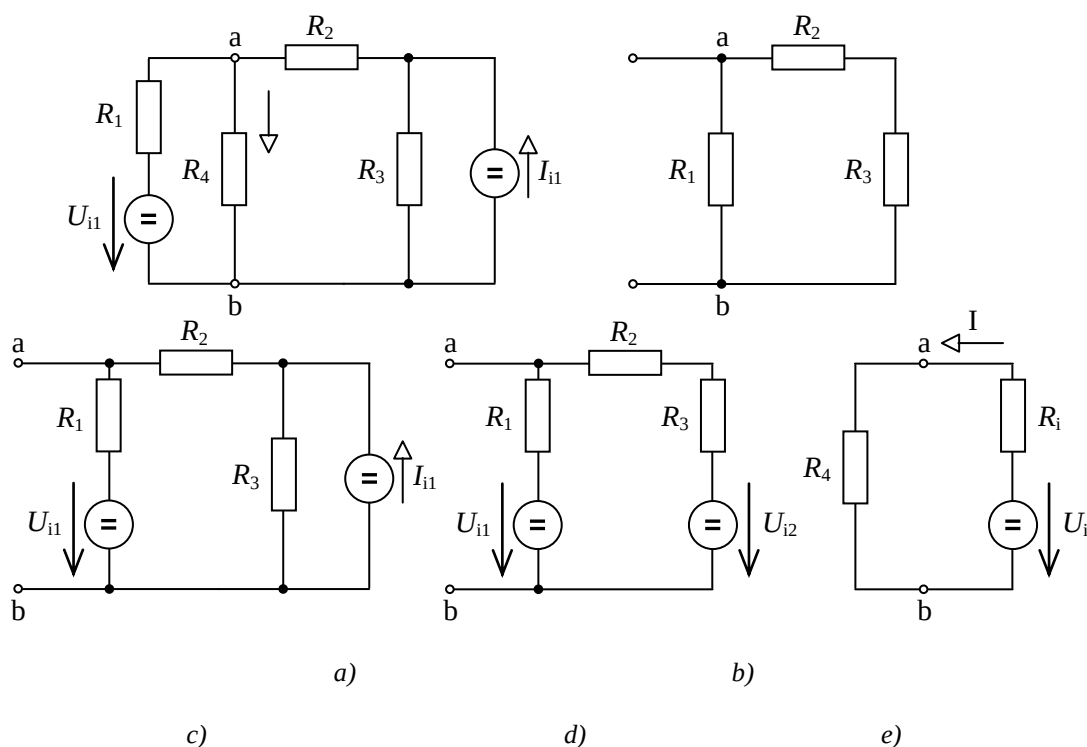


Obr.2 Náhrada skutečného obvodu podle Thèveninova teorému

V náhradním obvodu potom vypočítáme proud a napětí ve větvi $a-b$ podle vztahů:

$$I = \frac{U_i}{R + R_i}; \quad U = RI = R \frac{U_i}{R + R_i} \quad (1)$$

Příklad 1: V obvodu na obr.3 a) vypočtete proud I protékající odporem R_4 aplikací Thèveninova teorému. Parametry jednotlivých prvků obvodu: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $U_{i1} = 10 \text{ V}$, $I_{i1} = 1 \text{ A}$.



Obr.3 Schémata k příkladu 1: a) zadáný obvod, b) k výpočtu R_i , c) a d) k určení U_i , e) k výpočtu I

Při výpočtu nejdříve rozdělíme obvod (vyjmeme větev $a-b$), dále vyjmeme zdroje a vypočteme $R_{a-b} = R_i$:

$$R_1 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{5}{6} = 0,833 \Omega.$$

Dále vypočteme napětí naprázdno na svorkách $a-b$ ($= U_i$) - schéma c). Pro zjednodušení výpočtu nahradíme proudový zdroj zdrojem napětovým ($U_{i2} = 3 \text{ V}$) - schéma d). Potom platí:

$$U_i = U_{ab} = \frac{U_{i1} \cdot \frac{1}{R_1} + U_{i2} \cdot \frac{1}{R_2 + R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{10,6}{1,2} = 8,33 \text{ V} \quad (\text{Věta o paralelních generátorech})$$

Nakonec podle schématu e) vypočteme proud I :

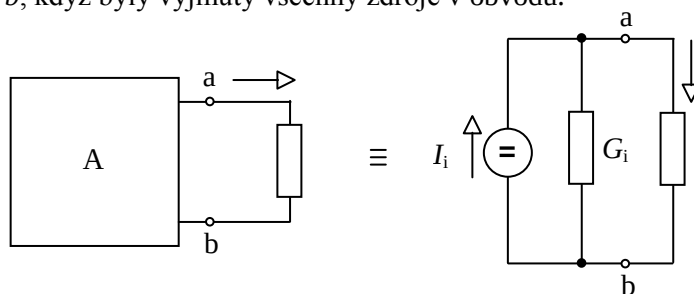
$$I = \frac{U_i}{R_4 + R_i} = \frac{8,33}{4,833} = 1,83 \text{ A}$$

Nortonův teorém - věta o náhradním zdroji proudovém

Podle ní můžeme každý složený aktivní lineární dvojpól nahradit skutečným proudovým zdrojem s vnitřním proudem napětím I_i a vnitřní vodivostí G_i – obr.4. Tato náhrada je splněná, když:

vnitřní proud náhradního zdroje I_i je roven proudu nakrátko mezi svorkami $a-b$ nahrazovaného aktivního dvojpólu - I_{ab} ,

vnitřní vodivost náhradního zdroje G_i se rovná výsledné vodivosti nahrazovaného dvojpólu vztažené ke svorkám $a-b$, když byly vyjmuty všechny zdroje v obvodu.

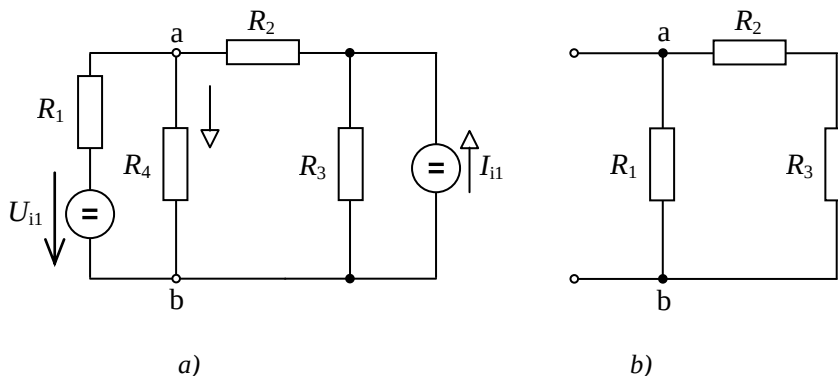


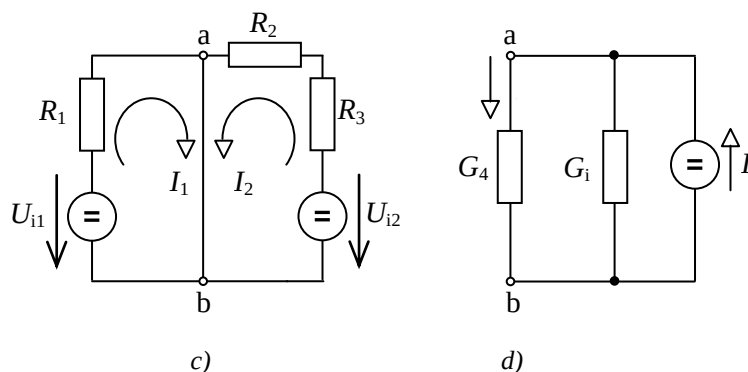
Obr.4 Náhrada skutečného obvodu podle Nortonova teorému

V náhradním obvodu potom vypočítáme proud a napětí ve větvi $a-b$ podle vztahů:

$$I = GU = G \frac{I_i}{G + G_i}; \quad U = \frac{I_i}{G + G_i} \quad (2)$$

Příklad 2: Problém z příkladu 1 řešte pomocí Nortonova teorému.



Obr. 5 Schémata k příkladu 2: a) zadaný obvod, b) k výpočtu G_i , c) a d) k určení I_i , e) k výpočtu I .

Vnitřní vodivost určíme jako převrácenou hodnotu vnitřního odporu R_i :

$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)} = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ S}$$

Dále určíme I_i – proud nakrátko mezi zkratovanými svorkami a - b :

$$I_i = I_1 + I_2 = \frac{U_{i1}}{R_1} + \frac{U_{i2}}{R_2 + R_3} = \frac{10}{1} + \frac{3}{5} = 10,6 \text{ A}$$

Nakonec vypočteme ze zapojení d) proud I :

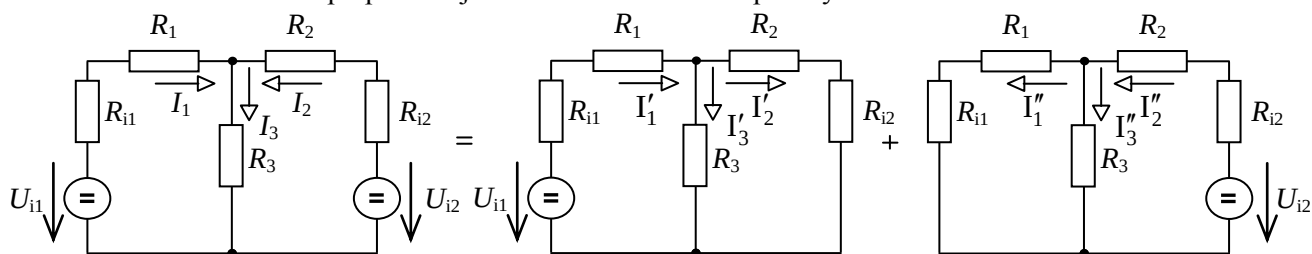
$$I = I_i \cdot \frac{G_4}{G_4 + G_i} = 10,6 \cdot \frac{0,25}{0,25 + 1,2} = 1,83 \text{ A}$$

3.2. Princip superpozice

Princip superpozice je všeobecně platný princip, který platí ve všech lineárních soustavách, nejen v elektrotechnických. Jeho všeobecná formulace zní: v lineární soustavě je účinek součtu nezávislých příčin roven součtu účinků působících samostatně. Zjednodušeně: účinek sumy je roven sumě účinků. Pro elektrické obvody můžeme tento zákon interpretovat: Lineární obvod s více zdroji můžeme řešit samostatně pro každý zdroj a výsledky algebraicky sečíst – superponovat.

Při zjišťování účinků každého zdroje musíme ostatní zdroje vyjmout, tak jak to bylo ukázáno v odstavci 3.1.

Příklad 3: Metodou superpozice zjistěte v obvodu z obr. 6 proudy ve všech větvích.



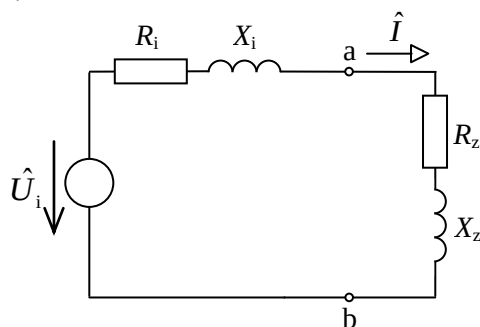
Obr.6 Schéma obvodu pro proudy metodou superpozice

Proudů v jednotlivých větvích určíme jako součet proudů (příspěvků) od jednotlivých zdrojů:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 \quad I_2 = -I'_2 + I''_2 \quad I_3 = I'_3 + I''_3$$

3.3. Výkonové přizpůsobení střídavého zdroje

Řešení tohoto problému je spojeno se snahou získat na zátěži co největší výkon. Můžeme ho formulovat: Jaké parametry má mít zátěžovací impedance (vzhledem k parametrům zdroje), abychom ze zdroje odebírali maximální výkon? Pod pojmem zdroj si můžeme představit jak samostatný zdroj, tak i soustavu s více zdroji, nahrazenou náhradním zdrojem podle Thèveninova teorému. Problém si vysvětlíme na obvodu z obr.7.



Obr.7 Schéma obvodu pro vysvětlení pojmu výkonové přizpůsobení zdroje

R_i , X_i jsou rezistance a reaktance zdroje, U_i je vnitřní napětí zdroje, R_z , X_z jsou rezistance a reaktance zátěže (spotřebiče), I je proud odebíraný ze zdroje

Proud odebíraný ze zdroje:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_i}{(R_i + jX_i) + (R_z + jX_z)} ; \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}_i}{(R_i + R_z) + j(X_i + X_z)} \quad (3)$$

a jeho absolutní hodnota:

$$|\hat{I}| = I = \frac{U_i}{\sqrt{(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2}} \quad (4)$$

Činný výkon odebíraný ze zdroje (výkon, který se na R_z nevratně přemění na teplo):

$$P_z = R_z I^2 = \frac{R_z U_i^2}{(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2} \quad (5)$$

V dalším budeme hledat maximum funkce (5). Extrém funkce nastane, tam kde její 1.derivace je rovna nule, jestli se jedná o maximum nebo minimum určíme podle znaménka 2.derivace. Vzhledem k tomu, že víme, že minimum P_z je rovno 0, je zřejmé, že zjišťovaný extrém je maximum. Pro derivaci zlomku

platí vztah: $\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Nyní derivujme (5) podle X_z , hledáme při jaké jeho hodnotě nastane extrém P_z :

$$\frac{\partial P}{\partial X_z} = \frac{0[(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2] - 2(X_i + X_z)R_z U_i^2}{[(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2]^2} = 0$$

$$-2(X_i + X_z) \cdot R_z U_i^2 = 0$$

Součin je = 0, když alespoň jeden činitel je nulový:

$$X_i + X_z = 0 \Rightarrow X_z = -X_i \quad (7)$$

Nyní derivujme (5) podle R_z , hledáme při jaké jeho hodnotě nastane extrém P_z :

$$\frac{\partial P_z}{\partial R_z} = \frac{U_i^2 [(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2] - 2(R_i + R_z)R_z U_i^2}{[(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2]^2} = 0 \quad (8)$$

Zlomek je roven 0, když jeho čitatel je roven 0:

$$U_i^2 \left[(R_i + R_z)^2 + (X_i + X_z)^2 \right] - 2(R_i + R_z)R_z U_i^2 = 0$$

$$R_i^2 + 2R_i R_z + R_z^2 + X_i^2 + X_z^2 + 2X_i X_z - 2R_i R_z - 2R_z^2 = 0$$

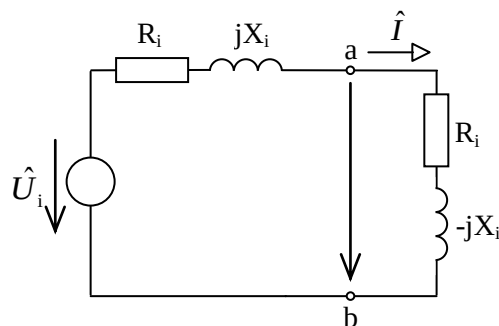
$$R_i^2 - R_z^2 + X_i^2 + X_z^2 + 2X_i X_z = 0; \quad R_i^2 - R_z^2 + (X_i^2 + X_z^2) = 0 \quad (9)$$

Když dosadíme z (7) do (9) dostaneme:

$$R_i^2 = R_z^2 \Rightarrow R_i = R_z \quad (10)$$

Spojením podmínek (7) a (10) dostaneme vztah pro impedanci zátěže, při níž je na zátěži největší výkon. Takový případ nastává, když impedance zátěže je komplexně sdružená s impedancí zdroje:

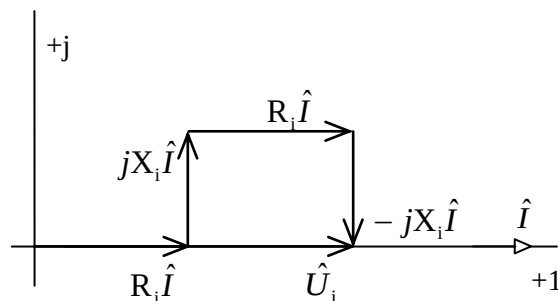
$$\hat{Z}_z = R_i - jX_i = \hat{Z}_i^* \quad (11)$$



Obr.8 Obvod z obr.7 při výkonovém přizpůsobení střídavého zdroje

Napětové poměry při výkonovém přizpůsobení popisuje vztah (12), jeho grafické znázornění na obr.9

$$\hat{U}_i = R_i \hat{I} + jX_i \hat{I} + R_i \hat{I} - jX_i \hat{I} \quad (12)$$



Obr.9 Napětové a proudové poměry při výkonovém přizpůsobení zdroje

Proud a odebíraný výkon ve výkonově přizpůsobeném obvodu:

$$\hat{I} = \frac{U_i}{(R_i + R_i) + j(X_i - X_i)} = \frac{U_i}{2R_i} \quad (13)$$

Vnitřní výkon zdroje ve výkonově přizpůsobeném obvodu:

$$P_i = U_i \cdot I = \frac{U_i^2}{2R_i} \quad (= P_1) \quad (14)$$

Ve výkonově přizpůsobeném obvodu je výkon odebíraný ze zdroje:

$$P_z = (U_i - R_i I) I = \left(U_i - R_i \frac{U_i}{2R_i} \right) \frac{U_i}{2R_i} = \frac{U_i^2}{2R_i} - \frac{U_i^2}{4R_i} = \frac{2U_i^2 - U_i^2}{4R_i} = \frac{U_i^2}{4R_i} \quad (= P_2) \quad (15)$$

Vidíme, že při tomto stavu odebíráme ze zdroje pouze činný výkon ($\cos \varphi = 1$).

Ze vztahů (14) a (15) určíme účinnost přenosu:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{U_i^2}{4R_i}}{\frac{U_i^2}{2R_i}} = \frac{1}{2} = 50 \% \quad (16)$$

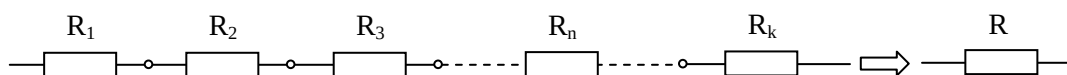
50%-ní účinnost je velmi malá, proto má tento stav význam jen v aplikacích, kde se nejedná o velké výkony, což jsou obvody v radiotechnice, elektronice apod., zde se pracuje s zlomky Wattů, ale ne v energetice, kde se pracuje až s GW.

3.4. Transfigurace

Při výpočtech v elektrotechnických obvodech musíme často užívat metodu postupného zjednodušování, při ní uplatňujeme různé transfigurace (změny uspořádání), které musí být provedeny tak, aby byly stále zachovány elektrické poměry. S nejčastěji užívanými transfiguracemi se seznámíme.

Transfigurace sériového zapojení rezistorů

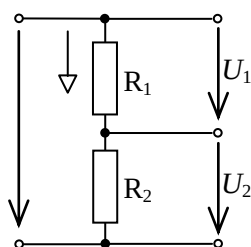
Její podstatu ukazuje obr.10 a vztah (17).



Obr.10 Sériové uspořádání odporů a jeho transfigurace - náhrada jedním odporem

V sérii spojené odpory se sčítají algebraicky. Při sčítání reaktancí a impedancí je potřebné respektovat jejich komplexní charakter.

$$R = \sum_{n=1}^k R_n \quad (17)$$



Napětíový dělič

Obr.11 Napětíový dělič

V sérii spojené odpory tvoří napětíový dělič, na něm se napětí rozloží (rozdělí) přímoúměrně podle velikosti odporů. V praxi se nejčastěji využívá dělič se dvěma rezistory – obr.11. Poměry na něm vyjadřují vztahy (18):

$$U_1 = R_1 I; \quad U_2 = R_2 I; \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 I}{R_2 I}; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2} \quad (18)$$

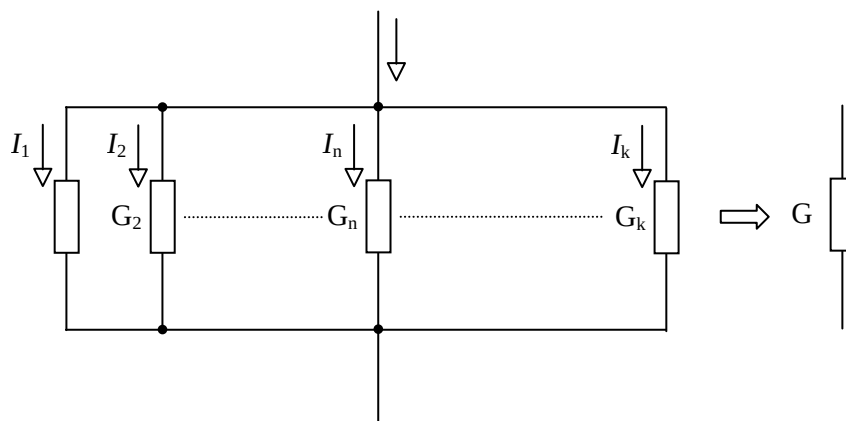
Transfigurace paralelního zapojení rezistorů

Při paralelním spojení rezistorů je výhodné vyjádřit jejich vlastnost pomocí vodivosti (konduktance). Podstata náhrady paralelně spojených rezistorů jedním rezistorem - transfigurace paralelního spojení rezistorů je zřejmá z následujících vztahů a obr.12.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n + \dots + I_k$$

$$GU = G_1U + G_2U + G_3U \dots + G_nU + \dots + G_kU$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3 \dots + G_n + \dots + G_k ; \quad G = \sum_{n=1}^k G_n \quad (19)$$

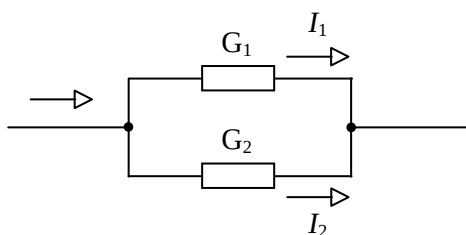


Obr.12 Paralelní uspořádání vodivostí a jeho transfigurace - náhrada jednou konduktancí

Paralelně spojené vodivosti se sčítají algebraicky. Při sčítání susceptancí a admitancí je potřebné respektovat jejich komplexní charakter.

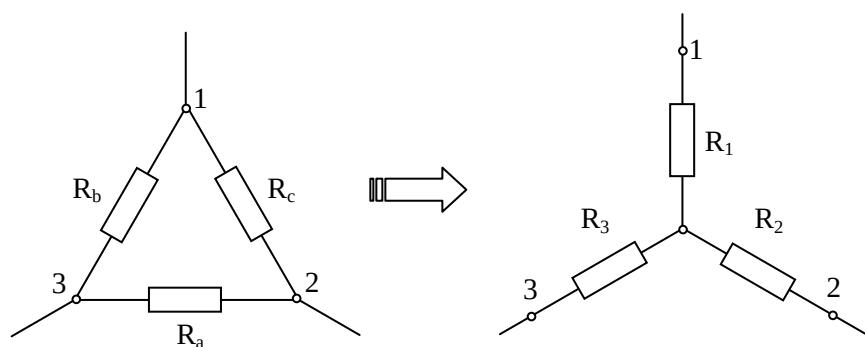
Proudový dělič

Paralelně spojené rezistory tvoří proudový dělič, na něm se proud rozdělí přímoúměrně velikostem vodivosti (nepřímouměrně velikostem odporů). V praxi se nejčastěji využívá dělič se dvěma rezistory – obr.13. Poměry na něm vyjadřují vztahy (20):



Obr.13 Proudový dělič

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{UG_1}{UG_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (20)$$

Transfigurace trojúhelník-hvězda a hvězda-trojúhelník

Obr.14 Uspořádání rezistorů do trojúhelníka a do hvězdy

Mnohdy se při řešení setkáme se zapojením odporů do trojúhelníka nebo do hvězdy, při nichž nemůžeme uplatnit ani sériovou, ani paralelní transfiguraci. V těchto případech se často provádí transfigurace jednoho spojení do druhého - hvězdy do trojúhelníka a naopak. Podmínkou při těchto transfiguracích je, aby odpor mezi jednotlivými uzly byl před i po transfiguraci stejný.

Transfigurace z trojúhelníku na hvězdu

Výsledné odpory mezi uzly u hvězdy a u trojúhelníka

$$(1-2): R_1 + R_2 = \frac{(R_a + R_b) \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c}; \quad (a)$$

$$(2-3): R_2 + R_3 = \frac{(R_b + R_c) \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c}; \quad (b)$$

$$(3-1): R_1 + R_3 = \frac{(R_a + R_c) \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c}; \quad (c)$$

Odečtení (a) - (b) dostaneme:

$$R_1 - R_3 = \frac{R_a R_c + R_b R_c - R_a R_b - R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (d)$$

a součtem (c) + (d):

$$2R_1 = \frac{R_a R_c + R_b R_c - R_a R_b - R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

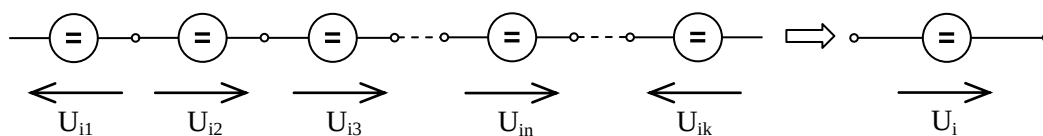
$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \text{ analogicky: } R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}; R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (21)$$

Vztahy (21) udávají předpis pro hodnoty odporů spojených hvězdy, které nahrazují spojení do trojúhelníka.

Transfigurace z hvězdy na trojúhelník

Ze vztahů (a) až (c) můžeme odvodit i vztahy pro odpory spojené do trojúhelníka nahrazující spojení do hvězdy:

$$R_a = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; R_b = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}; R_c = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad (22)$$

Transfigurace zdrojů

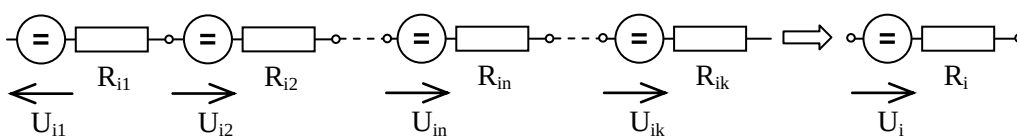
Obr.15 Transfigurace ideálních napěťových zdrojů spojených v sérii

Ideální napěťové zdroje spojené v sérii

Napětí náhradního zdroje dostaneme součtem napětí jednotlivých zdrojů:

$$U_i = \sum_{n=1}^k \pm U_{in} \quad (23)$$

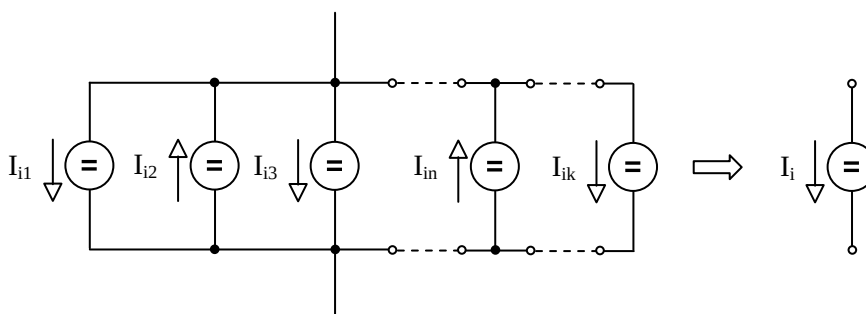
Skutečné napěťové zdroje spojené v sérii



Obr.16 Transfigurace skutečných napěťových zdrojů spojených v sérii

Napětí náhradního zdroje dostaneme součtem napětí jednotlivých zdrojů a vnitřní odpor součtem vnitřních odporů jednotlivých zdrojů:

$$U_i = \sum_{n=1}^k \pm U_{in} \quad R_i = \sum_{n=1}^k R_{in} \quad (24)$$

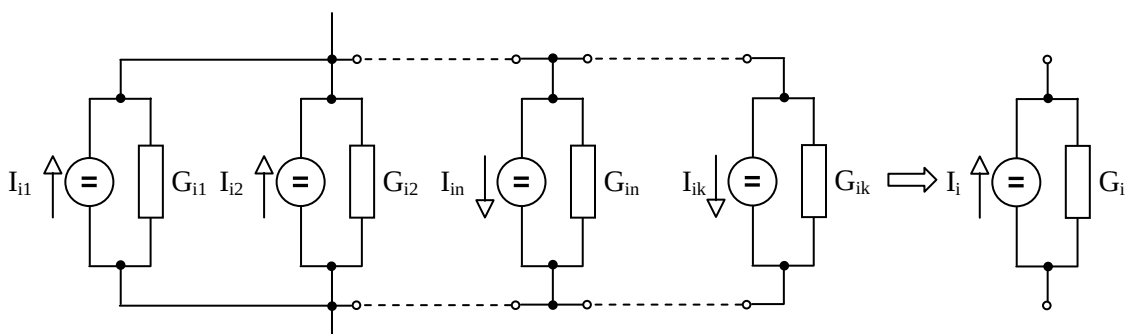


Obr.17 Transfigurace ideálních proudových zdrojů spojených paralelně

Ideální proudové zdroje spojené paralelně

Proud náhradního zdroje dostaneme součtem proudů jednotlivých zdrojů:

$$I_i = \sum_{n=1}^k \pm I_{in} \quad (25)$$

Skutečné proudové zdroje spojené paralelně

Obr.18 Transfigurace skutečných proudových zdrojů spojených paralelně

Proud náhradního zdroje dostaneme součtem proudů jednotlivých zdrojů a vnitřní vodivost součtem vnitřních vodivostí jednotlivých zdrojů:

$$I_i = \sum_{n=1}^k \pm I_{in} \quad G_i = \sum_{n=1}^k G_{in} \quad (26)$$

**Text k prostudování**

Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitoly 3.6, 3.7, 4.1, 4.2, 4.3.

**Další studijní texty**

Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitoly 4.6, 7.1, 7.3

**Otázky**

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

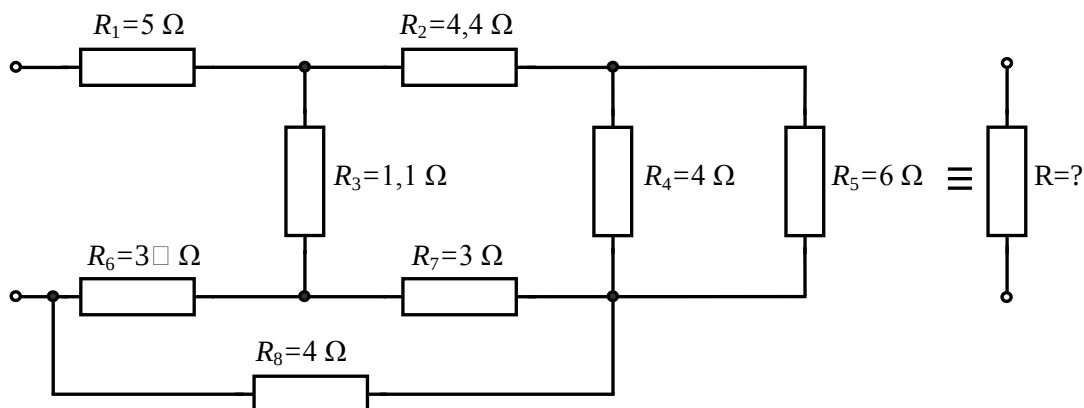
1. Co je Theveninův teorém?
2. Co je Nortonův teorém?
3. Co je princip superpozice?
4. Co je výkonové přizpůsobení zdroje?

**Odpovědi naleznete ve Výkladu**

odstavec 3.1 (1.otázka), odstavec 3.1 (2.otázka), odstavec 3.2 (3.otázka), odstavec 3.3 (4.otázka).

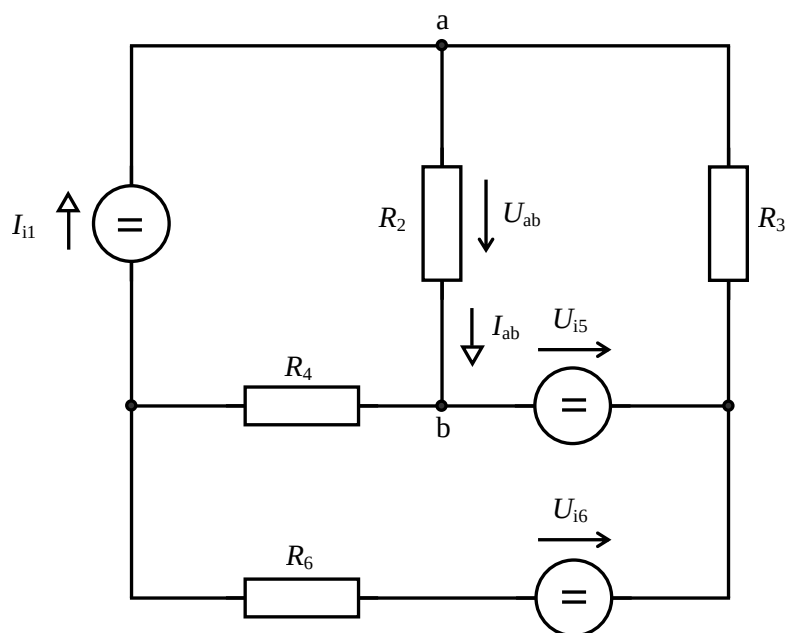
**Úlohy k řešení**

1. (1 bod) Určete výsledný odpor dvoj pólu ve schématu na obr.1.



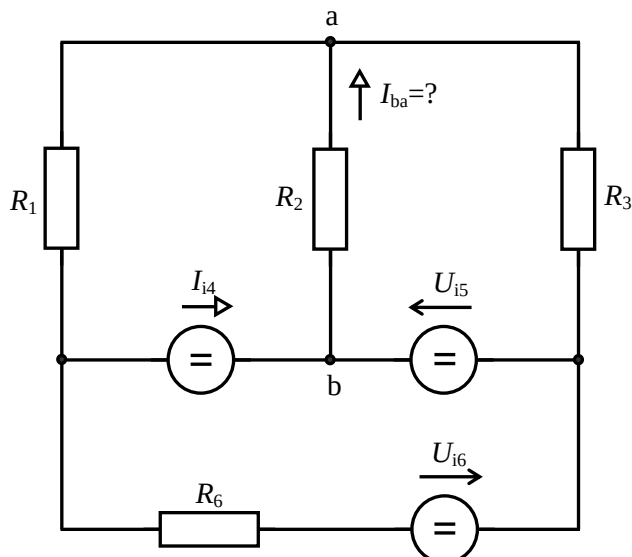
Obr.1 Příklad obvodu složeného z více rezistorů

2. (4 body) Vyřešte ztrátový výkon na odporu R_2 v obvodu na obr.2. Při určování obvodových veličin využijte princip superpozice. Hodnoty obvodových veličin a prvků jsou numericky stejné jako jejich indexy ($I_{i1} = 1\text{ A}$, $R_2 = 2\ \Omega$ apod.).



Obr.2 Příklad obvodu k užití metody superpozice

3. (4 body) V obvodu z obr.3 vyřešte proud ve větvi a-b pomocí Theveninovy věty. Hodnoty obvodových veličin a prvků jsou numericky stejné jako jejich indexy ($I_{i4} = 4\text{ A}$, $U_{i5} = 5\text{ V}$, $R_1 = 1\ \Omega$ apod.).



Obr.3 Příklad obvodu k procvičení Theveninovy a Nortonovy věty

4. (4 body) V obvodu z obr.3 vyřešte proud ve větvi a-b pomocí Nortonovy věty.
5. (2 body) Vysvětlete co znamená pojem výkonové přizpůsobení zdroje a spotřebiče v elektrickém obvodu.



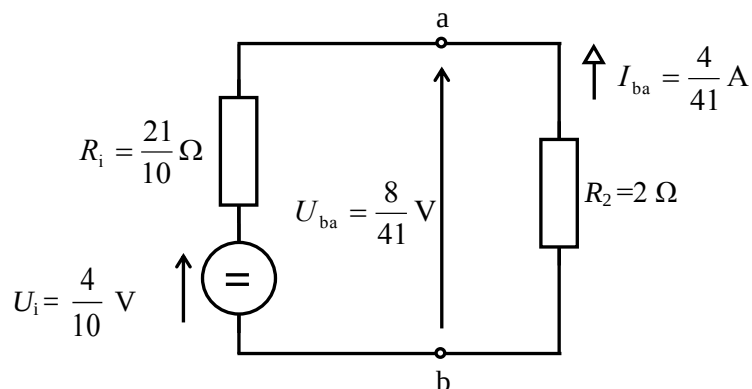
Klíč k řešení

$$R = 7,8 \, \Omega$$

Proud I_{ab} a napětí U_{ab} jsou dány součtem příspěvků od jednotlivých zdrojů (znaménko u hodnot proudů a napětí určuje smysl jednotlivých proudů a napětí vzhledem k orientaci šipek na obr.2):

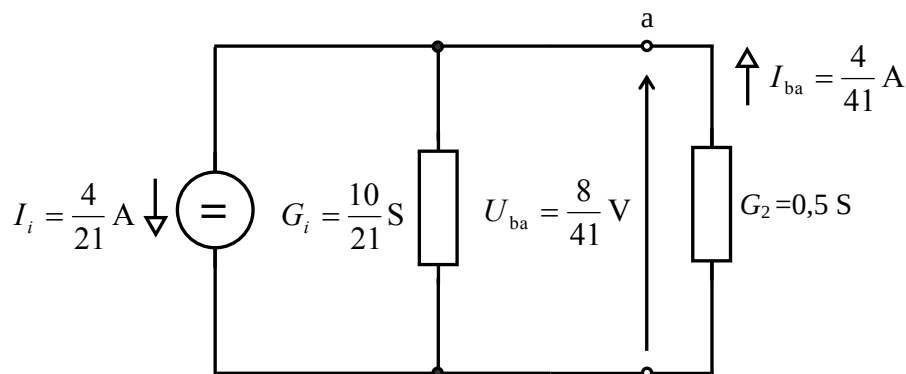
$$I_{ab} = I_{ab}^{i1} + I_{ab}^{i5} + I_{ab}^{i6} = 0,6 - 1 + 0 = -0,4 \, \text{A} \quad U_{ab} = U_{ab}^{i1} + U_{ab}^{i5} + U_{ab}^{i6} = 1,2 - 2 + 0 = -0,8 \, \text{V}$$

$$\Delta P_{ab} = U_{ab} \cdot I_{ab} = -0,4 \cdot (-0,8) = 0,32 \, \text{W} \quad (= R_2 \cdot I_{ab}^2 = 2 \cdot (-0,4)^2 = 0,32 \, \text{W})$$



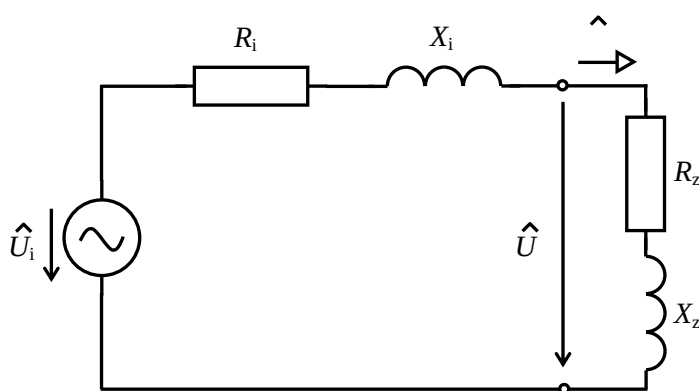
Obr.4 Řešení obvodu z obr.3 pomocí Theveninovy věty

4.



Obr.5 Řešení obvodu z obr.3 pomocí Nortonovy věty

5. V úloze výkonového přizpůsobení zdroje se řeší vztah jeho vnitřní $\hat{Z}_i = R_i + jX_i$ a zatěžovací impedance $\hat{Z}_z = R_z + jX_z$, při kterém bude ze zdroje odebírán maximální výkon - obr.6.



Obr.6 K výkonovému přizpůsobení zdroje a spotřebiče

Výkonové přizpůsobení nastane (a tedy ze zdroje se bude odebírat maximální výkon), když bude platit:

$$\hat{Z}_z = \hat{Z}_i^* = R_i - jX_i,$$

potom bude ze zdroje odebírán výkon

$$P_{\max} = \frac{U_i^2}{4R_i}.$$



Autokontrola

Pokud jste získali z úloh k řešení alespoň **12** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat úlohy k řešení.



Zadání 3. samostatné práce

Paralelní nebo sériové zapojení skutečného proudového zdroje a skutečného napěťového zdroje nahraďte rovnocenným (ekvivalentním) zdrojem podle Théveninova i Nortonova teorému a určete ztráty naprázdno a nakrátko.

Zpracoval: Josef Paleček

4. TOPOLOGIE ELEKTRICKÝCH OBVODŮ, ŘEŠENÍ ELEKTRICKÝCH OBVODŮ PŘÍMOU APLIKACÍ KIRCHHOFFOVÝCH ZÁKONŮ



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování textu této studijní podpory budete umět:

- definovat základní pojmy z topologie elektrických obvodů (uzel, dvojpól, větev, topologické schéma, cesta, smyčka, J-křivka, úplný strom, systém nezávislých uzlů, systém nezávislých větví, systém nezávislých řezů),
- sestavovat rovnice podle 1. a 2. Kirchhoffova zákona,
- analyzovat výkony,
- zobrazovat okamžité hodnoty veličin a konstruovat jejich vektorové diagramy.



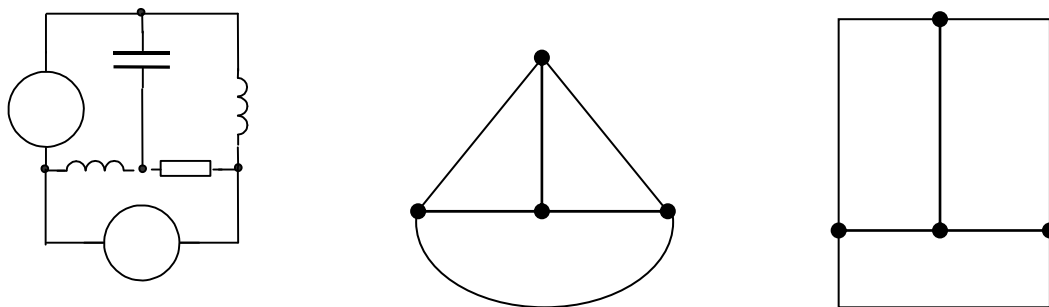
Výklad

Pro teorii obvodů mají základní význam obvodové rovnice, jenž jsou matematickými modely reálných jevů. Obvodové rovnice popisují zapojení obvodových prvků a charakteristiky obvodových prvků. Před sestavováním (formulací) obvodových rovnic je nezbytné orientovat obvodové veličiny, respektive graf obvodu počítacími (vztažnými, referenčními) šipkami. Směr počítacích šipek volíme libovolně. Jsou-li směry šipek napětí a proudu shodné (souhlasné), mluvíme o tzv. spotřebičové orientaci šipek, jsou-li směry šipek napětí a proudu opačné (nesouhlasné), jedná se o tzv. zdrojovou orientaci šipek.

4.1. Topologie elektrických obvodů

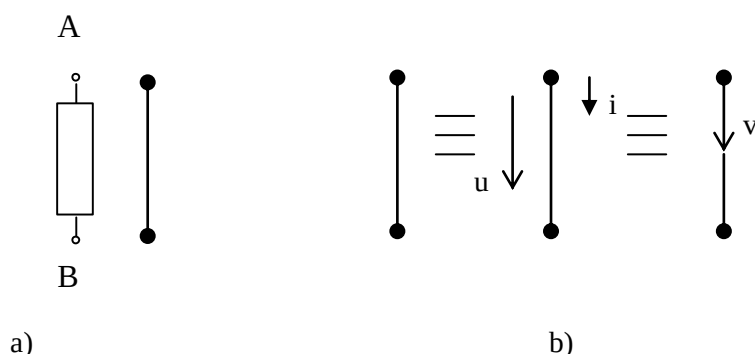
Elektrotechnické zařízení, jehož vlastnosti lze popsat vztahy mezi napětími a proudy jeho součástí nazýváme reálný elektrický obvod, jeho součástky reálné obvodové prvky a napětí a proudy obvodové veličiny. Obvodové schéma graficky vyjadřuje strukturu obvodu – je to elektrotechnický výkres, v němž jsou jednotlivé součástky reprezentovány smluvenými značkami s příslušným označením a dále je plnými čarami zakresleno propojení svorek. propojení vodičů tvořící uzel je vyznačováno tečkou (bodem). Křížení čar bez tečky znamená, že zde vodiče nejsou propojeny.

Kostru zapojení obvodových prvků jednoznačně vymezuje graf, v němž jsou abstrahovány fyzikální vlastnosti obvodových prvků. Graf je tvořen dvěma typy topologických značek - tečkami (body) a čarami (obr. 1). Základním topologickým prvkem je větev, což je souvislá



Obr. 1 Schéma obvodu a dva případy jeho grafu

čára libovolného tvaru zakončená dvěma body, které nazýváme uzly. Větev reprezentuje libovolný dvojpól bez ohledu na jeho charakter. Svorkám dvojpólu odpovídají uzly (obr. 2a).

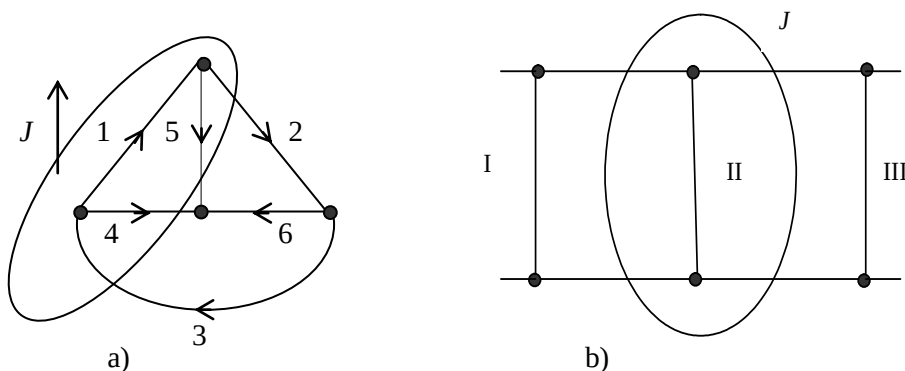


Obr. 2 Dvojpol a větev (a), orientace obvodových veličin a větve obvodu (b)

Nástrojem pro vytváření soustavy rovnic popisujících zapojení prvků (je reprezentováno grafem obvodu) jsou Kirchhoffovy zákony. Pro proudy větví řezu platí 1. Kirchhoffův zákon:

Algebraický součet proudů větví řezu je roven nule.

Řez grafu je soubor větví, jejichž vynětím je graf rozdělen na dvě samostatné části, přičemž samostatnou částí může být i uzel. Řez grafu je jednoduše souvislá (sama se neprotínající) křivka J , která protíná větve nejvýš v jednom bodě a neprochází žádným uzlem (obr. 3a)



Obr. 3. Jednoduše souvislá křivka, která: a) je řezem, b) není řezem.

Vyjmutím větví 2, 3, 4, 5 je graf rozdělen na dvě samostatné části – větev 1 a větev 6. V obr. 3b je uvedena jednoduše souvislá křivka J , která není řezem, protože vyjmutím příslušných větví je graf rozdělen na tři části I, II, III.

V orientovaném grafu pro orientovaný řez J pak proudům větví orientovaných shodně s orientací řezu přiřadíme kladné znaménko a proudům větví orientovaných opačně s orientací řezu přiřadíme záporné znaménko, v případě obr. 3a obdržíme rovnici

$$i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

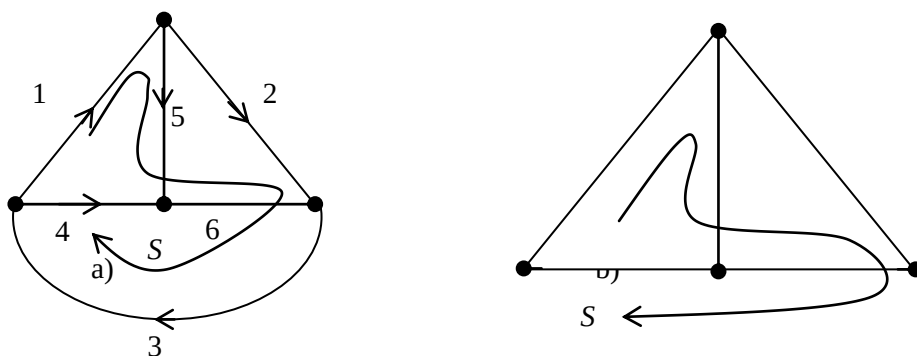
Pro napětí větví smyčky platí 2. Kirchhoffův zákon:

Algebraický součet napětí větví smyčky je roven nule.

Smyčka S je uzavřená dráha tvořená větvemi grafu. V každém uzlu větví smyčky se mohou stýkat pouze dvě větve smyčky. V obr. 4a) je uvedena uzavřená dráha, která je smyčkou a v obr. 4b uzavřená dráha, která není smyčkou.

V orientovaném grafu pro orientovanou smyčku S pak napětím větví orientovaných shodně s orientací smyčky přiřadíme kladné znaménko a napětím větví orientovaných opačně s orientací smyčky přiřadíme záporné znaménko, v případě obr. 4a obdržíme rovnici

$$u_1 - u_3 + u_5 + u_6 = 0$$



Obr. 4 Příklad dráhy, která je smyčkou (a), není smyčkou (b).

Takto sestavené rovnice jsou vždy lineární, protože v nich neuplatňujeme charakter obvodových prvků. Kirchhoffovy zákony můžeme aplikovat na každý řez a každou smyčku. V každém obvodu je však vždy zcela určitý počet neznámých obvodových veličin a tomu musí odpovídat počet lineárně nezávislých obvodových rovnic. Je proto potřebné určit, pro které řezy a smyčky je třeba sestavit obvodové rovnice, aby jich byl správná počet a byly přitom lineárně nezávislé. Tato úloha se dá snadno řešit na základě rozboru grafu obvodu.

4.1.1. Rozbor grafu obvodu

Nástrojem pro určení řezů a smyček, jejichž rovnice jsou lineárně nezávislé je strom grafu. Strom je část grafu (subgraf) tvořený nejmenším počtem větví spojujících souvisle všechny uzly grafu a nevytvářejí přitom ani jednu smyčku. Charakteristikou vlastností stromu je skutečnost, že přidáním jediné větve vznikne smyčka. Je-li počet uzlů grafu u , je počet větví stromu $d = u - 1$, což je také počet nezávislých řezů.

Větve, které nepatří do souboru větví stromu nazýváme nezávislé větve. Doplníme-li jednu nezávislou větev na smyčku větvemi stromu, vznikne nezávislá smyčka. Je-li celkový počet větví v , je počet nezávislých větví a tedy nezávislých smyček $s = v - d = v - u + 1$.

Soubor větví nezávislého řezu obsahuje právě jednu větev stromu, soubor větví nezávislé smyčky obsahuje právě jednu nezávislou větev. Pro zvolený (úplný) strom je systém nezávislých řezů a nezávislých smyček jednoznačně určen, čímž je determinována soustava rovnic jednoznačně popisující zapojení obvodu.

Několik příkladů stromu grafu obvodu na obr. 1 je vyznačeno na obr. 5 plnými čarami. Stromy na obr. 5a, b mají hvězdicový (vějířovitý) tvar. Ostatní stromy jsou tzv. lineární stromy – jsou tvořeny lineární posloupností větví. Pro daný graf můžeme vytvořit celou řadu stromů, pro soustavu obvodů reprezentovaných grafem na obr. 1 je jich možných 16.

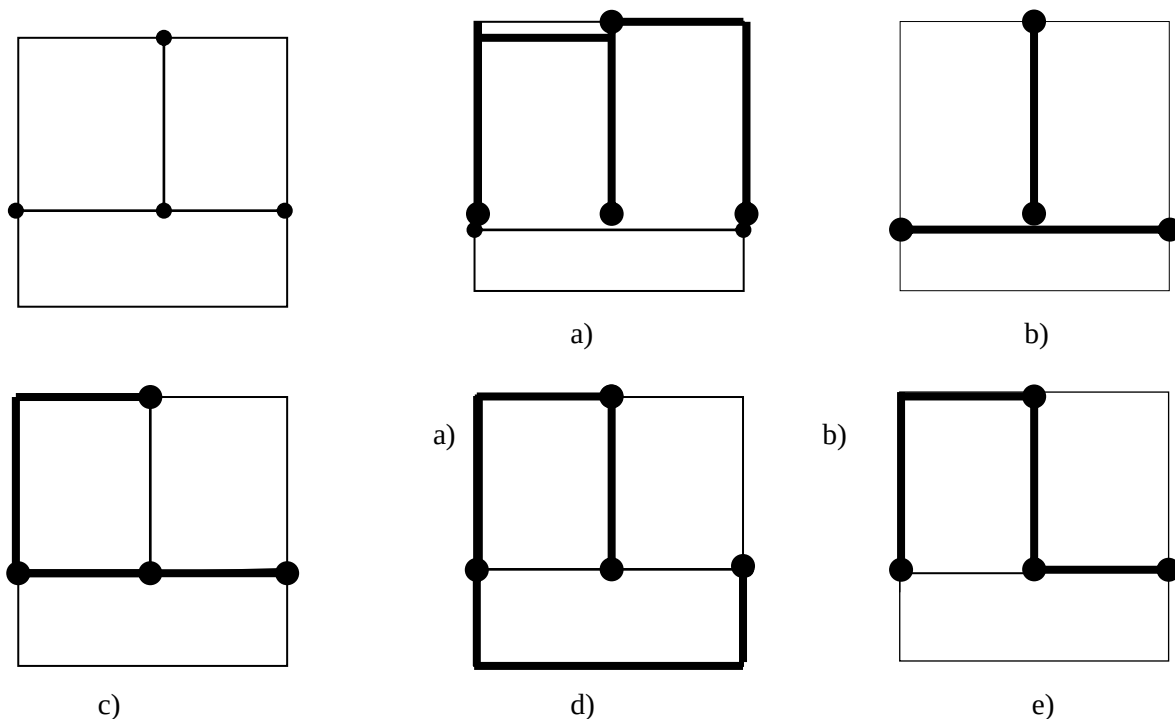
Při tvorbě stromu je nezbytné dodržet dvě zásady:

1. Větve reprezentující ideální napěťové zdroje (tzv. napěťové větve) vždy zařadit do souborů větví stromu.
2. Větve reprezentující ideální proudové zdroje (tzv. proudové větve) vždy zařadit do souboru nezávislých větví.

U soustavy obvodů tvořených několika separátními částmi – nejsou přímo (galvanicky) spojeny, ale jsou spolu vázány například společným magnetickým tokem – utvoříme strom pro každou separátní část, čímž vznikne tzv. les stromů. Z hlediska funkce obvodu se poměry nezmění, propojíme-li vzájemně vždy jeden uzel z každé separátní části, tak jak je naznačeno čárkovaně na obr. 6. Graf je v takovém případě již souvislý a má pouze jednu část.

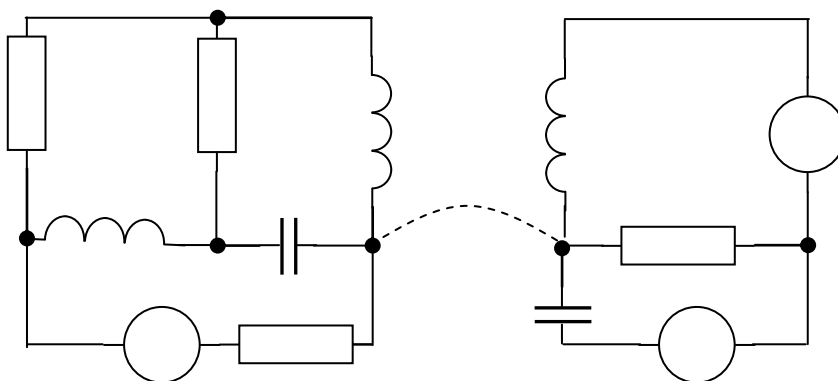
4.1.2 Nezávislé rovnice

Analýza obvodových veličin je jednoznačně určena znalostí všech napětí větví stromu nebo všech proudů nezávislých větví. Pomocí nich lze určit napětí či proudy ostatních větví.



Obr. 5 Graf obvodu a jeho stromy: a), b), hvězdicové uspořádání větví stromu, c), d), e), lineární posloupnost větví.

Sestavujeme-li soustavu nezávislých rovnic na základě 1. Kirchhoffova zákona pro nezávislé řezy, obsahuje každá z nich jeden proud, který není v žádné jiné rovnici, protože každý nezávislý řez obsahuje jednu větev stromu, která není součástí ostatních nezávislých řezů. Obdobně každá ze soustav nezávislých rovnic, sestavených aplikací 2. Kirchhoffova zákona, obsahuje jedno napětí, které není obsaženo v žádné jiné rovnici. Je to proto, že každá nezávislá smyčka obsahuje jednu nezávislou větev, která není součástí ostatních nezávislých smyček.



Obr. 6 Obvod se dvěma separátními částmi.

Pro daný graf můžeme aplikací obou Kirchhoffových zákonů sestavit d nezávislých rovnic pro nezávislé řezy a s nezávislých rovnic pro nezávislé smyčky. Celkový počet nezávislých rovnic je roven počtu větví v grafu

$$d + s = v.$$

Tyto rovnice můžeme sestavit jen na základě geometrické struktury obvodu bez ohledu na charakter obvodových prvků, a proto platí pro všechny obvody se stejnými grafy.

4.2. Popis charakteristik prvků

Zabývejme se nyní otázkou, jaký je počet neznámých obvodových veličin v daném obvodu, která obsahuje a aktivních a p pasivních dvojpolů. U aktivních prvků je vždy jedna veličina dána (tj. napětí u zdroje napětí a proud u zdroje proudu), druhá (duální) je neznámá. U pasivních prvků jsou obecně neznámými jak proud, tak i napětí. Celkový počet neznámých je proto

$$x = a + 2p = v + p = 2v - a,$$

protože je také $a + p = v$. Podle Kirchhoffových zákonů lze sestavit v nezávislých rovnic. Zbývajících p rovnic můžeme získat pouze doplněním vztahy mezi svorkovým napětím a proudem všech pasivních prvků, tj. definováním jejich charakteristik typu $u = f(i)$ nebo $i = g(u)$. Soubor těchto charakteristik označujeme jako popis prvků. Vzhledem k tomu, že popis spojení představuje vždy soustavu lineárních rovnic, je to právě popis prvků, tj. typ charakteristik, který rozhoduje o výsledném typu obvodových rovnic, tj. , zda jsou lineární či nelineární.

Při sestavování obvodových rovnic využíváme volnosti při jejich výběru k dosažení co nejjednodušších postupů z hlediska jejich dalšího řešení (uvedený způsob sestavení rovnic pomocí nezávislých řezů a smyček není jediný. Je však jeden z nejjednodušších – a je obecně použitelný). U obvodů s nelineárními charakteristikami prvků mnoho možností na výběr nemáme, zato u obvodů s lineárními charakteristikami prvků lze aplikovat různé metody, jenž umožňují efektivní způsob redukce počtu rovnic.

4.2.1 Popis charakteristik pasivních prvků

V teorii obvodů reálné jevy modelujeme důslednou aplikací tří fyzikálních zákonů, které jsou nazvány:

1. Ohmův zákon.
2. Indukční zákon.
3. Rovnice kontinuity.

Ohmův zákon se týká závislosti napětí a proudu, indukční zákon závislosti napětí a časové derivace proudu a rovnice kontinuity závislosti časové derivace napětí a proudu. Nejobecněji tyto zákony zapisujeme implicitně ve tvaru $E(y, x) = 0$, tj

1. $E_1(i, u) = 0$
2. $E_2(u, i') = 0$
3. $E_3(i', u) = 0$,

kde $i' = di/dt$ je časová derivace proudu a $u' = du/dt$ je časová derivace napětí.

Implicitní vyjádření není vždy jednoznačné. Rovnice zapsané v implicitním tvaru graficky zobrazujeme závislosti jedné proměnné na druhé tzv. charakteristikou. Nevykazuje-li charakteristika hysterézi a je-li jednoznačná, tj. každé hodnotě jedné proměnné přísluší právě jedna hodnota druhé proměnné, můžeme jednu implicitní funkci $E(y, x)$ vyjádřit dvěma explicitními funkcemi buď ve tvaru a) $y = f(x)$ nebo b) $x = g(y)$, funkci f a funkci g nazýváme (navzájem) inverzní funkce. Nevykazují-li charakteristiky diskutovaných fyzikálních funkcí hysterézi a jsou-li jejich explicitní vyjádření jednoznačná, zapíšeme je ve tvarech

1.a)	$u = e_1(i)$	a	1.b)	$i = b_1(u)$
2.a)	$u = e_2(i')$	a	2.b)	$i' = b_2(u)$
3.a)	$i = e_3(u')$	a	3.b)	$u' = b_3(i)$

Jsou-li hodnoty závislých proměnných (odezev) přímo úměrné hodnotám nezávislých veličin (podnětů), pak explicitní vyjádření zapisujeme lineárními rovnicemi s konstantními koeficienty (obvodovými parametry)

1.a)	$u = Ri$	a	1.b)	$i = \frac{1}{R}u = Gu,$
2.a)	$u = Li'$	a	2.b)	$i' = \frac{1}{L}u = \Gamma u,$
3.a)	$i = Cu'$	a	3.b)	$u' = \frac{1}{C}i = Di,$

kde $R(\Omega)$ je odpor, $G(S)$ vodivost, $L(H)$ indukčnost, $\Gamma(H^{-1})$ inverzní indukčnost, $C(F)$ kapacita a $D(F^{-1})$ inverzní kapacita. Obvodové parametry modelujeme ideálními obvodovými prvky. Ideálním odporníkem – rezistorem parametr R nebo G , ideální cívkou – induktorem parametr L nebo Γ a ideálním kondenzátorem – kapacitorem parametr C nebo D . Hodnoty parametrů jednotlivých ideálních prvků jsou inverzní – součin jejich hodnot je vždy roven jedné

$$RG=1; \quad L\Gamma=1; \quad CD=1.$$

Hodnoty parametrů jsou inverzní pouze v případech, kdy jev modelujeme pouze jedním fyzikálním zákonem. Reálný jev lze modelovat právě jedním fyzikálním zákonem jen ve výjimečných případech!

Obecně je každý jev modelován součtem (superpozicí) všech tří zákonů. V takovém tvaru, ve kterém jsou rovnice doposud prezentovány je nelze sečítat. Chceme-li pro jejich součet aplikovat Kirchhoffovy zákony, tedy sečítat napětí či proudy, musíme rovnice, v nichž jsou závisle proměnnými časové derivace veličin integrovat podle času, tj.

$$\int i' \cdot dt = \Gamma \int u \cdot dt \Rightarrow i = \Gamma u^x$$

$$\int u' \cdot dt = D \int i \cdot dt \Rightarrow u = Di^x,$$

kde u^x, i^x je integrál napětí či proudu. Jelikož derivace funkce popisující jev na době celočíselných násobků jeho cyklu (periody T) je vždy střídavá, pak i její integrál podle času musí být střídavý, z toho vyplývá určení hodnoty integrační konstanty. Každý jev má konečnou dobu cyklu.

4.2.2 Dualita obvodů

Pro sestavování součtů podle Kirchhoffových zákonů je nutné odlišit napětí a proudy, např. indexy. Tím obdržíme upravené rovnice, které jsou navíc uspořádány tak, aby z nich byla zřejmá i dualita (označení $\leftrightarrow$). Dualita je nástrojem rozlišení a schopnost rozlišovat je nástrojem poznání.

1.a)	$u_R = Ri$	$\leftrightarrow$	1.b)	$i_G = Gu$	
2.a)	$u_L = Li'$	$\leftrightarrow$	3.a)	$i_C = Cu'$	(x)
3.b)	$u_D = Di^x$	$\leftrightarrow$	2.b)	$i_\Gamma = \Gamma u^x$	

4.3. Kirchhoffovy zákony pro okamžité hodnoty veličin

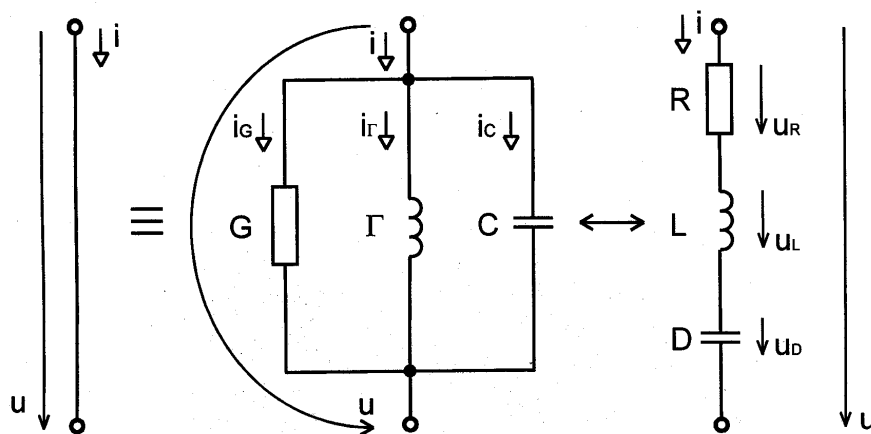
Součet proudů

$$i_G + i_C + i_\Gamma = Gu + Cu' + \Gamma u^x = i$$

modeluje obvodovou rovnici paralelního zapojení rezistoru, kapacitoru a induktoru s parametry G, C, Γ a součet napětí

$$u_R + u_L + u_D = Ri + Li' + Di^x = u$$

modeluje obvodovou rovnici sériového zapojení rezistoru, induktoru a kapacitoru s parametry R, L, D - viz obr. 7.



Obr. 7. Elementární obvodové modely parametrů elektromagnetického jevu

Elementární obvodový model elektromagnetického jevu lze v souladu s Kirchhoffovými zákony vytvořit pouze pro společné napětí (paralelní zapojení prvků) nebo pro společný proud (sériové zapojení prvků).

Paralelní elementární model elektromagnetického jevu a jeho sériový model jsou duální. Duální jsou okamžité hodnoty proudů a napětí, jejich derivace a integrál

$$i \leftrightarrow u, \quad i' \leftrightarrow u', \quad i^x \leftrightarrow u^x,$$

duální jsou okamžité hodnoty napětí rezistoru v sériovém zapojení a proudu rezistoru v paralelním zapojení, napětí induktoru v sériovém zapojení a proudu kapacitoru v paralelním zapojení a napětí kapacitoru v sériovém zapojení a proudu induktoru v paralelním zapojení:

$$u_R \leftrightarrow i_G, \quad u_L \leftrightarrow i_C, \quad u_D \leftrightarrow i_\Gamma,$$

duální jsou hodnoty parametrů

$$R \leftrightarrow G, \quad L \leftrightarrow C, \quad D \leftrightarrow \Gamma.$$

Dualita rozlišuje šest obvodových parametrů.

Dvojice obvodů je fyzikálně duální, jestliže duálně korespondující obvodové prvky vykazují identické průběhy okamžitých výkonů

$$p = p_R + p_L + p_D = p_G + p_C + p_\Gamma = i(u_R + u_L + u_D) = u(i_G + i_C + i_\Gamma).$$

To je možné pouze tehdy, jestliže duálně korespondující veličiny mají identické průběhy lišící se pouze jednotkou rozměru, i hodnoty duálně korespondujících obvodových parametrů jsou identické

$$\begin{aligned} R &\leftrightarrow G && \text{např. } 3 \, \Omega \leftrightarrow 3 \, \text{S} \\ L &\leftrightarrow C && \text{např. } 2 \, \text{mH} \leftrightarrow 2 \, \text{mF} \\ D &\leftrightarrow I && \text{např. } 400 \, \text{F}^{-1} \leftrightarrow 400 \, \text{H}^{-1}. \end{aligned}$$

4.4. Kirchhoffovy zákony pro efektivní hodnoty veličin

Efektivní hodnota veličiny je reálné číslo, které reprezentuje časový průběh veličiny na časovém intervalu jedné periody T , respektive jejich celočíselných násobcích. Efektivní hodnotu určíme tzv. integrální transformací časového průběhu. Druhá mocnina efektivní hodnoty veličiny je střední hodnotou skalárního součinu dvou identických funkcí a rovná se střední hodnotě práce prvku s jednotkovou hodnotou imitance

$$V^2 = \frac{(v, v)}{nT} = \frac{A(nT)}{nT} = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} v^2(t) \cdot dt, \text{ potom pro } n=1 \quad V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) \cdot dt}.$$

Aplikujeme-li integrální transformaci pro elementární rovnice časových funkcí (x) , obdržíme elementární rovnice pro jejich efektivní hodnoty

$$\begin{array}{llll} 1.a) & U_R = RI & \leftrightarrow & 1.b) \quad I_G = GU \\ 2.a) & U_L = LI' & \leftrightarrow & 3.a) \quad I_C = CU' \\ 3.b) & U_D = DI^x & \leftrightarrow & 2.b) \quad I_F = \Gamma U^x \end{array}$$

Rovnice (1.a) a (1.b) udávají závislost pro efektivní hodnoty napětí a proudu, je výhodné i ostatní čtyři rovnice vyjádřit stejně. Docílíme toho tak, že jejich pravé strany rozšíříme efektivními hodnotami proudu a napětí. Potom

$$U_L = LI' \frac{I}{I} = \frac{LI'}{I} \cdot I = Z_L I$$

$$U_D = DI^x \frac{I}{I} = \frac{DI^x}{I} \cdot I = Z_D I$$

$$I_C = CU' \frac{U}{U} = \frac{CU'}{U} \cdot U = Y_C U$$

$$I_F = \Gamma U^x \frac{U}{U} = \frac{\Gamma U^x}{U} U = Y_F U,$$

tím byla definována impedance induktoru Z_L , impedance kapacitoru Z_D , admitance kapacitoru Y_C a admitance induktoru Y_F . Jejich hodnoty jsou inverzní, modelujeme-li jev pouze jedním fyzikálním zákonem, jinak je jejich součin menší jedné

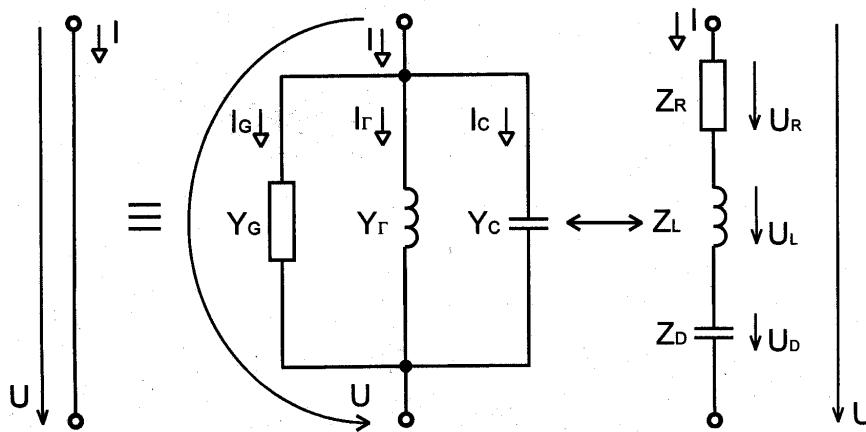
$$Z_L Y_F \leq 1, \quad Z_D Y_C \leq 1$$

Impedance a admitance (imitance) jsou definovány pro efektivní hodnoty střídavých průběhů napětí a proudu. Impedance rezistoru se rovná hodnotě odporu a admitance rezistoru se rovná hodnotě vodivosti

$$Z_R = R, \quad Y_G = G$$

I jejich hodnoty jsou inverzní, modelujeme-li jev pouze Ohmovým zákonem, jinak je jejich součin menší než jedna

$$Z_R Y_G = RG \leq 1.$$



Obr. 8. Elementární obvodové modely imitancí elektromagnetického jevu

Vyjádříme-li elementární rovnice podle imitancí

$$\begin{array}{lll} 1.a) & U_R = Z_R I & \leftrightarrow \\ 2.a) & U_L = Z_L I & \leftrightarrow \\ 3.a) & U_D = Z_D I & \leftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{ll} 1.b) & I_G = Y_G U \\ 3.a) & I_C = Y_C U \\ 2.b) & I_L = Y_L U \end{array}$$

pak můžeme vytvořit elementární obvodový model imitancí elmag. jevu (obr. 8).

Hodnotu druhé mocniny efektivní hodnoty napětí určíme podle definičního vztahu

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u_R + u_L + u_D)^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T u_R^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_L^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_D^2 dt + \frac{2}{T} \int_0^T u_R \cdot u_L dt + \frac{2}{T} \int_0^T u_R \cdot u_D dt + \\ &+ \frac{2}{T} \int_0^T u_L \cdot u_D dt = U_R^2 + U_L^2 + U_D^2 - 2LDI^2 = U_R^2 + U_Q^2 = U_P^2 + U_Q^2, \end{aligned}$$

$$\text{protože hodnota } \int_0^T u_R \cdot u_L dt = RL \int_0^T i \cdot i' dt = 0, \text{ stejně jako hodnota } \int_0^T u_R \cdot u_D dt = RD \int_0^T i i^x dt = 0,$$

$$\text{kdežto střední hodnota } \frac{1}{T} \int_0^T i' i^x dt = -I^2.$$

Jinými slovy: skalární součin dvou funkcí, z nichž jedna je derivací druhé je na době periody ortogonální (tj. má nulovou hodnotu), zatímco když jedna z nich je derivací funkce a druhá integrálem funkce, je jejich střední hodnota skalárního součinu na době periody nesouhlasně identická s druhou mocninou efektivní hodnoty funkce.

4.4.1 Definice aktivní a reaktivní složky napětí

Odvozená rovnice je geometrickým součtem efektivních hodnot složek napětí. První sčítanec v odvozené rovnici reprezentuje okamžité hodnoty napětí rezistoru nazvěme ho aktivní složkou napětí a označme indexem P

$$u_R = u_P, \quad U_R = U_P.$$

Součet okamžitých hodnot napětí induktoru a kapacitoru nazvěme reaktivní složkou napětí (označme ji indexem Q)

$$u_Q = u_L + u_D,$$

která je evidentně reprezentována reaktivní složkou efektivní hodnoty napětí

$$U_Q^2 = U_L^2 + U_D^2 - 2LDI^2.$$

4.4.1.1 Grafické znázornění aktivní a reaktivní složky efektivní hodnoty napětí

Podle 2. Kirchhoffova zákona pro okamžité hodnoty napětí vyjádříme napětí algebraickým součtem aktivní a reaktivní složky

$$u = u_P + u_Q$$

a podle 2. Kirchhoffova zákona pro efektivní hodnoty napětí vyjádříme efektivní hodnotu napětí geometrickým součtem aktivní a reaktivní složky hodnoty napětí

$$U^2 = U_P^2 + U_Q^2.$$

Rovnice je ve tvaru Pythagorovy věty, graficky jí zobrazujeme pravoúhlým trojúhelníkem.

4.4.1.2 Diskuze reaktivní složky napětí

Rozšíříme-li třetí člen na pravé straně rovnice

$$U_Q^2 = U_L^2 + U_D^2 - 2LDI^2 \quad \text{výrazem} \quad \frac{I'I^x}{I'I^x},$$

pak po algebraické úpravě

$$2LDI^2 \frac{I'I^x}{I'I^x} = 2LI'DI^x \frac{I^2}{I'I^x} = 2U_L U_D \cos \varepsilon_i$$

obdržíme rovnici pro reaktivní složku efektivní hodnoty napětí

$$U_Q^2 = U_L^2 + U_D^2 - 2U_L U_D \cos \varepsilon_i,$$

která představuje kosinovou větu pro obecný trojúhelník. Pro harmonické průběhy je hodnota $\cos \varepsilon_i = 1$.

4.4.2 Vektorový diagram složek napětí

Dosadíme-li rovnici pro reaktivní složku efektivní hodnoty napětí do Pythagorovy věty

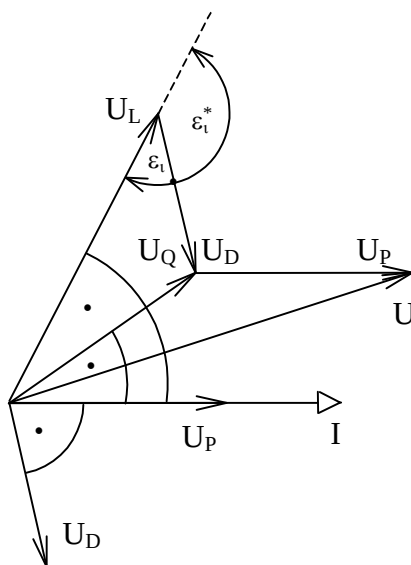
$$U^2 = U_P^2 + U_Q^2,$$

obdržíme rovnici

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 + U_D^2 - 2U_L U_D \cos \varepsilon_i \quad (2-U)$$

vyjadřující 2. Kirchhoffův zákon pro efektivní hodnotu napětí a zobrazíme ji vektorovým diagramem napětí v měřítku m_U . Úsečka U_P je kolmá k rovině, v níž leží obecný trojúhelník tvořený stranami

U_L, U_D, U_Q - viz obr. 9.



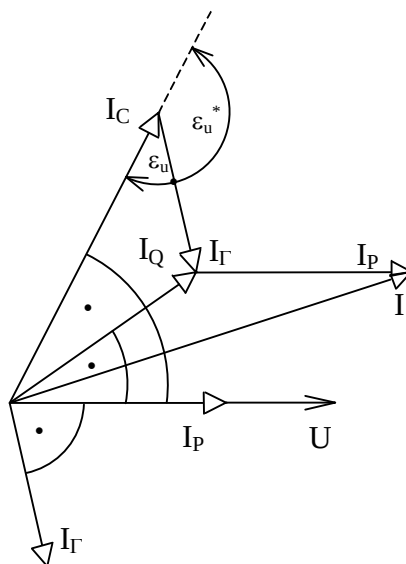
Obr. 9 Vektorový diagram složek napětí

4.4.3 Vektorový diagram složek proudu

Rovnici pro druhou mocninu efektivní hodnoty proudu lze odvodit obdobným postupem nebo méně pracněji aplikací principu duality

$$I^2 = I_G^2 + I_C^2 + I_R^2 - 2I_C I_R \cos \varepsilon_u \quad (1-I)$$

a zobrazujeme ji vektorovým diagramem složek proudu v měřítku m_I (např. obr. 10)



Obr. 10 Vektorový diagram složek proudu

$\cos \varepsilon_u = 1$ pro harmonické průběhy, které zobrazujeme v rovině komplexních čísel, tzv. fázorovým diagramem.

4.5. Rovnice výkonu – Tellegenova věta

Výkon definujeme součinem napětí a proudu

- pro okamžité hodnoty veličin

$$p = Gu^2 + Cu'u + \Gamma u^x u = p_G + p_Q = p_P + p_Q,$$

$$p = Ri^2 + Li'i + Di^x i = p_R + p_Q = p_P + p_Q,$$

- pro efektivní hodnoty veličin

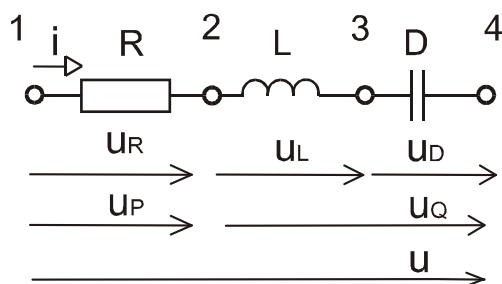
$$P^2 = I^2 U^2 = P_G^2 + P_C^2 + P_F^2 - 2P_C P_F \cos \varepsilon_u = P_G^2 + P_Q^2 = P_P^2 + P_Q^2,$$

$$P^2 = U^2 I^2 = P_R^2 + P_L^2 + P_D^2 - 2P_L P_D \cos \varepsilon_i = P_R^2 + P_Q^2 = P_P^2 + P_Q^2,$$

které zobrazujeme vektorovými diagramy složek výkonu. Zvolíme-li v paralelním modelu měřítko výkonu $m_p = m_I U$, pak žádaný vektorový diagram složek výkonu obdržíme záměnou písmene I písmenem P ve vektorovém diagramu složek proudu (obr. 10). Duálně v sériovém modelu.

4.6. Modelování průběhů

Jako příklad zobrazení (vizualizace) průběhů (grafů) byl zvolen sériový obvodový model s jednotkovými hodnotami parametrů: $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $D = 1 \text{ F}^{-1}$ a lichoběžníkový průběh proudu (obr. 11.b, 12.b).



Obr. Sériový model elektromagnetického jevu

Seznam zobrazených průběhů:

Obr. 11 Napětí: a) induktoru, b) rezistoru, c) kapacitoru, d) aktivní složka, e) reaktivní složka, f) celkové.

Obr. 12 Napětí: a) induktoru, b) rezistoru, c) kapacitoru.

Výkon: d) induktoru, e) rezistoru, f) kapacitoru.

Obr. 13 Výkon: a) induktoru, b) rezistoru, c) kapacitoru, d) aktivní složka, e) reaktivní složka, f) celkový.



Text k prostudování

Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitoly 5.1, 5.2, 5.3



Další studijní texty

Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitoly 1.5, 2.3, 3.1, 3.2, 6.1.



Příklady

1. Popište průběhy v obr. 11.

Řešení

- 1.a) Napětí induktoru je derivací proudu podle času.
- 1.b) Proud je integrál napětí induktoru podle času.
- 2.a) Napětí kapacitoru je integrálem proudu podle času.
- 2.b) Proud je derivací napětí kapacitoru podle času.
3. Proud je rovněž derivací náboje q podle času, potom obr. 11.a) až 11.c) zobrazují sčítance v diferenciální rovnici druhého řádu $q'' + q' + q = u$, jejíž pravá strana (obr. 11.f) je celkové napětí, přičemž hodnoty obvodových parametrů se rovnají jedné. Jinými slovy: okamžité hodnoty celkového napětí jsou algebraickým součtem napětí induktoru, rezistoru a kapacitoru.
4. Aktivní složka napětí se rovná napětí rezistoru.
5. Okamžité hodnoty reaktivní složky napětí jsou algebraickým součtem okamžitých hodnot napětí induktoru a kapacitoru.

2. Uveďte v jakém vztahu jsou efektivní hodnoty veličin v obr. 11.

Řešení

1. Efektivní hodnota proudu $I = 1,633 \text{ A}$.
2. Efektivní hodnota derivace proudu podle času se rovná podílu efektivní hodnoty napětí induktoru a hodnoty indukčnosti $I' = \frac{U_L}{L} = \frac{1,414}{1} \text{ As}^{-1}$.
3. Efektivní hodnota integrálu proudu podle času se rovná podílu efektivní hodnoty napětí kapacitoru a hodnoty inverzní kapacity $I^x = \frac{U_D}{D} = \frac{2,065}{1} \text{ As}$.
4. Z předchozích hodnot určíme hodnotu $\cos \varepsilon_i = \frac{I^2}{II^x} = \frac{1,633^2}{1,414 \cdot 2,065} \doteq 0,913$
5. Efektivní hodnota aktivní složky napětí se rovná efektivní hodnotě napětí rezistoru.
6. Efektivní hodnota reaktivní složky napětí je geometrickým součtem efektivní hodnoty napětí induktoru a kapacitoru.
7. Efektivní hodnota celkového napětí je geometrickým součtem efektivní hodnoty aktivní a reaktivní složky napětí, respektive geometrickým součtem efektivní hodnoty napětí rezistoru, induktoru a kapacitoru.
3. Jak byly určeny okamžité hodnoty výkonu a výkon induktoru, rezistoru a kapacitoru v obr. 12?

Řešení

1. Okamžité hodnoty výkonu jednotlivých prvků jsou součinem okamžitých hodnot napětí induktoru, rezistoru, kapacitoru a okamžitých hodnot proudu.
2. Hodnoty výkonu jednotlivých prvků jsou součinem efektivních hodnot napětí induktoru, rezistoru, kapacitoru a efektivní hodnoty proudu.
4. Jak byly určeny okamžité hodnoty výkonu a výkonu v obr. 13?

Řešení

1. Okamžité hodnoty výkonu jsou součinem příslušných okamžitých hodnot napětí a okamžitých hodnot proudu, respektive algebraickým součtem okamžitých hodnot výkonu příslušných prvků.
2. Hodnoty výkonu jsou součinem příslušných efektivních hodnot napětí a efektivní hodnoty proudu, respektive geometrickým součtem hodnot výkonu příslušných prvků.
5. Pro průběhy uvedené v obr. 11 jsou uvedeny efektivní hodnoty napětí rezistoru, induktoru a kapacitoru: $U_R = 1,633 \text{ V}$, $U_L = 1,414 \text{ V}$, $U_D = 2,065 \text{ V}$ a dále je známo, že hodnoty všech obvodových parametrů jsou jednotkové. Určete efektivní hodnoty aktivní a reaktivní složky napětí a efektivní hodnotu napětí.

Řešení:

Ze známých hodnot obvodových parametrů a efektivních hodnot napětí určíme efektivní hodnotu proudu $I = U_R / R = 1,633 \text{ A}$. Druhou mocninu efektivní hodnoty napětí pak vyjádříme rovnicí

$$U^2 = (RI)^2 + (LI')^2 + (DI^x)^2 - 2LDI^2 = U_p^2 + U_Q^2 =$$

$$= 1,633^2 + 1,414^2 + 2,065^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,633^2 = 1,633^2 + 0,930^2 = 1,897^2,$$

z toho vyplývá, že $U_p = 1,633 \text{ V}$, $U_Q = 0,965 \text{ V}$, $U = 1,897 \text{ V}$.

6. Určete efektivní hodnotu napětí reaktivní složky napětí, jsou-li známy hodnoty $U = 100 \text{ V}$, $I = 2 \text{ A}$, $R = 40 \Omega$, (výsledek $U_Q = 60 \text{ V}$).

**Otázky**

Napište obvodovou rovnici pro složky efektivních hodnot:

1. Proud. 2. Napětí

Složky efektivních hodnot vyjádřete pomocí parametrů a napište rovnice pro:

3. Proud. 4. Napětí

5. Definujte $\cos \varepsilon_u$ a $\cos \varepsilon_i$.



Odpovědi na otázky: rov. (1-I), (2-U), dávka 4.4 pro otázky 3., 4., 5.

**Úlohy k řešení**

Odvoďte obvodové rovnice efektivních hodnot veličin pro zjednodušené obvodové modely tvořené

I. rezistorem a induktorem pro:

1. Paralelní model

2. Sériový model

II. rezistorem a kapacitorem pro:

3. Paralelní model

4. Sériový model

5. Napište rovnice pro efektivní hodnoty veličin zjednodušeného obvodu tvořeného jedním prvkem.

**Klíč k řešení**

1. až 5.

Rovnice pro efektivní hodnoty veličin zjednodušených modelů získáme tak, že za hodnotu příslušného neuvažovaného parametru dosadíme nulu do rovnic pro efektivní hodnoty složek proudu a napětí.

**Autokontrola**

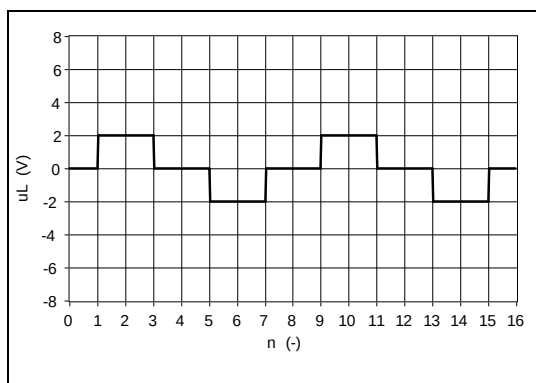
Pokud jste reagovali správně na více jak polovinu podnětů z každé oblasti, pokračujte ve studiu jiné kapitoly, pokud ne, pak text studijní opory znovu prostudujte a opakovaně vypracujte odpovědi na podněty.



Zadání 4. samostatné práce

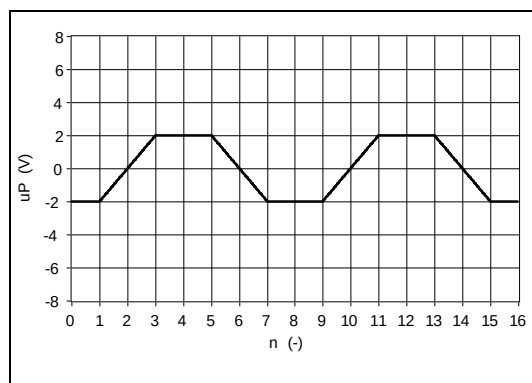
Aplikací definice fyzikální duality popište průběhy v obr. 11 pro duální obvodový model a stanovte všechny efektivní hodnoty veličin.

Zpracoval: Jaromír Kijonka



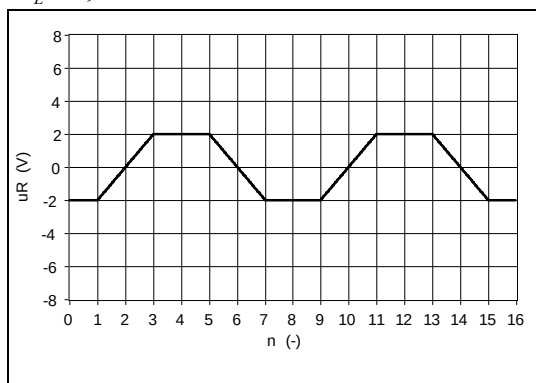
a) napětí induktoru

$$U_L = 1,414 \text{ V}$$



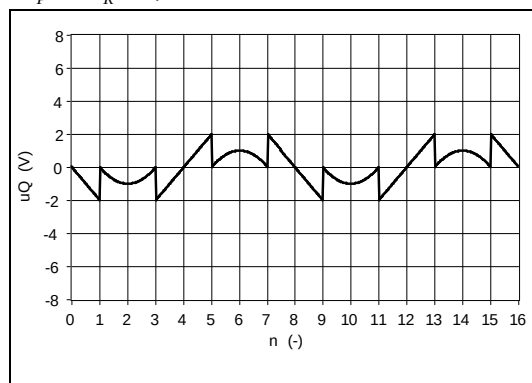
d) aktivní složka napětí

$$U_P = U_R = 1,633 \text{ V}$$



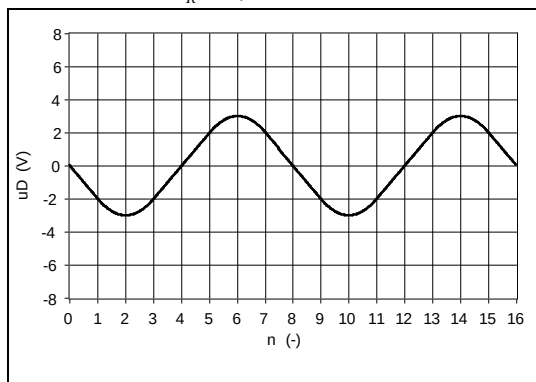
b) proud, napětí rezistoru

$$I = 1,633 \text{ A}, U_R = 1,633 \text{ V}$$



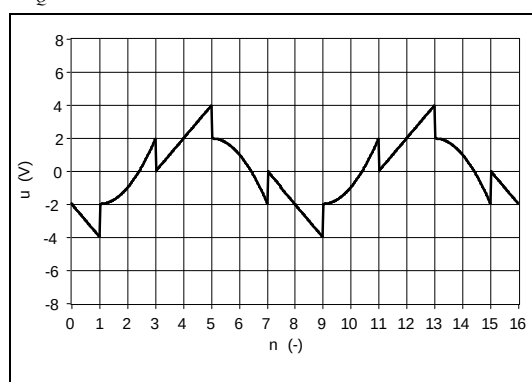
e) reaktivní složka napětí

$$U_Q = 0,964 \text{ V}$$



c) napětí kapacitoru

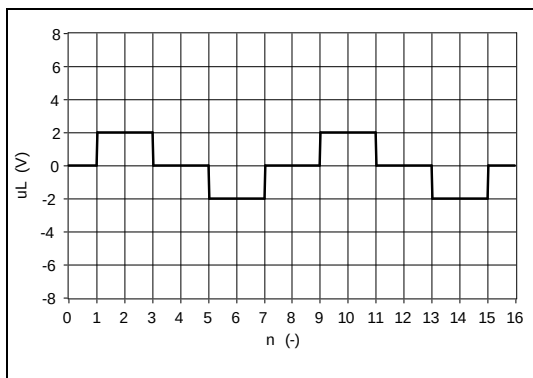
$$U_D = 2,065 \text{ V}$$



f) celkové napětí

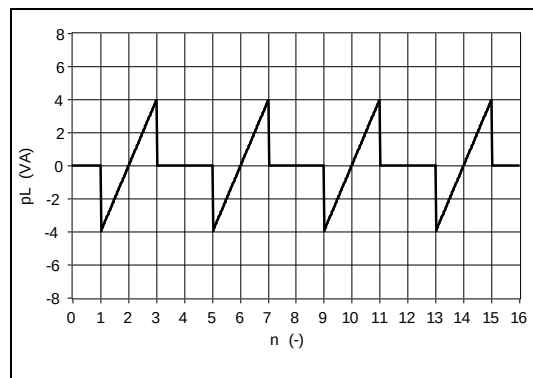
$$U = 1,897 \text{ V}$$

Obr. 11 Grafy napětí.



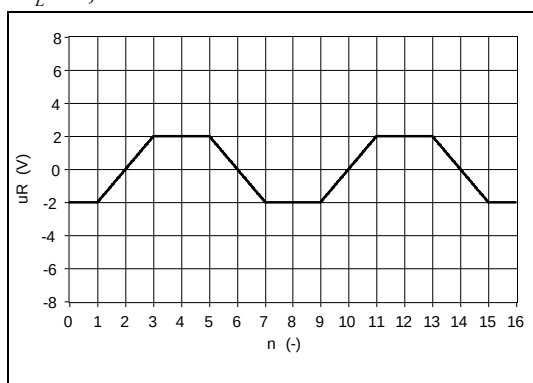
a) napětí induktoru

$$U_L = 1,414 \text{ V}$$



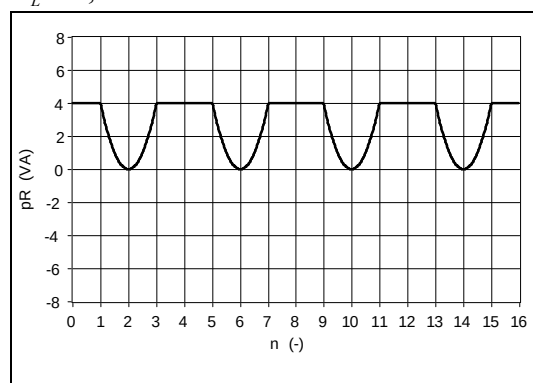
d) výkon induktoru

$$P_L = 2,309 \text{ var}$$



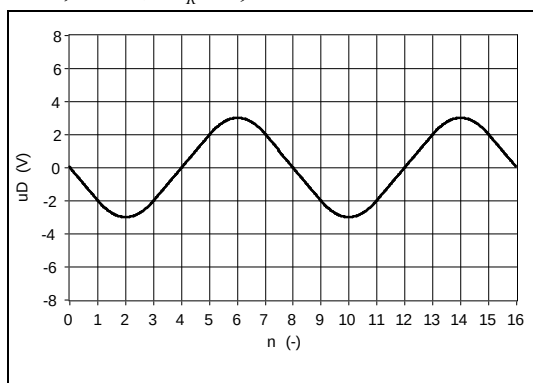
b) proud, napětí rezistoru

$$I = 1,633 \text{ A}, U_R = 1,633 \text{ V}$$



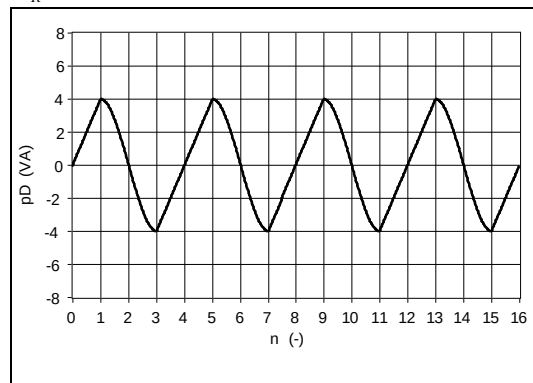
e) výkon rezistoru

$$P_R = 2,667 \text{ W}$$



c) napětí kapacitoru

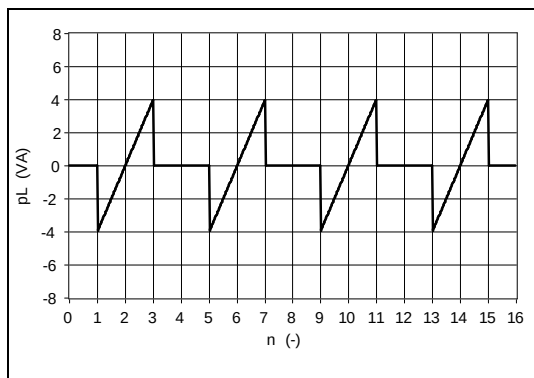
$$U_D = 2,065 \text{ V}$$



f) výkon kapacitoru

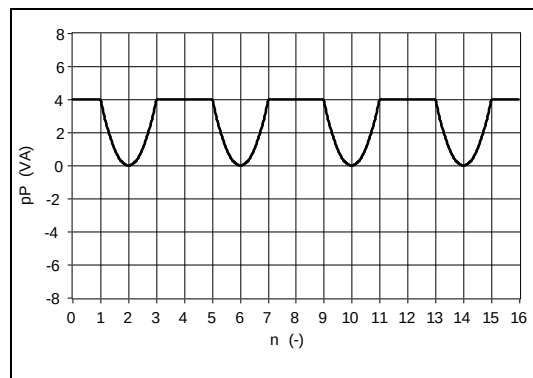
$$P_D = 3,372 \text{ var}$$

Obr.12 Grafy napětí a výkonu.



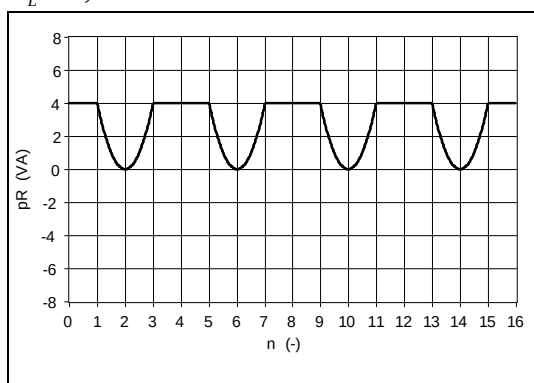
a) výkon induktoru

$$P_L = 2,309 \text{ var}$$



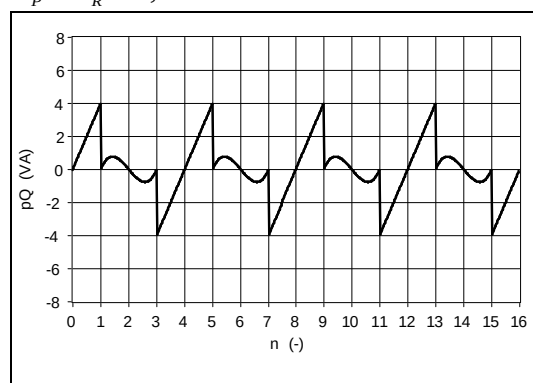
d) aktivní složka výkonu

$$P_P = P_R = 2,667 \text{ W}$$



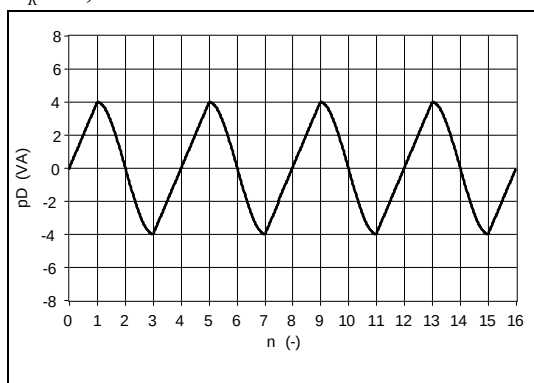
b) výkon rezistoru

$$P_R = 2,667 \text{ W}$$



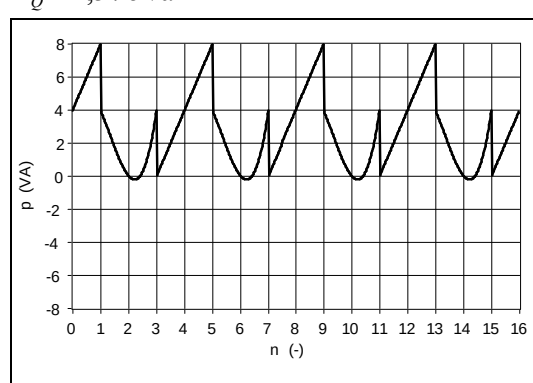
e) reaktivní složka výkonu

$$P_Q = 1,576 \text{ var}$$



c) výkon kapacitoru

$$P_D = 3,372 \text{ var}$$



f) celkový výkon

$$P = 3,098 \text{ VA}$$

Obr. 13 Grafy výkonu

5. ANALÝZA OBVODŮ METODOU SMYČKOVÝCH PROUDŮ A ŘEZOVÝCH NAPĚTÍ



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování textu této studijní opory budete umět:

- řešit (tj. vypočítat obvodové veličiny) složité elektrické obvody metodou smyčkových rovnic
- řešit (tj. vypočítat obvodové veličiny) složité elektrické obvody metodou řezových napětí
- řešit (tj. vypočítat obvodové veličiny) složité elektrické obvody metodou uzlových napětí



Výklad

Metody smyčkových proudů a řezových napětí patří mezi obecné metody řešení lineárních elektrických obvodů. Umožňují stanovit neznámé větrové veličiny elektrického obvodu buď z proudů nezávislých smyček, nebo z napětí nezávislých řezů. Volba nezávislých smyček a řezů zpravidla vychází z rozboru topologického schématu (grafu) obvodu. Každá z těchto metod využívá k analýze obvodu výhradně jednoho z Kirchhoffových zákonů, funkční závislosti mezi napětím a proudem na pasivních modelových prvcích obvodu a princip superpozice. Pro usnadnění řešení obvodu lze s výhodou použít rovněž metody postupného zjednodušování větví obvodu a transfiguraci větví s reálnými zdroji napětí na zdroje proudu a naopak. Předností obou těchto metod, ve srovnání s metodou přímé aplikace obou Kirchhoffových zákonů, je výrazné snížení počtu obvodových rovnic a automatizace popisu obvodu podle jednoduchých pravidel, které vycházejí z maticového popisu obvodu. Při výběru metody zpravidla vycházíme z analýzy grafu obvodu a zohledňujeme jeho počet proudových a napěťových větví. Počet proudových větví u metody smyčkových proudů totiž snižuje počet neznámých proudů nezávislých větví, stejně jako počet napěťových větví u metody řezových napětí počet neznámých napětí nezávislých řezů. Je-li počet nezávislých větví minus počet proudových větví obvodu menší než počet nezávislých uzlů minus počet napěťových větví obvodu s výhodou použijeme metodu smyčkových proudů. V opačném případě volíme raději metodu řezových napětí tj. je-li počet nezávislých uzlů minus počet napěťových větví obvodu menší než počet nezávislých větví minus počet proudových větví obvodu.

5.1. Metoda smyčkových proudů

Základní úlohou této metody je stanovení neznámých větrových proudů obvodu. Vychází z 2. Kirchhoffova zákona, který je aplikován na vybrané smyčky obvodu, do kterých dosazujeme za úbytky napětí pasivních větví definiční vztahy mezi větrovým napětím a proudem. Znaménka úbytků napětí a vnitřních napětí zdrojů smyček orientujeme podle jejich počítacích šipek vůči zvolené orientaci oběhu smyčky tj. souhlasné orientaci odpovídá znaménko + a nesouhlasné orientaci znaménko -. Orientaci oběhů smyček obvodu můžeme sice volit zcela libovolně, ale s ohledem na usnadnění popisu ji zpravidla volíme shodnou ve všech smyčkách.

Jde-li o obvod s obecnými časovými průběhy dosazujeme za úbytky funkční závislosti $u = Ri$,

$$u = L \frac{di}{dt} \text{ a } u = \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau + u_C(0), \text{ kde } u_C(0) \text{ je počáteční hodnota napětí kondenzátoru. Jde-li o}$$

obvod stejnosměrný nebo střídavý s harmonickými průběhy elektrických veličin úbytky vyjádříme užitím Ohmova zákona ve tvaru $U = RI$ nebo $\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}$. Získáme tak soustavu smyčkových rovnic popisují analyzovaný obvod, kde úbytky napětí pasivních větví obvodu jsou funkcí větvových proudů. Popis obvodu se ale zjednoduší, až po zavedení tzv. smyčkových proudů, kdy za větvové proudy dosadíme do smyčkových rovnic součet (superpozici) odpovídajících smyčkových proudů. Orientaci smyčkových proudů můžeme opět volit zcela libovolně, ale je výhodné ji ztotožnit s již zvoleným souhlasným smyslem oběhu smyček. Po převedení vnitřní napětí zdrojů na pravou stranu smyčkových rovnic, zůstanou na jejich levých stranách pouze úbytky napětí zapsané jako funkce smyčkových proudů, které jednoznačně charakterizující chování analyzovaného obvodu.

Počet smyček a tedy i rovnic obvodu je roven počtu jeho nezávislých větví. Je určen rozdílem počtu větví a nezávislých uzlů obvodu. Každou smyčku vždy tvoří právě jedna nezávislá větev a alespoň jedna větev stromu obvodu.

5.2. Metoda řezových napětí

Základní úlohou této metody je stanovení neznámých větvových napětí obvodu. Vychází ze zobecněného 1. Kirchhoffova zákona, který je aplikován na vybrané řezy obvodu, do kterých dosazujeme za proudy pasivních větví definiční vztahy mezi větvovým proudem a napětím. Znaménka proudů řezů orientujeme podle orientace jejich počítacích šipek vůči zvolené referenční orientaci proudu řezu. Kladnou referenční orientaci zpravidla přisuzujeme počítací šipce proudu orientované ven z řezu tj. proudu „vytékajícímu“ z řezu odpovídá znaménko + a proudu „vtékajícímu“ do řezu znaménko –.

Jde-li o obvod s obecnými časovými průběhy dosazujeme za proudy funkční závislosti $i = Gu$,

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ a } i = \frac{1}{L} \int_0^t u d\tau + i_L(0), \text{ kde } i_L(0) \text{ je počáteční hodnota proudu cívky. Jde-li o obvod}$$

stejnosměrný nebo střídavý s harmonickými průběhy elektrických veličin užíváme Ohmova zákona ve tvaru $I = GU$ nebo $\hat{I} = \hat{Y}\hat{U}$. Získáme tak soustavu rovnic řezů popisují analyzovaný obvod, kde proudy pasivních větví obvodu jsou funkcí větvových napětí. Popis obvodu se ale opět zjednoduší, až po zavedení tzv. řezových napětí, kdy za větvová napětí dosadíme do rovnic řezů součet odpovídajících řezových napětí. Orientace řezových napětí můžeme být libovolná, je ale výhodné ji volit jednotně, a to buď do, anebo ven z řezů. Řezová napětí zpravidla orientujeme ven z řezů ve shodě s kladnou referenční orientací zavedenou pro proudy řezů. Po převedení zdrojů proudu na pravou stranu rovnic řezů, zůstanou na jejich levých stranách pouze proudy zapsané jako funkce řezových napětí, které jednoznačně charakterizující chování analyzovaného obvodu.

Počet řezů a tedy i rovnic obvodu je roven počtu větví jeho stromu. Je určen počtem nezávislých uzlů obvodu, což je počet uzlů obvodu minus 1. Každému řezu vždy náleží právě jedna větev stromu obvodu a alespoň jedna nezávislá větev. Řez vymezený tzv. Jordanovou křivkou může mít sice libovolný tvar, ale musí protínat právě jednu větev stromu. Nezávislou větev však může protínat více řezů.

5.3. Metoda uzlových napětí

Tato metoda je zvláštním případem metody řezových napětí. Zvolíme-li řezy tak, že každý z nich bude obsahovat právě jeden nezávislý uzel obvodu a orientujeme-li řezová napětí vůči závislému tzv. vztáhnému uzlu obvodu, mluvíme o metodě uzlových napětí a řezová napětí mají v tomto případě

synonymum uzlová. Výhodou této metody je, že při analýze obvodu není nezbytně nutné vycházet ze stromu obvodu, a že vzájemná orientace uzlových napětí je vždy nesouhlasná. Analýza obvodu metodou uzlových napětí tak prakticky vychází pouze z vhodné volby pozice vztažného uzlu. Jeho volba je libovolná, až na případ obvodu ve kterém existuje napěťová větev, kdy přiřazujeme vztažný uzel jednomu z uzlů této větve.



Text k prostudování

Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitoly 5.4, 5.5, 5.6 5.7



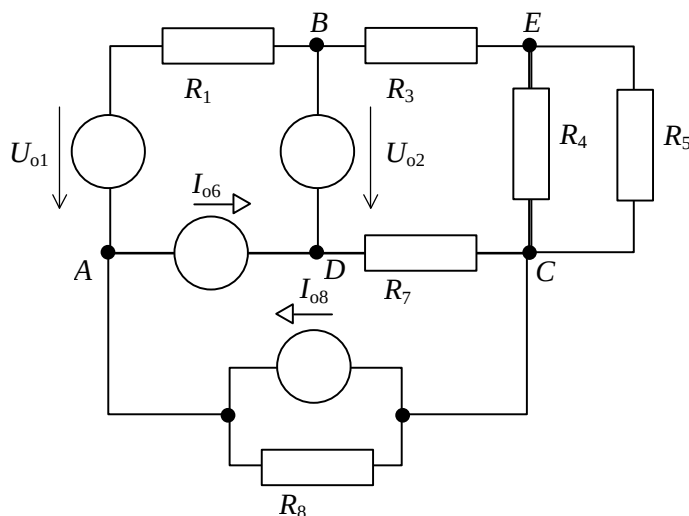
Další studijní texty

Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitoly 6.4 až 6.5, 7.2 a 8.4



Příklady

1. Metodou smyčkových proudů analyzujte a vyřešte stejnosměrný obvod na obr. 1. Zadané hodnoty parametrů jsou: $R_1 = 1 \Omega$, $U_{o1} = 1 \text{ V}$, $U_{o2} = 2 \text{ V}$, $R_3 = 1,6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$, $I_{o6} = 4 \text{ A}$, $R_7 = 2 \Omega$, $I_{o8} = 1 \text{ A}$, $R_8 = 6 \Omega$.



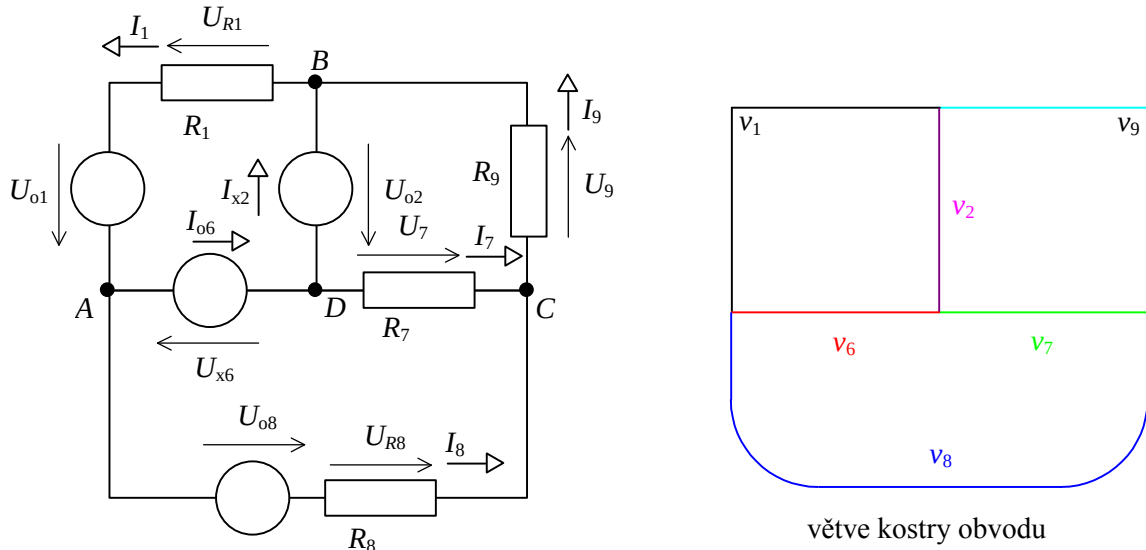
Obr. 1 Schéma zapojení stejnosměrného obvodu

Řešení:

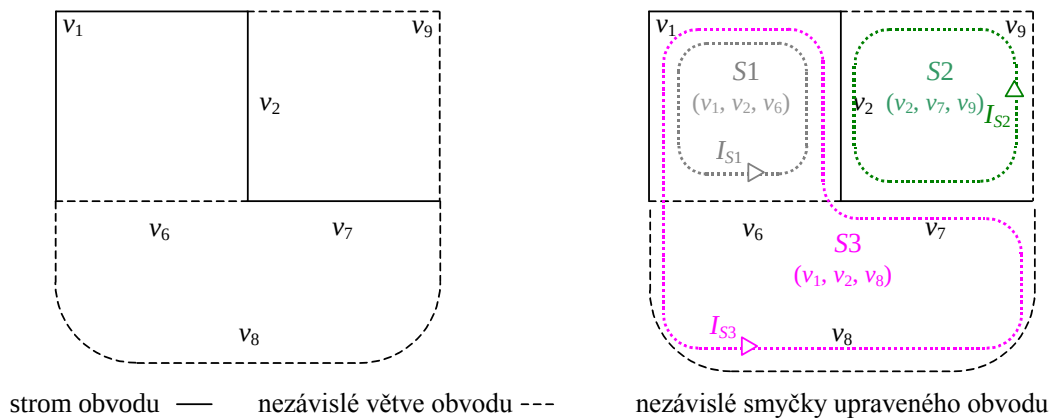
Obvod na obr. 1 s 8 větvemi (reálný zdroj napětí nebo proudu považujeme za jednu větev) nejprve upravme tak, že odpory ve větvi vymezené uzly B a C nahradíme odporem o hodnotě $R_9 = R_3 + R_4 // R_5 = 1,6 + 4/6 = 4 \Omega$ a reálný zdroj proudu mezi uzly A a C transfigurujeme na reálný zdroj napětí s parametry $U_{o8} = R_8 I_{o8} = 6 \cdot 1 = 6 \text{ V}$ a $R_8 = 6 \Omega$ viz obr. 2 vlevo, přičemž počítací šipku jeho napětí orientujeme proti směru šipky zdroje proudu I_{o8} s ohledem na ekvivalenci reálných zdrojů napětí a proudu vůči uzlům A a C. Tímto způsobem redukuje počet větví původního obvodu na 6, čímž zmenšíme počet smyčkových rovnic o 2.

Pro takto upravený obvod je na obr. 2 vpravo nakresleno jeho topologické schéma (kostra obvodu) s označenými větvemi obvodu, na jehož základě zvolíme strom a nezávislé větve obvodu, zakreslené na obr. 3 vlevo.

Jelikož počet nezávislých uzlů je vždy o 1 menší, než počet uzlů obvodu, má obvod 3 nezávislé uzly a tedy i stejný počet větví stromu. Počet nezávislých větví upraveného obvodu je roven celkovému počtu větví tohoto obvodu minus počet větví stromu obvodu tj. $6 - 3 = 3$. Jelikož ale větev v_6 (uzly A a D) je proudová, nesmí být součástí stromu obvodu a je tedy větví nezávislou. V této větvi totiž známe hodnotu proudu, která je rovna hodnotě proudu ideálního zdroje $I_{o6} = 1$ A, ale neznáme napětí U_{x6} , jehož hodnota závisí na parametrech ostatních větví obvodu. Počítací šipku tohoto napětí orientujeme proti směru šipky zdroje proudu I_{o6} . Další dvě nezávislé větve obvodu zvolme např. v_8, v_9 . Zbylé větve kostry obvodu tj. v_1, v_2, v_7 tvoří strom obvodu.



Obr. 2 Upravené schéma pro analýzu obvodu metodou smyčkových proudů a jeho graf



Obr. 3 Strom, nezávislé větve a smyčky upraveného obvodu

Nezávislé smyčky označme písmenem S a indexem odpovídajícím pořadí smyčky. Podle zavedené indexace na obr. 3 vpravo jsme přiřadili smyčkám proudy tj. v našem případě smyčky S1 (v_1, v_2, v_6) smyčkový proud I_{S1} , smyčky S2 (v_2, v_7, v_9) smyčkový proud I_{S2} , smyčky S3 (v_1, v_7, v_8) smyčkový proud I_{S3} . Oběhy smyček a jím příslušející smyčkové proudy orientujeme s ohledem na směr proudu zdroje ve větvi v_6 proti smyslu oběhu hodinových ručiček a sestavme smyčkové rovnice podle 2. Kirchhoffova zákona:

$$\text{smyčka S1: } -U_{x6} - U_{o2} + U_{R1} + U_{o1} = 0$$

$$\text{smyčka S2: } U_9 + U_{o2} + U_7 = 0$$

$$\text{smyčka S3: } U_{o8} + U_{R_8} - U_7 - U_{o2} + U_{R_1} + U_{o1} = 0,$$

které upravíme tak, že vnitřní napětí zdrojů převedeme na pravou stranu a za úbytky napětí na rezistorech dosadíme z Ohmova zákona

$$\text{smyčka S1: } R_1 I_1 = -U_{o1} + U_{o2} + U_{x6}$$

$$\text{smyčka S2: } R_9 I_9 + R_7 I_7 = -U_{o2}$$

$$\text{smyčka S3: } R_8 I_8 - R_7 I_7 + R_1 I_1 = -U_{o1} + U_{o2} - U_{o8}.$$

Vyjádříme-li si větrové proudy stromu obvodu a proud I_{x2} superpozicí příslušných smyčkových proudů, získáme rovnice

$$I_1 = I_{S1} + I_{S3}$$

$$I_7 = I_{S2} - I_{S3} = -(I_{S3} - I_{S2})$$

$$I_{x2} = I_{S1} - I_{S2} + I_{S3}.$$

Po dosazení prvních dvou předchozích proudů a rovností $I_8 = I_{S3}$ a $I_9 = I_{S2}$ do smyčkových rovnic obdržíme soustavu:

$$\text{smyčka S1: } R_1(I_{S1} + I_{S3}) = R_1 I_{S1} + R_1 I_{S3} = -U_{o1} + U_{o2} + U_{x6}$$

$$\text{smyčka S2: } R_9 I_{S2} + R_7(I_{S2} - I_{S3}) = (R_7 + R_9)I_{S2} - R_7 I_{S3} = -U_{o2}$$

$$R_8 I_{S3} - R_7(- (I_{S3} - I_{S2})) + R_1(I_{S3} + I_{S1}) =$$

$$\text{smyčka S3: } = R_1 I_{S1} - R_7 I_{S2} + (R_1 + R_7 + R_8)I_{S3} = -U_{o1} + U_{o2} - U_{o8},$$

kterou můžeme zapsat v maticovém tvaru s ohledem na rovnost $I_{S1} = I_{o6}$ následujícím způsobem

$$\begin{bmatrix} R_1 & -0 & R_1 \\ -0 & R_7 + R_9 & -R_7 \\ R_1 & -R_7 & R_1 + R_7 + R_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{o6} \\ I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{o1} + U_{o2} + U_{x6} \\ -U_{o2} \\ -U_{o1} + U_{o2} - U_{o8} \end{bmatrix}$$

nebo ve zjednodušeném tvaru

$$[R] \cdot [I_s] = [U_v],$$

kde $[R]$ je čtvercová matice odporu, $[I_s]$ vektor smyčkových proudů a $[U_v]$ vektor zdrojů napětí obvodu. Rozměry matice a obou vektorů jsou určeny počtem nezávislých smyček.

Zobecníme-li maticový zápis analyzovaného obvodu, pak matici odporu (impedance) můžeme sestavit přímo z upraveného schématu zapojení obvodu, jelikož prvky její diagonály jsou dány součtem odporů (impedancí) dané smyčky a jsou vždy kladné. Prvky mimo hlavní diagonálu matice jsou kolem ní souměrné a získáme je průnikem odpovídajících dvojic prvků hlavní diagonály. Jejich znaménka jsou dána orientací smyčkových proudů vůči společným větvím stromu obvodu. Souhlasné orientaci odpovídá znaménko +, nesouhlasné znaménko -. Prvky vektoru zdrojů stanovíme součtem vnitřních napětí zdrojů dané smyčky. Znaménka těchto zdrojů určujeme podle orientace jejich počítacích šipek vůči zvolené orientaci oběhu napětí příslušné smyčky. Souhlasné orientaci však nyní odpovídá **záporné** znaménko, nesouhlasné **kladné** (znaménka přiřazujeme opačně, jelikož jsme vnitřní napětí zdrojů převedli na pravou stranu smyčkových rovnic).

Jelikož proud smyčky S1 je známý, můžeme snížit řád matice o 1 tím, že z původního maticového zápisu soustavy rovnic vyloučíme 1. řádek a 1. sloupec. Musíme však zachovat vazbu (lineární závislost) 2. a 3. rovnice s 1. rovnicí, kterou na levé straně rovnic zohledňuje v 2. řádku člen $-0 \cdot I_{o6}$ a ve 3. řádku člen $R_1 I_{o6}$, a které jakožto známé hodnoty můžeme převést na pravou stranu maticového zápisu rovnic

$$\begin{bmatrix} R_7+R_9 & -R_7 \\ -R_7 & R_1+R_7+R_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{o2} + 0 \cdot I_{o6} \\ -U_{o1} + U_{o2} - U_{o8} - R_1 I_{o6} \end{bmatrix},$$

čímž získáme redukovanou maticovou soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} R_7+R_9 & -R_7 \\ -R_7 & R_1+R_7+R_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{o2} \\ -U_{o1} + U_{o2} - U_{o8} - R_1 I_{o6} \end{bmatrix},$$

kterou vyřešíme např. použitím Cramerova pravidla následujícím postupem: nejprve určíme determinant redukované matice odporu

$$\Delta R = \det \begin{bmatrix} R_7+R_9 & -R_7 \\ -R_7 & R_1+R_7+R_8 \end{bmatrix} = (R_7+R_9)(R_1+R_7+R_8) - (-R_7)(-R_7),$$

potom determinant ΔI_{S2} získaný po náhradě prvního sloupce redukované matice odporu vektorem zdrojů

$$\begin{aligned} \Delta I_{S2} &= \det \begin{bmatrix} -U_{o2} & -R_7 \\ -U_{o1} + U_{o2} - U_{o8} - R_1 I_{o6} & R_1+R_7+R_8 \end{bmatrix} = \\ &= (-U_{o2})(R_1+R_7+R_8) - (-U_{o1} + U_{o2} - U_{o8} - R_1 I_{o6})(-R_7) \end{aligned}$$

a determinant ΔI_{S3} získaný po náhradě druhého sloupce redukované matice odporu vektorem zdrojů

$$\begin{aligned} \Delta I_{S3} &= \det \begin{bmatrix} R_7+R_9 & -U_{o2} \\ -R_7 & -U_{o1} + U_{o2} - U_{o8} - R_1 I_{o6} \end{bmatrix} = \\ &= (R_7+R_9)(-U_{o1} + U_{o2} - U_{o8} - R_1 I_{o6}) - (-R_7)(-U_{o2}). \end{aligned}$$

Hledané smyčkové proudy stanovíme z rovnic

$$I_{S2} = \frac{\Delta I_{S2}}{\Delta R} \quad I_{S3} = \frac{\Delta I_{S3}}{\Delta R}$$

a neznáme napětí U_{x6} určíme z vyloučeného 1. řádku (rovnice) původního maticového zápisu soustavy rovnic

$$U_{x6} = U_{o1} - U_{o2} + R_1 I_{o6} + R_1 I_{S3}.$$

Číselné řešení obvodu obdržíme po dosazení zadaných parametrů a vypočtených hodnot do výše uvedených rovnic:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2+U_{x6} \\ -2 \\ -1+2-6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\Delta R = \det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = 6 \cdot 9 - (-2)(-2) = 50$$

$$\Delta I_{S2} = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -9 & 9 \end{bmatrix} = (-2) \cdot 9 - (-9)(-2) = -36$$

$$\Delta I_{s3} = \det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} = 6 \cdot (-9) - (-2)(-2) = -58$$

$$I_6 = I_{s1} = I_{o6} = 2 = \frac{100}{25} \text{ A}$$

$$I_9 = I_{s2} = \frac{\Delta I_{s2}}{\Delta R} = \frac{-36}{50} = -\frac{18}{25} \text{ A}$$

$$I_8 = I_{s3} = \frac{\Delta I_{s3}}{\Delta R} = \frac{-58}{50} = -\frac{29}{25} \text{ A}$$

$$U_{x6} = 1 - 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot \left(-\frac{29}{25}\right) = \frac{46}{25} \text{ V}$$

$$I_1 = I_{s1} + I_{s3} = 4 + \left(-\frac{29}{25}\right) = \frac{71}{25} \text{ A}$$

$$I_{x2} = I_{s1} - I_{s2} + I_{s3} = 4 - \left(-\frac{18}{25}\right) + \left(-\frac{29}{25}\right) = \frac{89}{25} \text{ A}$$

$$I_7 = I_{s2} - I_{s3} = \left(-\frac{18}{25}\right) - \left(-\frac{29}{25}\right) = \frac{11}{25} \text{ A}$$

Na základě číselného řešení provedeme kontrolu správnosti řešení obvodu, a to tak, že si nakreslíme kostru obvodu zobrazenou na obr. 4, do které zaznameneáme zadané hodnoty parametrů ideálních zdrojů a vypočtené hodnoty větrových proudů pro orientace počítacích šipek zavedené na obr. 2. Dosazením větrových proudů do Ohmova zákona vypočítáme úbytky napětí na rezistorech obvodu a vypočteme neznámá větrová napětí

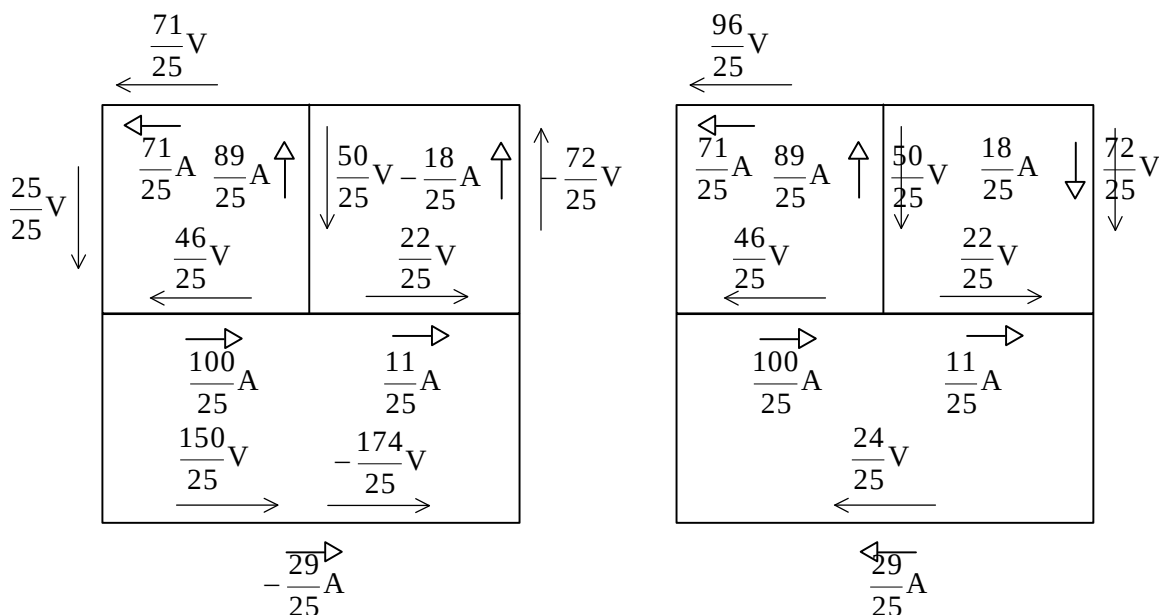
$$U_1 = R_1 I_1 + U_{o1} = 1 \cdot \frac{71}{25} + 1 = \frac{96}{25} \text{ V}$$

$$U_7 = R_7 I_7 = 2 \cdot \frac{11}{25} = \frac{22}{25} \text{ V}$$

$$U_8 = U_{o8} + R_8 I_8 = 6 + 6 \cdot \left(-\frac{29}{25}\right) + 1 = -\frac{24}{25} \text{ V}$$

$$U_9 = R_9 I_9 = 4 \cdot \left(-\frac{18}{25}\right) = -\frac{72}{25} \text{ V}$$

a pro libovolně zvolené 3 smyčky obvodu ověříme, je-li splněn 2. Kirchhoffův zákon, což snadno zjistíme na základě obr. 4. vpravo.



Obr. 4 Číselná kontrola správnosti obvodu řešeného metodou smyčkových proudů

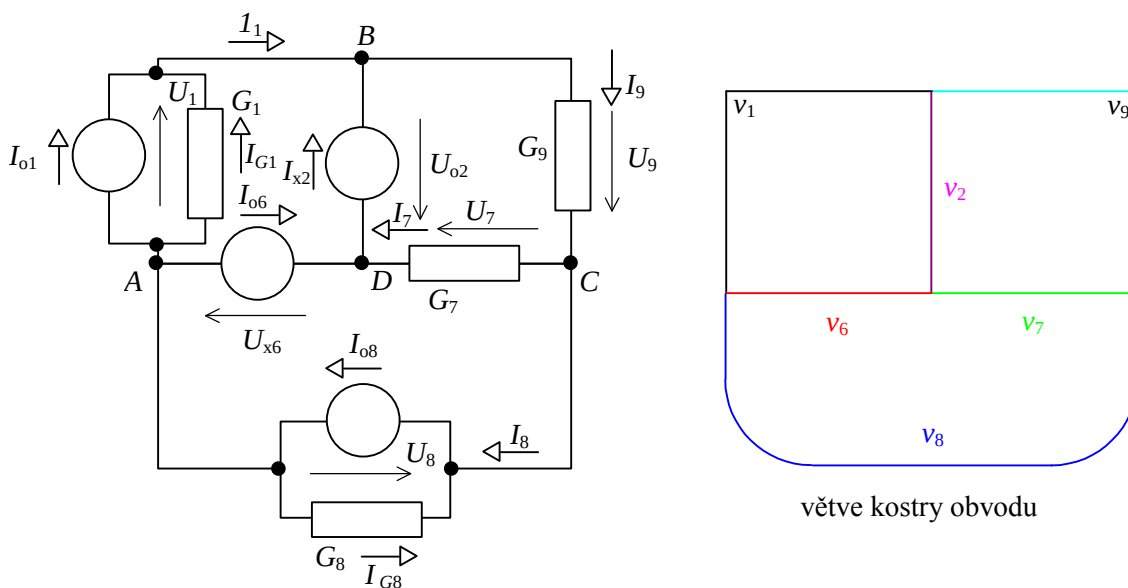
2. Metodou řezových napětí analyzujte a vyřešte stejnosměrný obvod z předchozího příkladu.

Řešení:

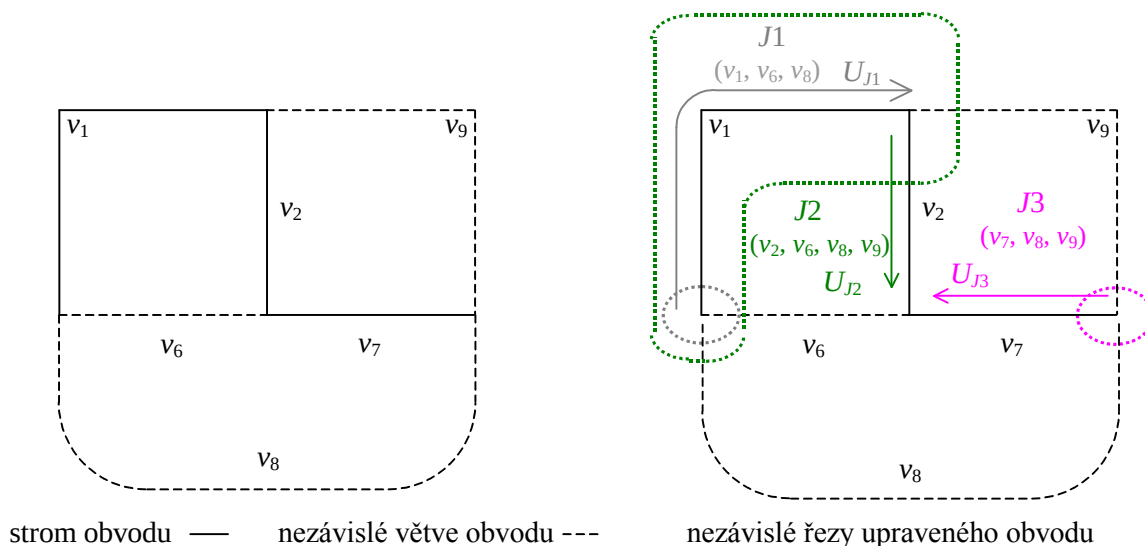
Obvod nejprve upravme tak, že odpory ve větvi vymezené uzly B a C nahradíme odporem o hodnotě $R_9 = R_3 + R_4 // R_5 = 1,6 + 4//6 = 4 \Omega$ a poté vodivostí $G_9 = 1/R_9 = 1/4 \text{ S}$, odpory R_7 a R_8 nahradíme vodivostmi $G_7 = 1/R_7 = 1/2 \text{ S}$ a $G_8 = 1/R_8 = 1/6 \text{ S}$ a reálný zdroj napětí mezi uzly A a B transfigurujeme na reálný zdroj proudu s parametry $I_{o1} = U_{o1}/R_1 = 1/1 = 1 \text{ A}$ a $G_1 = 1/R_1 = 1/1 = 1 \text{ S}$ viz obr. 5 vlevo, přičemž počítací šipku jeho proudu orientujeme proti směru šipky zdroje napětí U_{o1} s ohledem na ekvivalenci reálných zdrojů napětí a proudu vůči uzlům A a B . Tímto způsobem redukuje počet větví původního obvodu na 6, čímž zmenšíme počet rovnic řezů o 2.

Pro takto upravený obvod je na obr. 5 vpravo nakresleno jeho topologické schéma s označenými větvemi obvodu, na jehož základě zvolíme strom a nezávislé větve obvodu, zakreslené na obr. 6 vlevo.

Jelikož počet nezávislých uzlů je vždy o 1 menší, než počet uzlů obvodu, má obvod 3 nezávislé uzly a tedy i stejný počet větví stromu. Počet nezávislých větví upraveného obvodu je roven celkovému počtu větví tohoto obvodu minus počet větví stromu obvodu tj. opět $6 - 3 = 3$. Jelikož ale větev v_2 (uzly B a D) je napěťová, musí být součástí stromu obvodu. V této větvi totiž známe hodnotou napětí, která je rovna vnitřnímu napětí zdroje $U_{o2} = 2 \text{ V}$, ale neznáme jeho proud I_{x2} , jehož hodnota závisí na parametrech ostatních větví obvodu. Počítací šipku tohoto proudu orientujeme proti směru šipky zdroje napětí U_{o2} . Další dvě větve stromu obvodu zvolme opět např. v_1, v_7 . Zbylé větve kostry obvodu tj. v_6, v_8, v_9 , jsou nezávislé větve obvodu.



Obr. 5 Upravené schéma pro analýzu obvodu metodou řezových napětí a jeho graf



Obr.6 Strom, nezávislé větve a řezy upraveného obvodu

Nezávislé řezy označme písmenem J a indexem odpovídajícím pořadí řezu. Podle zavedené indexace na obr. 6 vpravo jsme přiřadili řezům napětí tj. v našem případě řezu $J1$ (v_1, v_6, v_8) řezové napětí U_{J1} , řezu $J2$ (v_2, v_6, v_8, v_9) řezové napětí U_{J2} , řezu $J3$ (v_7, v_8, v_9) řezové napětí U_{J3} . Řezová napětí orientujeme ven z řezů a sestavme rovnice řezů podle zobecněného 1. Kirchhoffova zákona:

$$\text{řez } J1: \quad I_{G_1} + I_{o1} + I_{o6} + I_{G_8} - I_{o8} = 0$$

$$\text{řez } J2: \quad -I_{x2} + I_{o6} + I_{G_8} - I_{o8} + I_9 = 0$$

$$\text{řez } J3: \quad I_7 - I_{G_8} + I_{o8} - I_9 = 0,$$

které upravme tak, že proudy zdrojů převedeme na pravou stranu a za proudy pasivních větví dosadíme z Ohmova zákona

$$\text{řez } J1: \quad G_1 U_1 + G_8 U_8 = -I_{o1} - I_{o6} + I_{o8}$$

$$\text{řez } J2: \quad G_8 U_8 + G_9 U_9 = I_{x2} - I_{o6} + I_{o8}$$

$$\text{řez } J3: \quad G_7 U_7 - G_8 U_8 - G_9 U_9 = -I_{o8}.$$

Vyjádříme-li si napětí nezávislých větví obvodu a napětí U_{x6} superpozicí příslušných řezových napětí, získáme rovnice

$$U_8 = U_{J1} + U_{J2} - U_{J3}$$

$$U_9 = U_{J2} - U_{J3}$$

$$U_{x6} = -(U_{J1} + U_{J2}).$$

Po dosazení prvních dvou předchozích napětí a rovností $U_1 = U_{J1}$ a $U_7 = U_{J3}$ do rovnic řezů obdržíme soustavu:

$$\begin{aligned} \text{řez } J1: \quad & G_1 U_{J1} + G_8 (U_{J1} + U_{J2} - U_{J3}) = \\ & = (G_1 + G_8) U_{J1} + G_8 U_{J2} - G_8 U_{J3} = -I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} \\ & G_8 (U_{J1} + U_{J2} - U_{J3}) + G_9 (U_{J2} - U_{J3}) = \\ \text{řez } J2: \quad & = G_8 U_{J1} + (G_8 + G_9) U_{J2} - (G_8 + G_9) U_{J3} = I_{x2} - I_{o6} + I_{o8} \\ & G_7 U_{J3} - G_8 (U_{J1} + U_{J2} - U_{J3}) - G_9 (U_{J2} - U_{J3}) = \\ \text{řez } J3: \quad & = -G_8 U_{J1} - (G_8 + G_9) U_{J2} + (G_7 + G_8 + G_9) U_{J3} = -I_{o8}, \end{aligned}$$

kteřou můžeme zapsat v maticovém tvaru s ohledem na rovnost $U_{J2} = U_{o2}$ následujícím způsobem

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_8 & G_8 & -G_8 \\ G_8 & G_8 + G_9 & -G_8 - G_9 \\ -G_8 & -G_8 - G_9 & G_7 + G_8 + G_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{J1} \\ U_{o2} \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} \\ I_{x2} - I_{o6} + I_{o8} \\ -I_{o8} \end{bmatrix}$$

nebo ve zjednodušeném tvaru

$$[G] \cdot [U_r] = [I_v],$$

kde $[G]$ je čtvercová matice vodivosti, $[U_r]$ vektor řezových napětí a $[I_v]$ vektor zdrojů proudu obvodu. Rozměry matice a obou vektorů jsou určeny počtem nezávislých řezů.

Zobecníme-li maticový zápis analyzovaného obvodu, pak matici vodivosti (admittance) můžeme sestavit přímo z upraveného schéma zapojení obvodu, jelikož prvky její diagonály jsou dány součtem vodivostí (admitancí) větví daného řezu a jsou vždy kladné. Prvky mimo hlavní diagonálu matice jsou kolem ní souměrné a získáme je průnikem odpovídajících dvojic prvků hlavní diagonály. Jejich znaménka jsou dána vzájemnou orientací řezových napětí podél stromu obvodu. Souhlasné orientaci odpovídá znaménko $+$, nesouhlasné znaménko $-$. Prvky vektoru zdrojů stanovíme součtem proudových zdrojů dané smyčky. Znaménka těchto zdrojů určujeme podle orientace jejich počítacích šipek vůči zvolené referenční orientaci proudu řezu. Za kladnou referenční orientaci považujeme zpravidla proud „vytékající“ z řezu. Souhlasné orientaci však nyní odpovídá **záporné** znaménko, nesouhlasné **kladné** (znaménka přiřazujeme opačně, jelikož jsme vnitřní napětí zdrojů převedli na pravou stranu smyčkových rovnic).

Jelikož napětí řezu $J2$ je známé, můžeme snížit řád matice o 1 tím, že z původního maticového zápisu soustavy rovnic vyloučíme 2. řádek a 2. sloupec. Musíme však zachovat vazbu (lineární závislost) 1. a 3. rovnice s 2. rovnicí, kterou zohledňuje v 1. řádku člen $G_8 U_{o2}$ a ve 3. řádku člen $-(G_8 + G_9) U_{o2}$, a které jakožto známé hodnoty můžeme převést na pravou stranu maticového zápisu rovnic

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_8 & -G_8 \\ -G_8 & G_7 + G_8 + G_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{J1} \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} - G_8 U_{o2} \\ -I_{o8} + (G_8 + G_9) U_{o2} \end{bmatrix},$$

čímž získáme redukovanou maticovou soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_8 & -G_8 \\ -G_8 & G_7 + G_8 + G_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{J1} \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} - G_8 U_{o2} \\ -I_{o8} + (G_8 + G_9) U_{o2} \end{bmatrix},$$

kterou vyřešíme opět použitím Cramerova pravidla následujícím postupem:

nejprve určíme determinant redukované matice vodivosti

$$\Delta G = \det \begin{bmatrix} G_1 + G_8 & -G_8 \\ -G_8 & G_7 + G_8 + G_9 \end{bmatrix} = (G_1 + G_8)(G_7 + G_8 + G_9) - (-G_8)(-G_8),$$

potom determinant ΔU_{J1} získaný po náhradě prvního sloupce redukované matice vodivosti vektorem zdrojů

$$\begin{aligned} \Delta U_{J1} &= \det \begin{bmatrix} -I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} - G_8 U_{o2} & -G_8 \\ -I_{o8} + (G_8 + G_9) U_{o2} & G_7 + G_8 + G_9 \end{bmatrix} = \\ &= (-I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} - G_8 U_{o2})(G_7 + G_8 + G_9) - (-I_{o8} + (G_8 + G_9) U_{o2})(-G_8) \end{aligned}$$

a determinant ΔU_{J3} získaný po náhradě druhého sloupce redukované matice vodivosti vektorem zdrojů

$$\begin{aligned} \Delta U_{J3} &= \det \begin{bmatrix} G_1 + G_8 & -I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} - G_8 U_{o2} \\ -G_8 & -I_{o8} + (G_8 + G_9) U_{o2} \end{bmatrix} = \\ &= (G_1 + G_8)(-I_{o8} + (G_8 + G_9) U_{o2}) - (-G_8)(-I_{o1} - I_{o6} + I_{o8} - G_8 U_{o2}). \end{aligned}$$

Hledaná řezová napětí stanovíme z rovnic

$$U_{J1} = \frac{\Delta U_{J1}}{\Delta G} \quad \text{a} \quad U_{J3} = \frac{\Delta U_{J3}}{\Delta G}$$

a neznámý proud I_{x2} určíme z vyloučeného 2. řádku (rovnice) původního maticového zápisu soustavy rovnic

$$I_{x2} = I_{o6} - I_{o8} + G_8 U_{J1} + (G_8 + G_9) U_{o2} - (G_8 + G_9) U_{J3}.$$

Číselné řešení obvodu obdržíme po dosazení zadaných parametrů a vypočtených hodnot do výše uvedených rovnic:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{12} & \frac{11}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{J1} \\ 2 \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ I_{x2} - 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{11}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{J1} \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\Delta G = \det \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{11}{12} \end{bmatrix} = \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} - (-\frac{1}{6})(-\frac{1}{6}) = \frac{75}{72}$$

$$\Delta U_{J1} = \det \begin{bmatrix} -\frac{13}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{11}{12} \end{bmatrix} = \left(-\frac{13}{3}\right) \cdot \frac{11}{12} - \left(-\frac{1}{6}\right) \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{144}{36}$$

$$\Delta U_{J3} = \det \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{13}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{7}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right) \left(-\frac{13}{3}\right) = -\frac{33}{36}$$

$$U_1 = U_{J1} = \frac{\Delta U_{J1}}{\Delta G} = \frac{-\frac{144}{36}}{\frac{75}{72}} = -\frac{96}{25} \text{ V}$$

$$U_2 = U_{J2} = 2 = \frac{50}{25} \text{ V}$$

$$U_7 = U_{J3} = \frac{\Delta U_{J3}}{\Delta G} = \frac{-\frac{33}{36}}{\frac{75}{72}} = -\frac{22}{25} \text{ V}$$

$$I_{x2} = -1 + 4 + \frac{1}{6} \left(-\frac{96}{25}\right) + \frac{5}{12} \cdot 2 - \frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{22}{25}\right) = \frac{89}{25} \text{ A}$$

$$U_8 = U_{J1} + U_{J2} - U_{J3} = -\frac{96}{25} + 2 - \left(-\frac{22}{25}\right) = -\frac{24}{25} \text{ V}$$

$$U_9 = U_{J2} - U_{J3} = 2 - \left(-\frac{22}{25}\right) = \frac{72}{25} \text{ V}$$

$$U_{x6} = -(U_{J1} + U_{J2}) = -\left(-\frac{96}{25} + 2\right) = \frac{46}{25} \text{ V}$$

Na základě číselného řešení provedeme kontrolu správnosti řešení obvodu, a to tak, že si nakreslíme kostru obvodu zobrazenou na obr. 6, do které zakreslíme zadané hodnoty parametrů ideálních zdrojů a vypočtené hodnoty větвовých proudů pro orientace počítacích šipek zavedené na obr. 5. Dosazením větвовých napětí do Ohmova zákona vypočítáme větвовé proudy

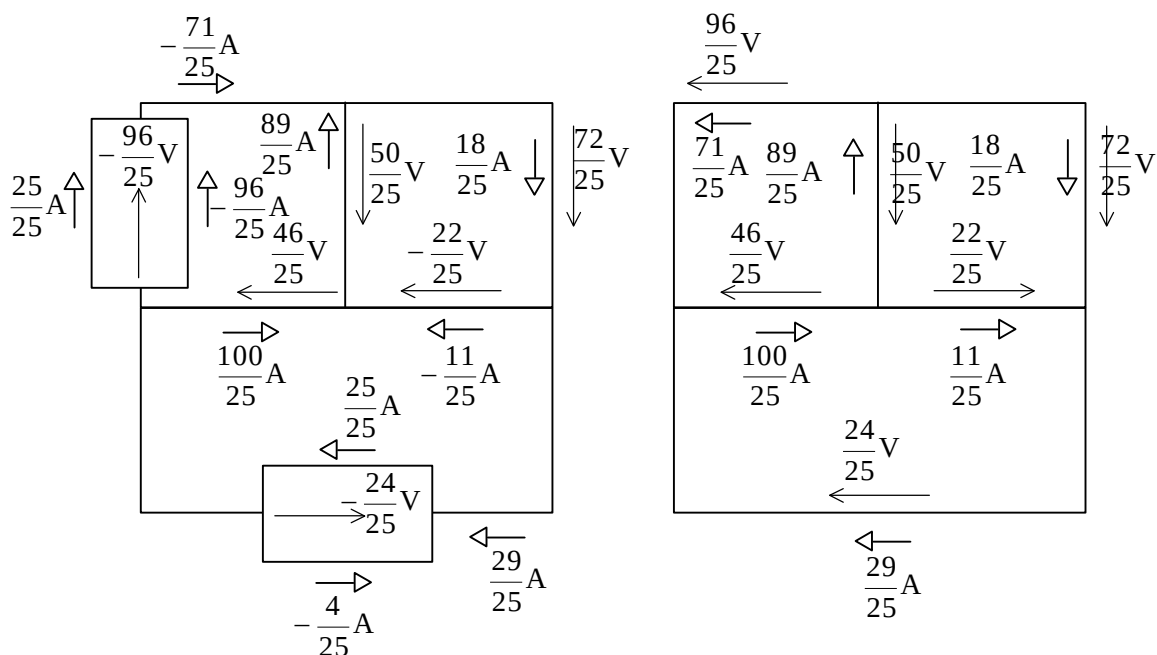
$$I_1 = G_1 U_1 + I_{o1} = 1 \cdot \left(-\frac{96}{25}\right) + 1 = -\frac{71}{25} \text{ A}$$

$$I_7 = G_7 U_7 = \frac{1}{2} \left(-\frac{22}{25}\right) = -\frac{11}{25} \text{ A}$$

$$I_8 = -G_8 U_8 + I_{o8} = \left(-\frac{1}{6}\right) \left(-\frac{24}{25}\right) + 1 = \frac{29}{25} \text{ A}$$

$$I_9 = G_9 U_9 = \frac{1}{4} \frac{72}{25} = \frac{18}{25} \text{ A}$$

a pro libovolně zvolené 3 uzly obvodu ověříme, je-li splněn 1. Kirchhoffův zákon, což snadno zjistíme na základě obr. 6. vpravo.



Obr. 6 Číselná kontrola správnosti obvodu řešeného metodou řezových napětí

3. Pro obvod na obr. 2 ověřte platnost Tellegenovy věty.

Řešení:

Pro ověření platnosti Tellegenovy věty musíme nejprve stanovit výkony v jednotlivých větvích obvodu na obr. 2, přičemž v tomto případě považujeme vnitřní odpory reálných zdrojů napětí za samostatné pasivní větve. Nejprve vypočítáme výkony ideálních zdrojů, jejichž znaménka přiřazujeme na základě vzájemné orientace počítacích šipek napětí a proudu na obr. 2 (soulasná orientace znaménko +, nesoulasná znaménko -)

$$P_{o1} = U_{o1} I_1 = 1 \cdot \frac{71}{25} = \frac{71}{25} \text{ W}$$

$$P_{o2} = -U_{o2} I_{x2} = 2 \cdot \frac{89}{25} = -\frac{178}{25} \text{ W}$$

$$P_{o6} = -U_{x6} I_{o6} = \frac{46}{25} \cdot 4 = -\frac{184}{25} \text{ W}$$

$$P_{o8} = U_{o8} I_8 = 6 \cdot \left(-\frac{29}{25}\right) = -\frac{174}{25} \text{ W}$$

a poté výkony pasivních větví

$$P_{R1} = U_{R1} I_1 = R_1 I_1^2 = 1 \cdot \left(\frac{71}{25}\right)^2 = \frac{5041}{625} \text{ W}$$

$$P_7 = U_7 I_7 = R_7 I_7^2 = 2 \cdot \left(\frac{11}{25}\right)^2 = \frac{242}{625} \text{ W}$$

$$P_{R8} = U_{R8} I_8 = R_8 I_8^2 = 6 \cdot \left(-\frac{29}{25}\right)^2 = \frac{5046}{625} \text{ W}$$

$$P_9 = U_9 I_9 = R_9 I_9^2 = 4 \cdot \left(-\frac{18}{25}\right)^2 = \frac{1296}{625} \text{ W}$$

Součet výkonů zdrojů má hodnotu $P_o = -\frac{465}{25} = -\frac{11625}{625} \text{ W}$ a součet výkonů pasivních větví hodnotu

$P_R = \frac{11625}{625} \text{ W}$. Jelikož součet obou těchto výkonů je nulový, Tellegenova věta v zadaném obvodu je splněna.

4. Pro obvod na obr. 5 ověřte platnost Tellegenovy věty.

Řešení:

Pro ověření platnosti Tellegenovy věty musíme opět stanovit výkony v jednotlivých větvích obvodu, přičemž v tomto případě považujeme vnitřní vodivosti reálných zdrojů proudu za samostatné pasivní větve. Nejprve vypočteme výkony ideálních zdrojů, jejichž znaménka přiřazujeme opět na základě vzájemné orientace počítacích šipek napětí a proudu na obr. 5 (souhlasná orientace znaménko +, nesouhlasná znaménko -)

$$P_{o1} = U_1 I_{o1} = \left(-\frac{96}{25}\right) \cdot 1 = -\frac{96}{25} \text{ W}$$

$$P_{o2} = -U_{o2} I_{x2} = 2 \cdot \frac{89}{25} = -\frac{178}{25} \text{ W}$$

$$P_{o6} = -U_{x6} I_{o6} = \frac{46}{25} \cdot 4 = -\frac{184}{25} \text{ W}$$

$$P_{o8} = -U_8 I_{o8} = -\left(-\frac{24}{25}\right) \cdot 1 = \frac{24}{25} \text{ W}$$

a poté výkony pasivních větví

$$P_{G1} = U_1 I_{G1} = G_1 U_1^2 = 1 \cdot \left(-\frac{96}{25}\right)^2 = \frac{9216}{625} \text{ W}$$

$$P_7 = U_7 I_7 = G_7 U_7^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{22}{25}\right)^2 = \frac{242}{625} \text{ W}$$

$$P_{G8} = U_8 I_{G8} = G_8 U_8^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{96}{625} \text{ W}$$

$$P_9 = U_9 I_9 = G_9 U_9^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{72}{25}\right)^2 = \frac{1296}{625} \text{ W}.$$

Součet výkonů zdrojů má hodnotu $P_o = -\frac{434}{25} = -\frac{10850}{625} \text{ W}$ a součet výkonů pasivních větví hodnotu

$P_G = \frac{10850}{625} \text{ W}$. Jelikož součet obou těchto výkonů je nulový, Tellegenova věta v zadaném obvodu je splněna.

5. Rozhodněte, zda jednotlivé zdroje v obvodech na obr. 2 a obr. 5 dodávají nebo odebírají energii.

Řešení:

O chování zdrojů rozhodují znaménka vypočtených hodnot výkonů. Je-li hodnota výkonu kladná, zdroj odebírá energii z obvodu, je-li hodnota výkonu záporná, energii do obvodu dodává. Na základě

hodnot výkonů zdrojů vypočtených v příkladech 3 a 4 můžeme konstatovat, že v obvodu na obr. 2 energii dodávají zdroje U_{02} , I_{06} a U_{02} a zdroj U_{01} energii odebírání, a že v obvodu na obr. 5 energii dodávají zdroje I_{01} , I_{06} a U_{02} a zdroj I_{08} energii odebírání.



Otázky

1. Kdy je výhodné použít pro řešení elektrického obvodu metodu smyčkových proudů a kdy metodu řezových napětí?
2. Proč provádíme vzájemnou transfiguraci reálných zdrojů napětí a proudu u metody smyčkových proudů a řezových napětí? Z čeho vycházíme při této transfiguraci?
3. Co je smyčkový proud?
4. Proč u metody smyčkových proudů volíme proudovou větev jako nezávislou?
5. Kolik řezů (Jordanových křivek) může protínat větev stromu obvodu?
6. Proč u metody řezových napětí volíme napětíovou větev součástí stromu obvodu?
7. Charakterizujte metodu uzlových napětí.

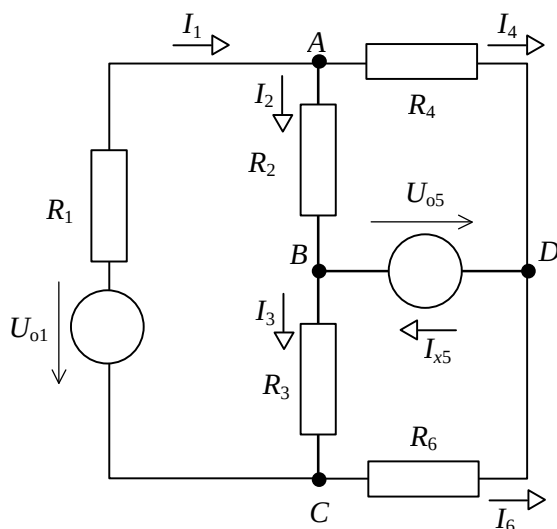


Odpovědi na otázky naleznete v 5. dávce.



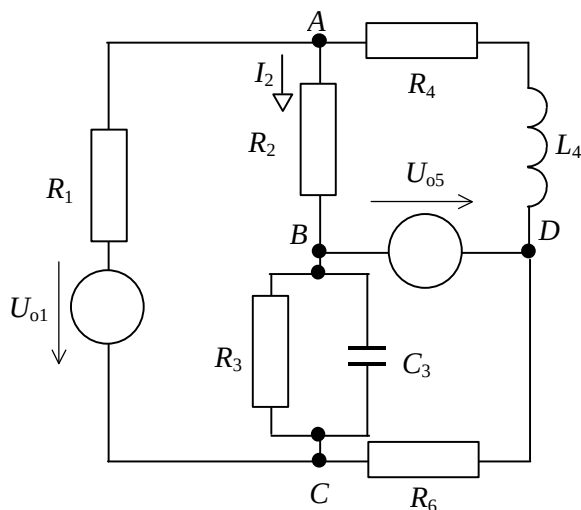
Úlohy k řešení

1. V obvodu na obr.7 stanovte proudy jednotlivých větví metodou smyčkových proudů. Zadané hodnoty parametrů jsou: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = R_6 = 3 \Omega$, $U_{01} = 20 \text{ V}$, $U_{05} = 50 \text{ V}$.



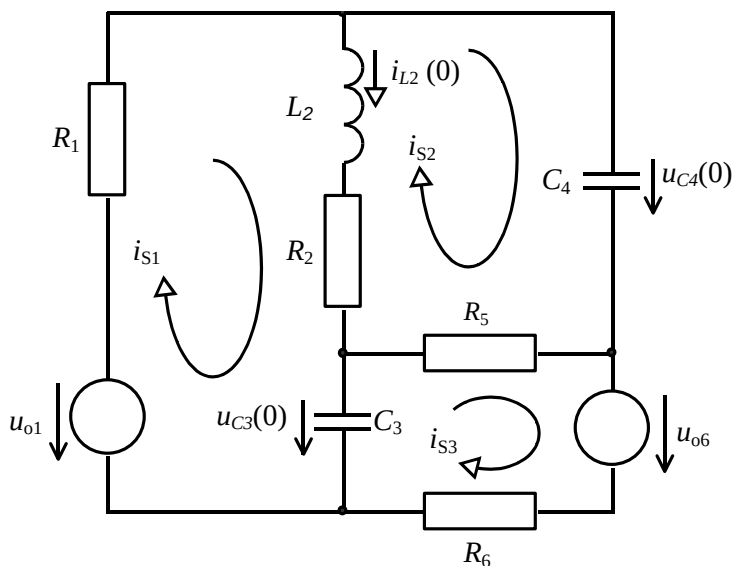
Obr. 7 Schéma zapojení obvodu 1. úlohy

2. Proveďte kontrolu správnosti řešení větvových proudů obvodu na obr. 7 metodou uzlových napětí.
3. Sestavte maticovou soustavu rovnic řezů pro obvod na obr. 8. Předpokládejte harmonické časové průběhy elektrických veličin s úhlovým kmitočtem ω .



Obr. 8 Schéma zapojení obvodu 3. úlohy

4. Pro naznačené orientace smyčkových proudů na obr. 9 nakreslete topologické schéma obvodu a napište obvodové rovnice. Předpokládejte obecné časové průběhy elektrických veličin.

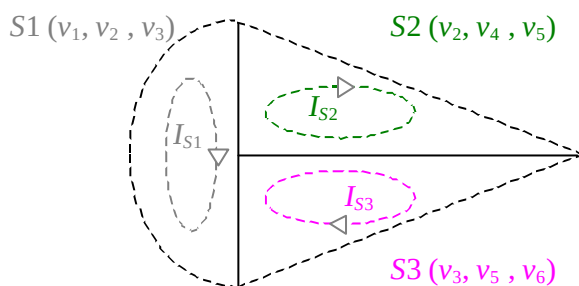


Obr. 9 Schéma zapojení obvodu 4. Úlohy



Klíč k řešení

1. Postup je obdobný jako u příkladu 1.



Obr. 10 Topologické schéma obvodu z obr. 7

Maticový zápis obvodových rovnic:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 & -0 \\ -R_3 & -0 & R_1 + R_7 + R_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{o1} \\ U_{o5} \\ -U_{o5} \end{bmatrix}.$$

Číselné dosazení:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -0 \\ -2 & -0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ -50 \end{bmatrix}.$$

Vypočtené hodnoty:

$$I_{S1} = 100/17 \text{ A}$$

$$I_{S2} = 210/17 \text{ A}$$

$$I_{S3} = -130/17 \text{ A}$$

$$I_1 = I_{S1} = 100/17 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{S1} - I_{S2} = 100/17 - 210/17 = -110/17 \text{ A}$$

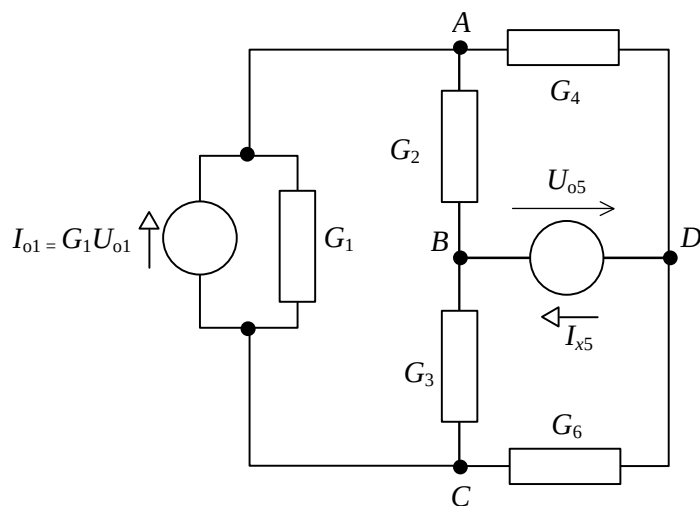
$$I_3 = I_{S1} - I_{S3} = 100/17 - (-130/17) = 230/17 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{S2} = 210/17 \text{ A};$$

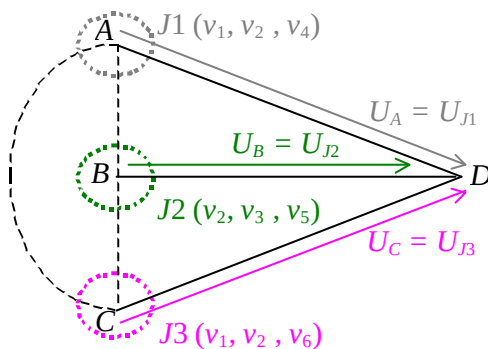
$$I_{x5} = I_{S2} - I_{S3} = 210/17 - (-130/17) = 340/17 \text{ A};$$

$$I_6 = -I_{S3} = -(-130/17) = 130/17 \text{ A}$$

2. Postup je obdobný jako u příkladu 2.



Obr. 11 Upravené schéma zapojení obvodu z obr. 7



Obr. 12 Topologické schéma obvodu z obr. 11

Maticový zápis obvodových rovnic:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 & -G_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_3 + G_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_{o5} \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{x5} \\ -I_{o1} \end{bmatrix}.$$

Číselné dosazení:

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_{o5} \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Vypočtené hodnoty:

$$U_A = 630/17 \text{ V}$$

$$U_C = 390/17 \text{ V}$$

$$I_{x5} = 20 \text{ A}$$

$$I_1 = I_{o1} - G_1(U_A - U_C) = 20 - 1 \cdot (630/17 - 390/17) = 100/17 \text{ A}$$

$$I_2 = G_2(U_A - U_B) = 1/2 \cdot (630/17 - 50) = -110/17 \text{ A}$$

$$I_3 = G_3(U_B - U_C) = 1/2 \cdot (50 - 390/17) = 230/17 \text{ A}$$

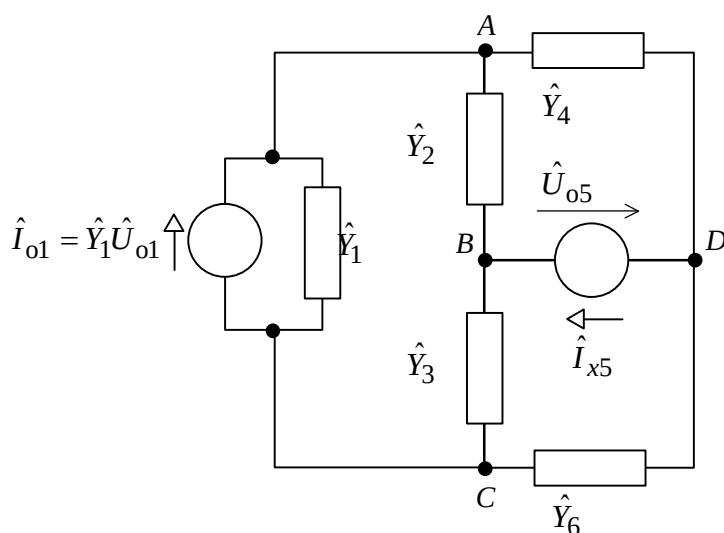
$$I_4 = G_4 U_A = 1/3 \cdot 630/17 = 210/17 \text{ A}$$

$$I_6 = G_6 U_C = 1/3 \cdot 390/17 = 130/17 \text{ A}$$

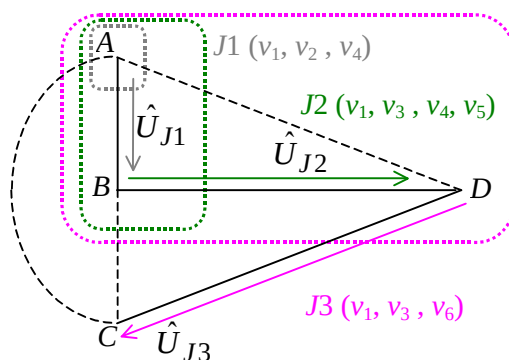
3. Postup je obdobný jako u příkladu 2 s tím, že namísto vodivostí větví používáme k popisu obvodu admitance

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{R_1}, \hat{Y}_2 = \frac{1}{R_2}, \hat{Y}_3 = \frac{1}{R_3} + j\omega C_3, \hat{Y}_4 = \frac{1}{R_4 + j\omega L_4}, \hat{Y}_6 = \frac{1}{R_6}$$

a elektrické veličiny charakterizujeme fázory.



Obr. 13 Upravené schéma zapojení obvodu z obr. 8

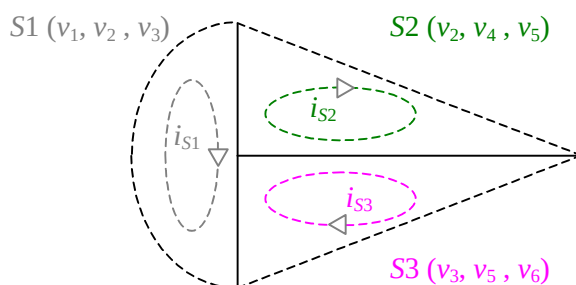


Obr. 14 Topologické schéma obvodu z obr. 13

Maticový zápis obvodových rovnic:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_4 & \hat{Y}_1 & \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_1 & \hat{Y}_1 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_4 & \hat{Y}_1 + \hat{Y}_3 \\ \hat{Y}_1 & \hat{Y}_1 + \hat{Y}_3 & \hat{Y}_1 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_{J1} \\ \hat{U}_{o5} \\ \hat{U}_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{o1} \\ \hat{I}_{o1} + \hat{I}_{x5} \\ \hat{I}_{o1} \end{bmatrix}.$$

4. Postup je popsán v kapitole 5.1.



Obr. 15 Topologické schéma obvodu z obr. 9

Smyčkové rovnice obvodu mají tvar:

$$S1: -u_{o1} + R_1 \cdot i_{s1} + L_2 \frac{d(i_{s1} - i_{s2})}{dt} + R_2 \cdot (i_{s1} - i_{s2}) + \frac{1}{C_3} \cdot \int_0^t (i_{s1} - i_{s3}) d\tau + u_{c3}(0) = 0$$

$$S2: \frac{1}{C_4} \cdot \int_0^t i_{s2} d\tau + u_{c4}(0) + R_5 \cdot (i_{s2} - i_{s3}) + R_2 \cdot (i_{s2} - i_{s1}) + L_2 \frac{d(i_{s2} - i_{s1})}{dt} = 0$$

$$S3: u_{o2} + R_6 \cdot i_{s3} + \frac{1}{C_3} \cdot \int_0^t (i_{s3} - i_{s1}) d\tau - u_{c3}(0) + R_5 \cdot (i_{s3} - i_{s2}) = 0.$$



Autokontrola

Pokud jste reagovali správně na více jak polovinu podnětů z každé oblasti, pokračujte ve studiu jiné kapitoly, pokud ne, pak text studijní opory znovu prostudujte a opakovaně vypracujte odpovědi na podněty.



Zadání 5. samostatné práce

V dané kostře obvodu tvořeného šesti větvemi a čtyřmi uzly charakterizujte jednotlivé větve tak, aby jedna z nich byla tvořena:

- ideálním zdrojem napětí,
- ideálním zdrojem proudu,
- skutečným zdrojem napětí,
- skutečným zdrojem proudu

a dvě větve rezistory. Číselné hodnoty parametrů si zvolte.

Specifikace úkolů:

- a) vytvořte soubor větví stromu, nezávislých větví, nezávislých řezů a nezávislých smyček
- b) orientujte každý nezávislý řez počítací šipkou, sestavte soustavu obvodových rovnic a vyřešte
- c) orientujte každou nezávislou smyčku počítací šipkou, sestavte soustavu obvodových rovnic a vyřešte je
- d) ověřte, zda vypočtené hodnoty vyhovují Kirchhoffovým zákonům, určete hodnoty výkonu každého zdroje a rozhodněte, zda dodává nebo odebírá energii a ověřte, zda vypočtené hodnoty výkonů vyhovují Tellegenově větě

Zpracoval: Petr Orság

6. IMITANČNÍ FUNKCE, REZONANCE, KOMPENZACE JALOVÝCH SLOŽEK



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- definovat a používat různé typy přenosu.
- rozpoznat obvody, ve kterých může nastat rezonance.
- rozpoznat a řešit sériový a paralelní rezonanční obvod.
- pochopit význam rezonančních obvodů při upravování spektra signálu.
- pochopit význam kompenzace jalových složek imitance.



Výklad

6.1. Imitační funkce

6.1.1 Úvod (základní úvahy a terminologie)

Každý pasivní dvojpól (prvek obvodu se dvěma vývody) lze (harmonické buzení) v komplexní rovině modelovat vhodným zapojením ideálních dvojpólů, jejichž popis je shrnut v tabulce 1. Pro komplexní hodnotu napětí $\hat{U}$ a komplexní hodnotu proudu $\hat{I}$ platí **zobecněný Ohmův zákon**

$$\hat{U} = \hat{Z} \cdot \hat{I} \quad (1)$$

Podílem komplexní hodnoty napětí a komplexní hodnoty proudu definujeme komplexní hodnotu **impedance** dvojpólu

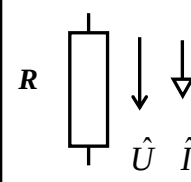
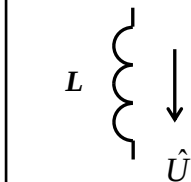
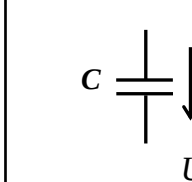
$$\hat{Z} = \hat{U} / \hat{I} \quad [\text{rozměr } \Omega]. \quad (2)$$

Podílem komplexní hodnoty proudu a komplexní hodnoty napětí definujeme komplexní hodnotu **admitance** dvojpólu

$$\hat{Y} = \hat{I} / \hat{U} = 1 / \hat{Z} \quad [\text{rozměr } S]. \quad (3)$$

Souborným pojmenováním pro impedanci a admitanci je pojem **imitance**. K samotnému pojmu imitance nelze, pochopitelně, přiřadit žádný rozměr. Imitance jsou obecně vyjádřeny komplexními čísly, nejsou to však fázory. Nereprezentují totiž harmonické veličiny, ale jejich poměry - viz shora uvedené vztahy. Pojem imitance platí pouze v komplexní rovině pro harmonické buzení obvodu, neplatí obecně v časové oblasti.

Tabulka 1: Imitance základních prvků (dvojpólů) elektrických obvodů; * - v obecném modelu potom platí $X_C = -1/(\omega C)$; ** - v obecném modelu potom platí $B_L = -1/(\omega L)$ - tyto modely jsou vhodnější při obecných úvahách.

P R V E K			
IMPEDANCE	R	$j\omega L = jX_L$	$1/(j\omega C) = +jX_C$ *
ADMITANCE	$1/R = G$	$1/(j\omega L) = +jB_L$ **	$j\omega C = jB_C$

6.1.2 Možné tvary zápisu imitance

Složkový tvar zápisu je definován vztahy

$$\hat{Z} = R + jX \quad (4)$$

$$\hat{Y} = G + jB \quad (5)$$

kde

$R = \text{Re}[\hat{Z}]$ je **rezistance** (prvku)

$X = \text{Im}[\hat{Z}]$ je **reaktance**

$G = \text{Re}[\hat{Y}]$ je **konduktance**

$B = \text{Im}[\hat{Y}]$ je **susceptance**

Exponenciální tvar zápisu je definován vztahy

$$\hat{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} \quad (6)$$

$$\hat{Y} = Y \cdot e^{j\Theta} \quad (7)$$

kde

$Z = |\hat{Z}|$ je modul impedance

φ je úhel impedance

$Y = |\hat{Y}|$ je modul admitance

Θ je úhel admitance.

Pomocí Eulerova vztahu $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ zjistíme z identity vztahů (4) a (6), že

$$R = Z \cos \varphi; \quad X = Z \sin \varphi; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg(X / R) \quad (8)$$

Z identity vztahů (5) a (7) určíme, že

$$G = Y \cos \Theta; \quad B = Y \sin \Theta; \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad \Theta = \arctg(B / G) \quad (9)$$

Vyjádříme vztah (3) pomocí vztahů (6) a (7):

$$\hat{Y} = Y \cdot e^{j\Theta} = 1/(Z \cdot e^{j\varphi}) = (1/Z) \cdot e^{-j\varphi}$$

Snadno určíme, že pro exponenciální tvar zápisu musí platit

$$Y = 1/Z \quad \text{a} \quad \Theta = -\varphi \quad (10a)$$

a tedy rovněž

$$Z = 1/Y \quad \text{a} \quad \varphi = -\Theta \quad (10b)$$

Vyjádříme vztahy (3) pomocí vztahů (4) a (5):

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

nebo

$$R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

Pro přepočítání admitancí a impedancí (složkový tvar) tak určíme, že

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} ; \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (11a)$$

a

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} ; \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (11b)$$

6.1.3 Fáze (úhel) impedance

Fáze impedance a admitance jsou právě opačné, součin modulů je vždy roven jedné, tedy

$$Z \cdot Y = 1$$

Tato tvrzení platí pochopitelně pro stejný popisovaný prvek.

Definice úhlu (fáze) impedance φ plyne ze vztahu (2). Je to zřejmě rozdíl úhlu fázoru napětí a fázoru proudu - **od úhlu fázoru napětí odečítáme úhel fázoru proudu**. Protože pro pasivní dvoj póly vždy platí, že $R > 0$ ($G > 0$), nabývá úhel impedance φ pouze hodnoty v intervalu $-\pi/2$ (ideální kapacitor) až $+\pi/2$ (ideální induktor). Pro úhel admitance platí $\Theta = -\varphi$, jedná se o rozdíl úhlu fázoru proudu a fázoru napětí.

6.1.4 Kirchhoffovy zákony a jejich aplikace

Lineárním operacím v časové oblasti můžeme přiřazovat přímo odpovídající operace s fázory v komplexní rovině. Proto Kirchhoffovy zákony platí i pro fázory:

$$\sum_{k=1}^n \hat{I}_k = 0 \quad (12)$$

kde $\hat{I}_k$ jsou proudy příslušné zkoumanému uzlu obvodu (i zobecněnému)

$$\sum_{k=1}^n \hat{U}_k = 0 \quad (13)$$

kde $\hat{U}_k$ jsou napětí příslušná zkoumané uzavřené smyčce obvodu .

Po zavedení imitancí a zobecněného Ohmova zákona tak můžeme při analýze ustáleného harmonického vztahu použít formálně pravidla stanovená pro stejnosměrné obvody. Platí jednoduché substituce:

$$U \rightarrow \hat{U}; \quad I \rightarrow \hat{I}; \quad R \rightarrow \hat{Z}; \quad G \rightarrow \hat{Y}.$$

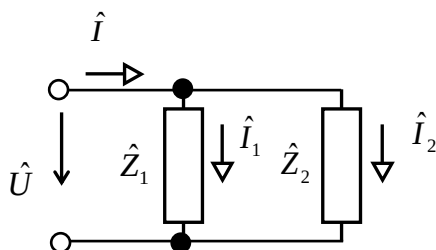
Výpočty probíhají v oboru komplexních čísel, "pracuje" se s reálnými a imaginárními složkami, podle platných pravidel (nikdy se nesečítají nebo neodečítají moduly). Tvrzení ilustrujeme pomocí dvou příkladů - paralelního a sériového řazení impedancí $\hat{Z}_1$ a $\hat{Z}_2$.



Řešený příklad

Příklad 1.: Je dáno paralelní řazení impedancí $\hat{Z}_1 = 10 + j10$ a $\hat{Z}_2 = 10 - j5$. Určete: a) admitance $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2$; b) celkovou admitanci zapojení $\hat{Y}$, c) celkovou impedanci zapojení $\hat{Z}$.

Řešení: Situace je znázorněna na obr.1 - při paralelním řazení musí být na impedancích stejné napětí $\hat{U}$. Platí (Ohmův zákon), že



$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{U} / \hat{Z}_1 = \hat{U} / (10 + j10) = \hat{U}(10 - j10) / 200 \\ &= \hat{U}(0,05 - j0,05) = \hat{U}\hat{Y}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 &= \hat{U} / \hat{Z}_2 = \hat{U} / (10 - j5) = \hat{U}(10 + j5) / 125 \\ &= \hat{U}(0,08 + j0,04) = \hat{U}\hat{Y}_2 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že platí $\hat{Y}_1 = 0,05 - j0,05$ a $\hat{Y}_2 = 0,08 + j0,04$ (tím je vyřešen bod a).

Obr.1: Paralelní řazení impedancí

Svorkový proud $\hat{I}$ (1. Kirchhoffův zákon) je určen vztahem

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{U}\hat{Y}_1 + \hat{U}\hat{Y}_2 = \hat{U}(\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2) = \hat{U}\hat{Y}$$

kde

$$\hat{Y} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 \quad (14)$$

je ekvivalentní (celková) admitance paralelního řazení impedancí (admitancí) - při **paralelním** řazení se tedy **sečítají admitance** prvků. Pro dané číselné hodnoty tedy platí

$$\hat{Y} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 = 0,05 - j0,05 + 0,08 + j0,04 = 0,13 - j0,01 \text{ [S]} \text{ (tím je vyřešen bod b).}$$

Celková impedance je dána vztahem

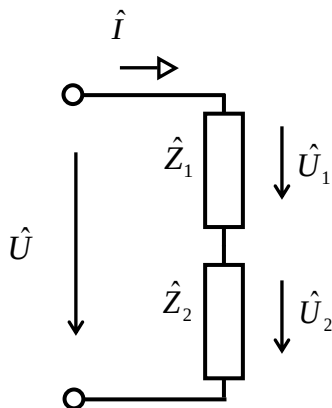
$$\begin{aligned} \hat{Z} &= 1 / \hat{Y} = 1 / (\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2) = 1 / (1 / \hat{Z}_1 + 1 / \hat{Z}_2) = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 / (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) \\ &= 1 / (0,13 - j0,01) = 7,647 + j0,588 = 7,670 \cdot e^{j4,4^\circ} \end{aligned}$$

(tím je vyřešen bod c).



Řešený příklad

Příklad 2.: Je dáno sériové řazení impedancí $\hat{Z}_1 = 10 + j10$ a $\hat{Z}_2 = 10 - j5$. Určete: a) celkovou impedanci řazení $\hat{Z}$; b) celkovou admitanci řazení $\hat{Y}$.



Obr.2: Sériové řazení impedancí

Řešení: Situace je znázorněna na obr.2. Platí (Ohmův zákon), že

$$\hat{U}_1 = \hat{I}\hat{Z}_1 \text{ a } \hat{U}_2 = \hat{I}\hat{Z}_2.$$

Celkové napětí (svorkové) (2. Kirchhoffův zákon) je

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = \hat{I}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) = \hat{I}\hat{Z}$$

kde

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 \quad (15)$$

je ekvivalentní (celková) impedance sériového řazení impedancí - při **sériovém** řazení impedancí se tedy **sečítají impedance** prvků. Pro dané číselné hodnoty

$$\text{obdržíme } \hat{Z} = 10 + j10 + 10 - j5 = 20 + j5 = 20,616 \cdot e^{j14,04^\circ} [\Omega] \text{ (tím je splněn úkol a).}$$

$$\begin{aligned} \text{Odpovídající admitanci určíme ze vztahu } \hat{Y} = 1/\hat{Z} = 1/(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) = 1/(1/\hat{Y}_1 + 1/\hat{Y}_2) = \\ = \hat{Y}_1\hat{Y}_2/(\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2) = 1/(20 + j5) = 0,04706 - j0,01176 = 0,04851 \cdot e^{-j14,04^\circ} \end{aligned}$$

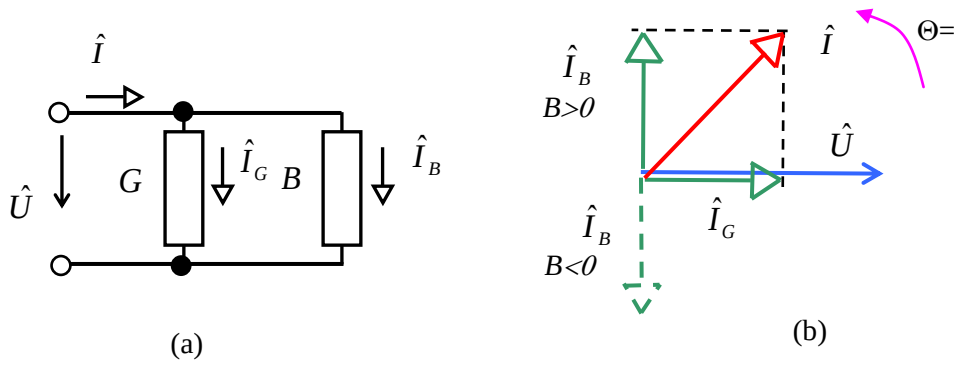
Stejně formální shody dosáhneme i pro transfiguraci trojúhelník-hvězda, děliče napětí a proudu. Místo odporů vždy dosazujeme odpovídající impedance.

6.1.5 Náhradní zapojení obecného dvojpólu

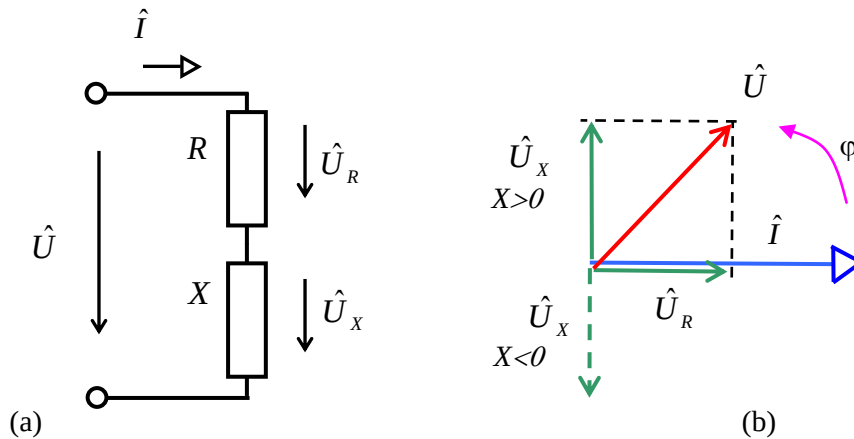
Pomocí pravidel o paralelním a sériovém řazení můžeme nakreslit náhradní schéma (zapojení, model) obecného dvojpólu. Vyjdeme-li ze vztahu (14), můžeme dvojpól považovat za paralelní řazení konduktance G (vždy kladná) a susceptance B - obr.3a. Fázové poměry jsou zachyceny na obr.3b.

Proud konduktancí $\hat{I}_G = \hat{U}G$ je vždy ve fázi s napětím $\hat{U}$ (činná složka proudu), proud susceptancí $\hat{I}_B = jB\hat{U}$ je kolmý k napětí $\hat{U}$ (jalová složka proudu) - podle charakteru (znaménka) B může proud napětí o 90° ($\pi/2$) předbíhat ($B > 0$) nebo se může za napětím o 90° zpožďovat

Vyjdeme-li ze vztahu (15), můžeme dvojpól považovat za sériové řazení jeho rezistance a reaktance - obr.4a. Fázové poměry jsou shrnuty na obr.4b. Napětí na rezistanci $\hat{U}_R = \hat{I}R$ je ve fázi s proudem (činná složka napětí). Napětí na reaktanci $\hat{U}_X = jX\hat{I}$ proud o 90° předbíhá ($X > 0$) nebo se o 90° zpožďuje ($X < 0$) - podle charakteru reaktance (jalová složka napětí).



Obr.3: a) Náhradní zapojení (paralelní) dvojpólu pro ustálený harmonický stav;
b) odpovídající fázorový diagram



Obr.4: a) Náhradní zapojení (sériové) dvojpólu pro ustálený harmonický stav;
b) odpovídající fázorový diagram.

6.1.6 Přenos

Při analýze obvodů nás často zajímá vztah mezi nějakou vstupní veličinou $x_1(t)$ - budící -a odpovídající výstupní veličinou $x_2(t)$. V harmonickém ustáleném stavu jsou obě veličiny vyjádřeny fázory $\hat{X}_1$ a $\hat{X}_2$ - jejich poměr $\hat{P}$ (obecně se jedná o komplexní číslo) budeme nazývat **přenos**:

$$\hat{P} = \hat{X}_2 / \hat{X}_1 = P \cdot e^{j\varphi}; \quad \hat{X}_2 = \hat{P} \cdot \hat{X}_1 \quad (16)$$

Modul přenosu $P = |\hat{P}|$ je dán poměrem modulů fázorů $\hat{X}_2$ a $\hat{X}_1$, úhel přenosu φ je dán rozdílem fáze fázorů $\hat{X}_2$ a $\hat{X}_1$ (od fáze "výstupní" se odečítá fáze "vstupní").

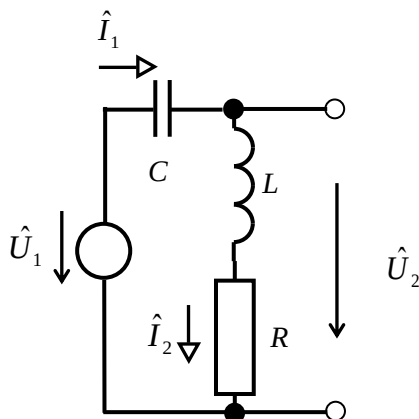
Popisují-li oba fázory napětí (**napěťový přenos** $\hat{P}_U$) nebo oba proudy (**proudový přenos** $\hat{P}_I$), je přenos bez rozměru.

Popisuje-li $\hat{X}_2$ napětí a $\hat{X}_1$ proud, má přenos rozměr $[V/A = \Omega]$ - jedná se o **přenosovou impedanci** (transimpedanci) $\hat{Z}_P = \hat{P}_{UI} \cdot S$

Popisuje-li $\hat{X}_2$ proud a $\hat{X}_1$ napětí, má přenos rozměr $[A/V = S]$ - jedná se o **přenosovou admitanci** (transadmitanci) $\hat{Y}_P = \hat{P}_{IU}$.



Řešený příklad



Obr. 5: Obvod k příkladu 3

Příklad 3.: Pro obvod na obr. 5 určete napěťový přenos $\hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{U}_1$ a transimpedanci $\hat{Z}_p = \hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{I}_1$.

Řešení: Jedná se o impedanční napěťový dělič, kde

$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_C = 1/(j\omega C)$ a $\hat{Z}_2 = R + j\omega L$. Proto

$$\begin{aligned} \hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{U}_1 &= \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{R + j\omega L}{1/(j\omega C) + R + j\omega L} = \\ &= \frac{(j\omega)^2 LC + j\omega CR}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1} \end{aligned}$$

Je zřejmé, že výstupní napětí $\hat{U}_2$ je dáno impedancí $\hat{Z}_2$

a proudem $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ (Ohmův zákon), tedy

$$\hat{U}_2 = (R + j\omega L)\hat{I}_1. \text{ Snadno nyní určíme, že}$$

$$\hat{Z}_p = \hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{I}_1 = R + j\omega L.$$

Je zřejmé, že v tomto jednoduchém případě, kdy platí $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$, je proudový přenos roven jedné a

$$\text{transkonduktance } \hat{Y}_p = \hat{I}_2 / \hat{U}_1 = \frac{\hat{U}_1 / [1/(j\omega C) + R + j\omega L]}{\hat{U}_1} = 1/[1/(j\omega C) + R + j\omega L].$$

6.2. Rezonance

6.2.1 Úvod (základní úvahy a terminologie)

K rezonanci¹ může dojít v elektrickém obvodu pouze tehdy, je-li možná výměna energie uložené v elektrickém poli kapacitorů a energie uložené v magnetickém poli induktorů. Proto musí rezonanční obvod obsahovat minimálně jeden induktor L a jeden kapacitor C .

Každý reálný elektrický obvod obsahuje rovněž rezistor R (přinejmenším každý reálný induktor má nenulový odpor vinutí).

Po jednorázové dodávce energie do rezonančního obvodu dochází k periodické výměně energie mezi L a C , obvody kmitají - vykazují **vlastní kmity**. Dodaná energie se postupně mění v rezistoru na teplo, kmity jsou proto **tlumené** (postupně zanikají, jedné se o přechodný děj).

Při buzení ze zdroje harmonického proudu nebo napětí můžeme v ustáleném stavu (nezkoumáme přechodné děje) použít symbolický počet (fázory, admitance, impedance), obvod kmitá **vnucenými kmity**. Při určitém kmitočtu - **rezonanční kmitočet** - právě platí, že **imaginární složka** imitance je nulová. Tomu odpovídá nulový fázový posuv ($\varphi = 0$) mezi proudem a napětím. Hovoříme o **fázové podmínce rezonance**. Na této frekvenci zdroj hradí pouze ztráty obvodu. Při **rezonanci** se extrémně změnila amplituda proudu nebo napětí.

¹ Rezonance může nastat i v jiných soustavách, např. v mechanické nebo optické.

Rezonanční obvody jsou proto schopny "vybrat" (to select) určité pásmo frekvencí a ostatní frekvence potlačit. Těto vlastnosti se v praxi hojně využívá (laděné selektivní obvody přijímačů a vysílačů, filtry, ...).

Nejjednodušší rezonanční obvod tedy obsahuje jeden induktor L , jeden kapacitor C a jeden rezistor R . Uspořádání může být sériové - **sériový rezonanční obvod** - nebo paralelní - **paralelní rezonanční obvod**.

6.2.2 Sériový rezonanční obvod

Impedance sériového rezonančního obvodu na obr.1 je určena vztahem

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (1)$$

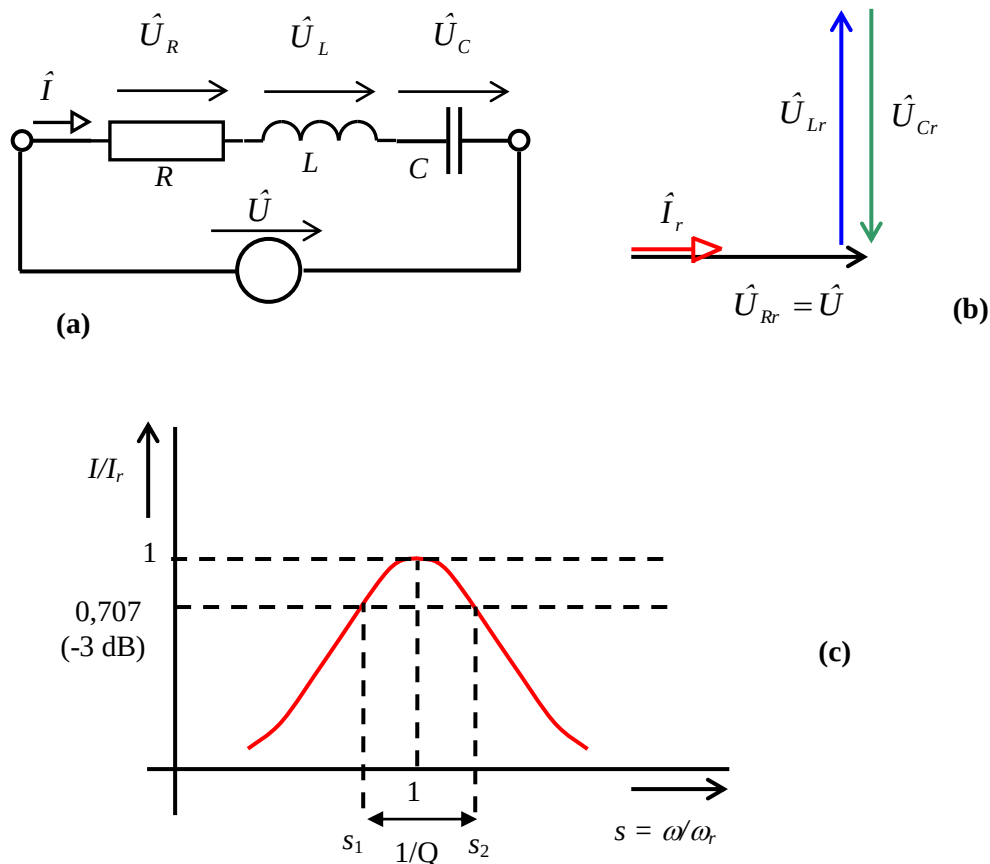
Imaginární část impedance nabývá nulové hodnoty na rezonančním kmitočtu $\omega \rightarrow \omega_r = ?$, kdy právě platí

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0$$

Odtud snadno určíme, že

$$\omega_r = 2\pi f_r = 1/\sqrt{LC} \quad (2)$$

což je tzv. **Thomsonův vztah** (vzorec).



Obr.1: a) Sériový rezonanční obvod (zdroj, R , L , C - řazeny sériově); b) fázorový diagram při rezonanci (indexy r); c) normovaná **rezonanční křivka** proudu

Při rezonanci platí

$$\hat{Z}_r = \hat{Z}(\omega = \omega_r) = R \quad (3)$$

modul impedance je **minimální**. Pro proud při rezonanci platí

$$\hat{I}_r = \hat{I}(\omega = \omega_r) = \hat{U} / \hat{Z}_r = \hat{U} / R \quad (4)$$

modul proudu je **maximální** a na rezistoru R je právě napětí $\hat{U}_{Rr} = \hat{U}$.

Dále při rezonanci platí

$$\hat{U}_{Lr} = j(\omega_r L) \hat{I}_r = j \left(\frac{1}{\omega_r C} \right) \hat{I}_r = - \left(\frac{1}{j \omega_r C} \right) \hat{I}_r = -\hat{U}_{Cr} \quad (5)$$

moduly napětí na kapacitoru a induktoru jsou stejné, fáze se o 180° liší. Proto se také hovoří o **napět'ové rezonanci** - viz i obr.1.b. Moduly napětí na reaktivních prvcích (U_{Lr} , U_{Cr}) mohou být mnohonásobně větší než modul napětí zdroje U . Koeficient (poměr)

$$Q = U_{Lr} / U = U_{Cr} / U = \frac{\omega_r L I_r}{R I_r} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R} \quad (6)$$

který popisuje napět'ové poměry při rezonanci, se nazývá **činitel jakosti**.

Význam činitele jakosti

Význam činitele jakosti je zřejmý po vyjádření kmitočtové závislosti proudu rezonančního obvodu - **rezonanční křivka** - obr.1.c. Průběh je vztažen vůči rezonančnímu proudu $\hat{I}_r$:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{I}}{\hat{I}_r} &= \frac{\hat{U} / \hat{Z}}{\hat{U} / \hat{Z}_r} = \frac{\hat{Z}_r}{\hat{Z}} = \frac{R}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{R}{R + j L \left(\omega - \frac{\omega_r^2}{\omega} \right)} = \\ &= \frac{R}{R + j L \omega_r \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega_r L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + j Q (s - 1/s)} \end{aligned} \quad (7)$$

$s = \omega / \omega_r$ je **poměrný kmitočet** (vztažený vůči kmitočtu rezonančnímu). Pro $s = 1$ (tedy $\omega = \omega_r$) vždy platí $\hat{I} / \hat{I}_r = 1$. Pro $s \neq 1$ závisí poměry na činiteli jakosti Q , jeho velké hodnoty způsobí "rychlý" pokles modulu rezonanční křivky při odchylce poměrného kmitočtu od hodnoty 1.

Významná je situace, kdy člen $Q(s - 1/s)$ nabývá hodnoty ± 1 . Zde zřejmě platí pro modul rezonanční křivky $|\hat{I} / \hat{I}_r| = 1 / \sqrt{2}$ (tomu odpovídá $20 \log(1 / \sqrt{2}) = -10 \log 2 = -3,01 \text{ dB} \cong -3 \text{ dB}$; pokles o 3 dB) a současně $\arg(\hat{I} / \hat{I}_r) = \pm 45^\circ$ (fázový posuv je $\pm 45^\circ$). Poměrné kmitočty, kde je tato rovnost splněna - obr.1.c - určíme z rovnic (vede na řešení kvadratické rovnice):

$$Q(s_1 - 1/s_1) = -1; \quad Q(s_2 - 1/s_2) = +1$$

Fyzikální smysl mají pouze kladné poměrné kmitočty. Proto snadno určíme, že

$$\begin{aligned} s_1 &= \left[-1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right] / (2Q) \\ s_2 &= \left[1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right] / (2Q) \end{aligned} \quad (8)$$

Pro tyto vztahy platí, že

$$s_1 \cdot s_2 = 1; \quad s_2 - s_1 = 1/Q \quad (9)$$

Snadno můžeme nyní určit, že $s_2 - s_1 = \omega_2/\omega_r - \omega_1/\omega_r = 1/Q$, takže **šířka pásma B pro pokles 3 dB** je (obr.1.c)

$$B_\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_r/Q \quad (10a)$$

nebo ($\omega = 2\pi f$)

$$B_f = f_2 - f_1 = f_r/Q \quad (10b)$$

Obvod zdůrazní pouze kmitočty v okolí rezonančních kmitočtů - kmitočty, na které je naladěný. Ostatní kmitočty potlačí. Kvalita výběru roste (šířka pásma se zmenšuje) s růstem činitele jakosti Q . Hovoříme o filtračních účincích obvodu.

Samozejmě můžeme prozkoumat i napět'ové poměry na jednotlivých prvcích obvodu, vše je pro tento úkol v tomto okamžiku připraveno, napětí vztahujeme vůči napětí zdroje.

a) Napětí na rezistoru

$$\frac{\hat{U}_R}{\hat{U}} = \frac{R\hat{I}}{R\hat{I}_r} = \frac{1}{1 + jQ(s - 1/s)};$$

pro $s = 0$ je modul napětí na rezistoru R nulový; pro $s = 1$ je uvedený poměr roven hodnotě 1; pro $s \rightarrow \infty$ je modul napětí opět roven nule. Poměr napětí definuje **napět'ový přenos**. Právě popsany přenos definuje **pásmovou propust**, která propouští pouze frekvenční složky v okolí rezonančního kmitočtu.

b) Napětí na induktoru

$$\frac{\hat{U}_L}{\hat{U}} = \frac{j\omega L\hat{I}}{R\hat{I}_r} = j \cdot \frac{\omega L}{R} \cdot \frac{\hat{I}}{\hat{I}_r} = j \frac{\omega}{\omega_r} \cdot \frac{\omega_r L}{R} \cdot \frac{\hat{I}}{\hat{I}_r} = \frac{jsQ}{1 + jQ(s - 1/s)};$$

pro $s = 0$ je modul napětí na induktoru nulový; pro $s = 1$ je uvedený poměr roven hodnotě $+jQ$; pro $s \rightarrow \infty$ je modul poměru opět roven jedné. Tyto poměry popisují **horní propust** - přenáší pouze frekvenční složky vyšší než určitý charakteristický kmitočet. Maximum přenosu lze zjistit vyšetřením modulu přenosu, jeho poloha i velikost jsou funkcí činitele jakosti Q .

c) Napětí na kapacitoru

$$\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} = \frac{(1/j\omega C)\hat{I}}{R\hat{I}_r} = \frac{1}{j\omega CR} \cdot \frac{\hat{I}}{\hat{I}_r} = \frac{\omega_r}{j\omega} \cdot \frac{1}{\omega_r CR} \cdot \frac{\hat{I}}{\hat{I}_r} = \frac{Q/(js)}{1 + jQ(s - 1/s)};$$

pro $s = 0$ je poměr napětí na kapacitoru jednotkový; pro $s = 1$ je uvedený poměr roven hodnotě $-jQ$; pro $s \rightarrow \infty$ je modul poměru roven nule. Tyto poměry popisují **dolní propust** - přenáší pouze frekvenční složky od nulového kmitočtu po určitý charakteristický kmitočet. Maximum přenosu lze zjistit vyšetřením modulu přenosu, jeho poloha i velikost jsou opět funkcí činitele jakosti Q .

d) Suma napětí na kapacitoru a induktoru

$$\frac{\hat{U}_L}{\hat{U}} + \frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} = \frac{jsQ}{1 + jQ(s - 1/s)} + \frac{Q/(js)}{1 + jQ(s - 1/s)} = \frac{jQ(s - 1/s)}{1 + jQ(s - 1/s)};$$

odebíráme-li napětí z "L+ C", je přenos jednotkový pro nulové i nekonečné kmitočty. Pouze pro $s = 1$ je přenos nulový. Jde o **pásmovou zádrž** - potlačovány (zadržovány) jsou pouze frekvenční složky v okolí rezonančního kmitočtu.

6.2.3 Paralelní rezonanční obvod

Admitance paralelního rezonančního obvodu na obr.2.a je dána vztahem

$$\hat{Y} = 1/R + j\omega C + 1/(j\omega L) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (11)$$

Imaginární složka je nulová, platí-li $\omega_r C - 1/(\omega_r L) = 0$. Rezananční kmitočet je i teď definován vztahem (R.2), admitance obvodu při rezonanci je dána vztahem

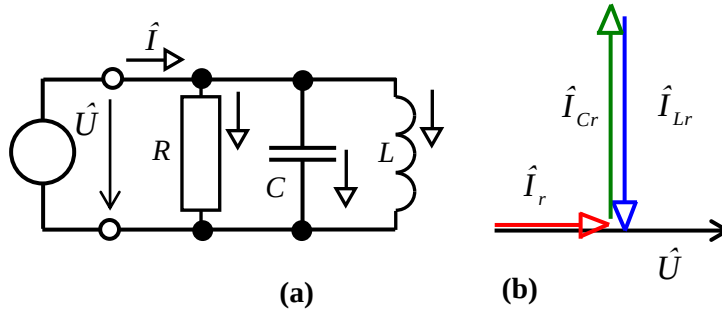
$$\hat{Y}_r = \hat{Y}(\omega = \omega_r) = G \quad (12)$$

Proud dodávaný ze zdroje je proto při rezonanci určen jednoduchým vztahem

$$\hat{I}_r = \hat{U}\hat{Y} = \hat{U}G \quad (13)$$

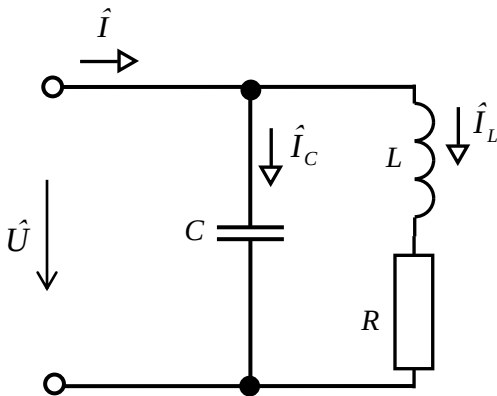
Moduly proudů induktoru a kapacitoru jsou při rezonanci shodné, $I_{Cr} = U\omega_r C = U/(\omega_r L) = I_{Lr}$. Proto hovoříme o **proudové rezonanci**. Proud (modul) induktorem a kapacitorem mohou být větší než proud ze zdroje. Činitel jakosti definujeme vztahem

$$Q = I_{Cr}/I_r = \frac{U\omega_r C}{UG} = \frac{\omega_r C}{G} = \omega_r CR = \frac{1}{\omega_r L} \cdot R = \frac{U}{\omega_r L} \cdot \frac{R}{U} = I_{Lr}/I_r \quad (14)$$



Obr.2: a) Paralelní rezonanční obvod (zdroj, R , L , C - řazeny paralelně); b) fázorový diagram při rezonanci

Model na obr.2.a má čistě teoretický význam. Skutečná cívka má vždy i sériový odpor R . Skutečnosti potom lépe odpovídá obvodový model na obr.3.



Obr.3: Skutečný paralelní rezonanční obvod (model obsahuje odpor vinutí)

Admitance obvodu na obr.3 je definována vztahem

$$\hat{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \quad (15)$$

Admitance je reálná (má nulovou imaginární složku, tedy i fázi), platí-li

$$\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L} = 0$$

Nyní již můžeme určit rezonanční kmitočet

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - LC\left(\frac{R}{L}\right)^2} \quad (16)$$

Označíme-li $\omega_{r0} = 1/\sqrt{LC}$, potom platí

$$\omega_r = \omega_{r0} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\omega_{r0} L}\right)^2} \quad (17a)$$

Rezonanční kmitočet je nyní i funkcí odporu R . Člen $\omega_{r0} L/R = Q_0$ můžeme považovat za **činitel jakosti cívky**. Potom

$$\omega_r = \omega_{r0} \sqrt{1 - 1/Q_0^2} \quad (17b)$$

Pro $Q_0 < 1$ vůbec rezonance nenastane, rezonanční kmitočet nemůže být imaginární. Pro $Q_0 \gg 1$ zřejmě platí, že $\omega_r \approx \omega_{r0}$.

6.2.4 Poznámka k činiteli jakosti

U složitějších rezonančních obvodů není možné definovat činitel jakosti pouze vztahy (6) nebo (14). Při měření ve skutečných obvodech je například výhodné použít výsledků (10a, b). Snadno odvodíme, že

$$Q = \frac{\omega_r}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_r}{f_2 - f_1} \quad (18)$$

kde f_2 a f_1 jsou kmitočty, na kterých poklesne amplituda A sledované veličiny na hodnotu $A/\sqrt{2}$ (to je o 3 dB; souvislost u zkoumaných jednoduchých obvodů je zřejmá z odvození).

Můžeme použít i **energetickou definici** činitele jakosti

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{energie absorbovaná v obvodu při rezonanci}}{\text{energie proměněná v teplo během jedné rez. periody}} \quad (19)$$

Ověřme i zde platnost energetické definice pro shora zkoumané jednoduché obvody, například pro sériový rezonanční obvod (při rezonanci platí $U_{Crm} = U_{Lrm}$; akumulovaná energie $W_L = (LI_{rm}^2)/2 = (CU_{Crm}^2)/2 = W_C$; $T_r = 1/f_r$ je perioda při rezonanci; index m vyznačuje amplitudu veličiny, bez indexu se jedná o efektivní hodnoty):

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \cdot \frac{(LI_{rm}^2)/2}{\int_0^{T_r} p(t) dt} = \left| \begin{array}{l} \text{pro harm. buzení} \\ P = RI_r^2 = \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} p(t) dt \end{array} \right| = 2\pi \cdot \frac{LI_r^2}{PT_r} = |2\pi/T_r = \omega_r| = \\ &= \frac{\omega_r LI_r^2}{P} = \frac{X_L I_r^2}{P} = [\text{reakt. výkon}]/[\text{cinny výkon}] = \frac{X_C I_r^2}{P} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{R\omega_r C} \end{aligned}$$

Je zřejmé, že výsledek pro jednoduché obvody odpovídá dříve zavedeným definicím.

6.2.5 Vícenásobná rezonance

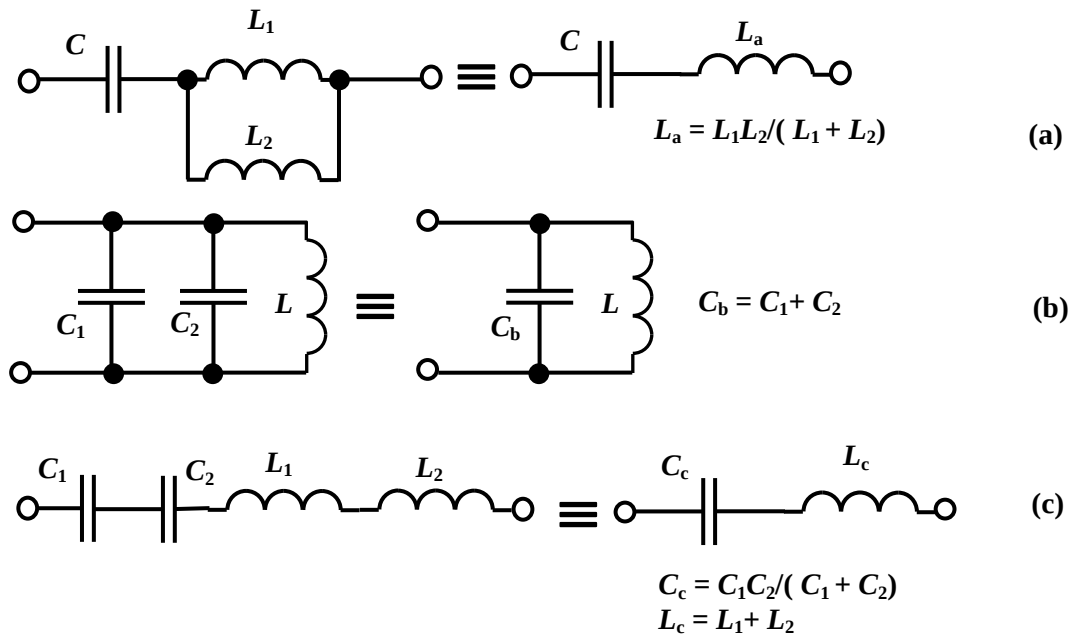
Obvody tvořené kombinací několika induktorů a kapacitorů mohou dosahovat nulové imaginární složky imitance pro několik různých kmitočtů. Hovoříme o **vícenásobné rezonanci**. Podmínkou ovšem je, že obvod není možné upravit tak, aby obsahoval pouze jednu ekvivalentní kapacitu a jednu ekvivalentní indukčnost, jako je to možné na obr.4.

Po ekvivalentních úpravách snadno určíme jediný rezonanční kmitočet pro každý obvod z obr.4.

Při určování rezonančních kmitočtů obvykle uvažujeme idealizované cívky, pro které platí $\omega_r L/R = Q_0 \gg 1$. Potom není nutné odpor R uvažovat a určené rezonanční kmitočty se příliš neliší od skutečnosti - viz i vztah (17a), imitance obvodu je ryze imaginární.

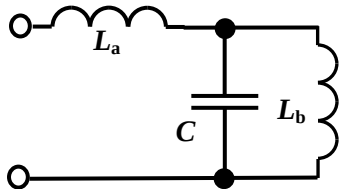
Při **určování sériových rezonancí** (napětových) hledáme kmitočty, na kterých je **impedance obvodu nulová**.

Při **určování paralelních rezonancí** (proudových) hledáme kmitočty, na kterých je **admittance obvodu nulová**.



Obr.4.: Příklady obvodů s jednou rezonancí

Řešme pro příklad obvod na obr.5.



Obr.5: Obvod s vícenásobnou rezonancí

Impedance obvodu na obr.5 je

$$\hat{Z} = j\omega L_a + \frac{j\omega L_b \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_b + \frac{1}{j\omega C}} = j \cdot \frac{\omega L_a \cdot (1 - \omega^2 L_b C) + \omega L_b}{1 - \omega^2 L_b C}$$

a nabývá nulové hodnoty při kmitočtu $\omega = \omega_{r1}$, kde právě platí $\hat{Z}(\omega_{r1}) = 0$, tedy

$$\omega_{r1} L_a \cdot (1 - \omega_{r1}^2 L_b C) + \omega_{r1} L_b = 0$$

Snadno nyní určíme, že

$$\omega_{r1}^2 = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} \right)$$

je kmitočet napěťové rezonance (její kvadrát).

Admittance obvodu z obr.5 je převrácenou hodnotou impedance

$$\hat{Y} = 1/\hat{Z} = -j \cdot \frac{1 - \omega^2 L_b C}{\omega L_a \cdot (1 - \omega^2 L_b C) + \omega L_b}$$

a nulové hodnoty (proudové rezonance) dosahuje při kmitočtu $\omega = \omega_{r2}$, kdy platí $\hat{Y}(\omega_{r2}) = 0$:

$$1 - \omega_{r2}^2 L_b C = 0$$

Určíme proto

$$\omega_{r2}^2 = \frac{1}{L_b C}$$

Z příkladu je zřejmé, že napěťové (sériové) rezonanci odpovídá tzv. **nula impedance** obvodu. Proudové (paralelní) rezonanci odpovídá tzv. **pól impedance**, kdy impedance dosahuje nekonečné hodnoty (a samozřejmě admittance hodnoty nulové).

Impedance pasivních obvodů je stále rostoucí, vyjma skoků v pólech impedance. Nuly a póly impedance se střídají. Tato skutečnost je zřejmá po grafickém zobrazení průběhu impedance v závislosti na kmitočtu.

6.2.6 Kompenzace jalových složek

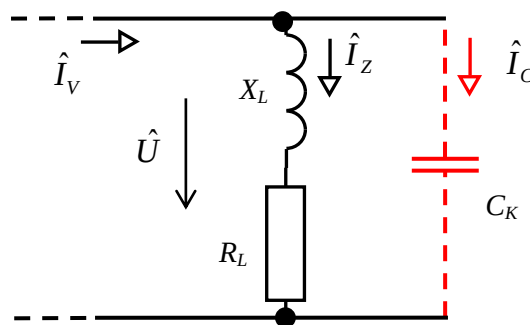
Kompenzace jalových složek proudu může zvýšit hospodárnost při přenosu elektrické energie. Spotřebič má většinou induktivní charakter, jeho impedance $\hat{Z} = R_L + j\hat{X}_L$. Situace je znázorněna na obr.6.

Není-li připojena kapacita C_K (vyznačena v obrázku přerušovanou čarou), je proud ve vedení $\hat{I}_{Va}$ (situace a) a proud v zátěži $\hat{I}_Z$ stejný. Platí

$$\hat{I}_{Va} = \hat{I}_Z = \hat{U} / (R_L + j\hat{X}_L) = \hat{U} / Z \cdot e^{-j\varphi} \quad (20)$$

kde

$$\tan \varphi = X_L / R_L.$$



Obr.6: Kompenzace zátěže induktivního charakteru.

Proud $\hat{I}_{Va}$ vytváří na sériovém odporu vedení R_V výkonovou ztrátu $R_V \cdot I_{Va}^2$.

Nyní připojme kompenzační kapacitu C_K (případ b). Napětí $\hat{U}$ na zatěžovací impedanci se téměř nemění, proto zůstává nezměněný i proud zátěží $\hat{I}_Z$. Snadno určíme, že proud ve vedení je nyní určen vztahem

$$\hat{I}_{Vb} = \hat{I}_Z + \hat{I}_C = \frac{\hat{U}}{Z}(\cos \varphi - j \sin \varphi) + \frac{\hat{U}}{1/(j\omega C)} = \frac{\hat{U}}{Z} \cos \varphi + j\hat{U} \left(\omega C_K - \frac{\sin \varphi}{Z} \right) \quad (21)$$

Ze vztahu (21) je zřejmé, že při

$$\omega C_K - \frac{\sin \varphi}{Z} = 0$$

tedy pro

$$C_K = \frac{\sin \varphi}{\omega \cdot Z} = \frac{U \cdot \sin \varphi}{U \cdot \omega \cdot Z} = \frac{I_Z \sin \varphi}{\omega \cdot U} \quad (22)$$

dochází ke **kompenzaci jalové složky proudu ve vedení** (poměry v zátěži se téměř nemění), právě platí

$$\hat{I}_{Vb} = \hat{I}_{VKOMP} = \frac{\hat{U}}{Z} \cos \varphi \quad (23)$$

Je zřejmé, že vždy platí $\cos \varphi \leq 1$ a proto

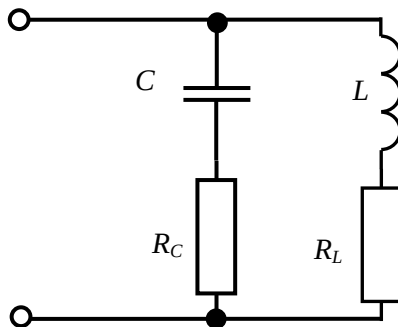
$$I_{VKOMP} \leq I_{Va} \quad (24)$$

Proto klesne výkonová ztráta na odporu vedení a to z hodnoty $R_V \cdot I_{Va}^2$ na hodnotu $R_V \cdot I_{VKOMP}^2$. Zátěž kapacitního charakteru je možné obdobně kompenzovat korekční indukčností L_K .



Řešený příklad

Příklad: Určete, za jakých podmínek je imitance obvodu na obr.7 reálná.



Obr.7: Imitanční obvod k příkladu

Řešení:

Impedance sériové kombinace rezistoru R_L a induktoru L je

$$\hat{Z}_L = R_L + j\omega L$$

Impedance sériové kombinace rezistoru R_C a kapacitoru C je

$$\hat{Z}_C = R_C + 1/(j\omega C)$$

Odpovídající admitance jsou

$\hat{Y}_L = 1/(R_L + j\omega L)$ a $\hat{Y}_C = 1/[R_C + 1/(j\omega C)]$. Celková admitance paralelního řazení admitancí je definována jejich součtem, tedy

$$\hat{Y} = \hat{Y}_L + \hat{Y}_C = 1/(R_L + j\omega L) + 1/[R_C + 1/(j\omega C)] = \frac{R_L + R_C + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R_L R_C + L/C + j\left(\omega L R_C - \frac{R_L}{\omega C}\right)}$$

Má-li být splněn požadavek - reálnost imitance - musí současně platit

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad a \quad L R_C - \frac{R_L}{\omega C} = 0$$

To lze splnit pouze pro $R_L = R_C = R$. Za této situace lze určit, že admitance obvodu je

$$\hat{Y}(R) = \frac{2R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + L/C + jR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{2R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R + L/(RC) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Platí-li $2R = R + L/(RC)$, tedy

$$R = \sqrt{L/C}$$

je $\hat{Y}(R = \sqrt{L/C}) = 1/R$, imitance není vůbec funkcí ω .

Poznámka: Toto je problém, který se řeší i při buzení reproduktoru zesilovačem. Je-li R_L odpor reproduktoru a L indukčnost reproduktoru, připojuje se k výstupu zesilovače i člen R_C a C podle obr.7 (tzv. **Boucherotův člen**). Volíme $R_C = R_L = R$, dopočítáme snadno $C = L/R^2$. Zesilovač je tak zatěžován frekvenčně nezávislou impedancí, což je výhodné z hlediska jeho frekvenční stability.



Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Skriptum ČVUT Praha 1999; články 7.4 a 7.10



Další studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, článek 4.6, 5.5, 5.6



Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Co znamená pojem imitace?
2. Co je to přenos?
3. Co popisuje Thomsonův vztah (vzorec)?
4. Co je vícenásobná rezonance?
5. Co je činitel jakosti?



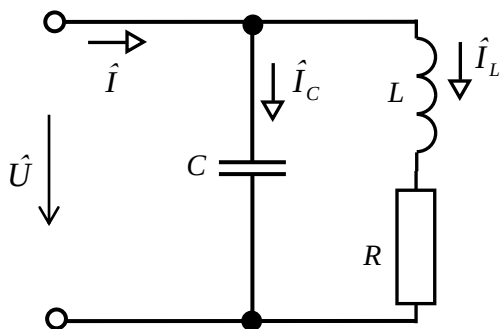
Odpovědi naleznete v [1] na

str.159, 166, 207, 211, 210



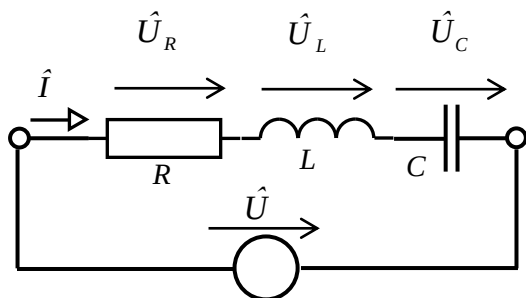
Úlohy k řešení

- (celkem 3 body) V harmonicky ustáleném stavu je fázor výstupní veličiny (napětí) $\hat{X}_2 = (3 + j4)$ V a fázor vstupní veličiny (proudu) je $\hat{X}_1 = (6 + j8)$ A. Určete rozměr přenosu (1 bod) a určete jej (2 body).
- (celkem 3 body) Uveďte a zdůvodněte minimální počet obvodových prvků, které mohou vytvořit rezonanční obvod (1 bod); nakreslete dvě triviální varianty takového obvodu (za každou variantu 1 bod).
- (6 bodů) Určete rezonanční kmitočet obvodu podle obrázku 1 pro dvě hodnoty rezistoru R (viz obrázek).



Obr. 1 Paralelní rezonanční obvod, do série s induktorem je zapojen rezistor. Platí, že $C = 2,533 \mu\text{F}$, $L = 10 \text{ mH}$, $R = 1 \Omega$ nebo 30Ω .

- (celkem 5 bodů) Určete rezonanční kmitočet obvodu podle obrázku 2 (1 bod), stanovte činitel jakosti obvodu (2 body) a určete šířku kmitočtového pásma, ve kterém nebudou proudy významně



Obr. 2 Sériový rezonanční obvod: $C = 1 \mu\text{F}$, $L = 25,33 \text{ mH}$, $R = 30 \Omega$.

potlačovány (2 body).

- (1 bod) Jakým obvodovým prvkem budete kompenzovat elektromotor, který má indukční charakter?



Klíč k řešení

- Přenos je definován poměrem výstupní a vstupní veličiny, tedy $\hat{P} = \hat{X}_2 / \hat{X}_1 = (3 + j4) / (6 + j8) = 1/2$. Rozměrem je $[\text{V/A} = \Omega]$.
- Aby mohla být splněna (fázová) podmínka rezonance, musí obvod obsahovat jeden induktor a jeden kapacitor. Pouze v tomto případě může dosáhnout imaginární část imitance nulové hodnoty - tedy nulové fáze - pro kmitočty různé od nuly a nekonečna. Triviální možnosti jsou tak určeny obrázky v otázkách č. 3 a 4, uvažujeme-li $R = 0$.
- V [1] nalezneme pro tuto situaci (po drobných úpravách, str.210) vztah $\omega_r = \omega_{r0} \sqrt{1 - (R/(\omega_{r0} L))^2}$, kde platí Thomsonův vztah $\omega_{r0} = 1/\sqrt{LC}$. Dosadíme-li uvedené

hodnoty, obdržíme $f_{r0} = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 1/(2\pi\sqrt{10^{-2} \cdot 2,533 \cdot 10^{-6}}) = 1000 \text{ Hz}$. Dále $\sqrt{1 - (R/(\omega_{r0}L))^2} = \sqrt{1 - (R/(2\pi \cdot 1000 \cdot 0,01))^2} = \sqrt{1 - (R/62,832)^2}$, což je 0,9999 pro $R = 1 \Omega$ a 0,8787 pro $R = 30 \Omega$. Rezonanční kmitočty tedy jsou 999,9 Hz a 878,7 Hz.

4. V [1] pro tuto situaci (str.207) nalezneme pro sériový rezonanční obvod vztah $\omega_r = 2\pi f_r = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{25,33 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}} = 6283,222$, tedy $f_r = 1000 \text{ Hz}$. Dále činitel jakosti $Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{6283,222 \cdot 25,33 \cdot 10^{-3}}{30} = 5,305$. Odsud již snadno určíme, že šířka pásma (propustnosti, hranice 3 dB) je $B = f_r/Q = 188,5 \text{ Hz}$.

5. Paralelně k motoru musíme připojit kapacitor vhodné hodnoty. Tím je kompenzována jalová složka proudu motoru ve vedení. Klesá modul proudu ve vedení a tím i ztráty ve vedení. Tím se zlepší účinnost vedení (nikoli ovšem samotného spotřebiče, jeho "vnitřní" poměry se nemění).



Autokontrola

Pokud jste získali z úloh k řešení alespoň **13** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat úlohy k řešení.



Zadání 6. samostatné práce

K sériovému zapojení induktoru a rezistoru je paralelně připojen kapacitor. Odvoďte vztah pro výpočet rezonančního kmitočtu zadaného obvodu a stanovte podmínku, při níž nenastane rezonance.

Zpracoval: Josef Punčochář

7. MAGNETICKÁ VAZBA, VZÁJEMNÁ INDUKČNOST, ELEMENTÁRNÍ MODEL Y TRANSFORMÁTORŮ, NÁHRADA MAGNETICKÉ VAZBY GALVANICKOU VAZBOU



Čas ke studiu: 3 hodiny



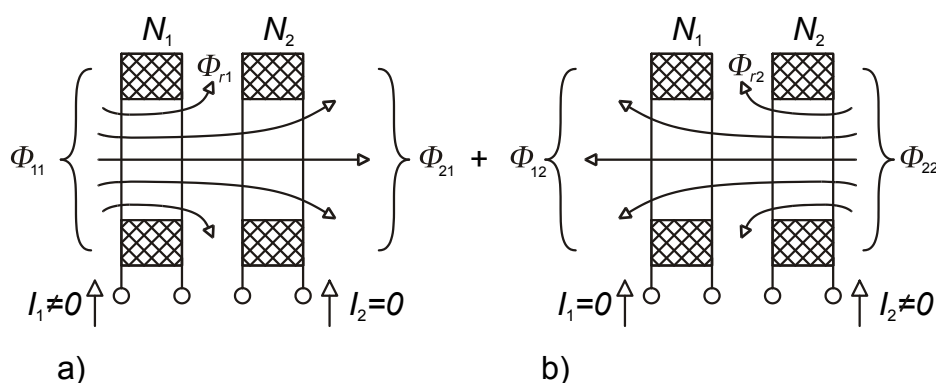
Cíl: Po prostudování textu této studijní opory budete umět:

- určovat vzájemnou indukčnost
- sestavovat rovnice v obvodech se vzájemnými indukčnostmi
- konstruovat fázorové diagramy
- vytvářet jednoduché modely transformátorů
- nahrazovat magnetickou vazbu vazbou galvanickou.



Výklad

Vzájemnou indukčnost M definujeme pro dvojici cívek s počtem závitů N_1 a N_2 . Pro zvýšení názornosti výkladu použijeme princip superpozice - tj., budeme předpokládat, že proud prochází právě jen jednou z cívek a jejich odezvy sečteme.



Obr. 1 Znárodnění indukčních toků

7.1. Statické definice vlastní, vzájemné a rozptylové indukčnosti

a) proud $I_1 \neq 0$; $I_2 = 0$.

Vlastní indukční tok ϕ_{11} vyvolaný průtokem proudu I_1 cívkou s N_1 závitů z části prochází dutinou druhé cívky - vzájemný tok ϕ_{21} a z části mimo ní - rozptylový tok ϕ_{r1} . Mezi těmito třemi toky platí rovnost

$$\phi_{11} = \phi_{21} + \phi_{r1}.$$

b) $I_1 = 0$; I_2 .

Vlastní indukční tok ϕ_{22} vyvolaný průtokem proudu I_2 cívkou s N_2 závitů z části prochází dutinou druhé cívky - vzájemný tok ϕ_{12} a z části mimo ní - rozptylový tok ϕ_{r2} . Mezi těmito třemi toky platí rovnost

$$\phi_{22} = \phi_{12} + \phi_{r2}.$$

Předpokládejme, že tok ϕ_{11} je spřažen se všemi závitů první cívky, jeho součin s počtem závitů N_1 nazýváme vlastním spřaženým tokem

$$\psi_{11} = N_1 \phi_{11}.$$

Vlastní indukčnost L_1 pak definujeme podílem vlastního spřaženého toku ψ_{11} a proudu I_1 vztahem

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \phi_{11}}{I_1}.$$

Vlastní indukčnost L_2 druhé cívky definujeme podílem vlastního spřaženého magnetického toku ψ_{22} a proudu I_2

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{I_2} = \frac{N_2 \phi_{22}}{I_2}.$$

Stejný přístup použijeme pro definice rozptylových indukčností L_{r1} a L_{r2} .

$$L_{r1} = \frac{\psi_{r1}}{I_1} = \frac{N_1 \phi_{r1}}{I_1}, \quad L_{r2} = \frac{\psi_{r2}}{I_2} = \frac{N_2 \phi_{r2}}{I_2}.$$

Pro definici vzájemné indukčnosti určíme vzájemné spřažené magnetické toky první cívky i druhé cívky

$$\psi_{12} = N_1 \phi_{12}, \quad \psi_{21} = N_2 \phi_{21}.$$

Vzájemná indukčnost obou cívek je potom definována podílem příslušného vzájemného spřaženého magnetického toku a proudu, který ho vybudil. Tedy

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \phi_{12}}{I_2}, \quad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \phi_{21}}{I_1}.$$

V lineárních obvodech platí $M_{12} = M_{21} = M$.

Vzájemná indukčnost M je podíl vzájemného spřaženého magnetického toku první cívky a proudu druhé cívky nebo podíl vzájemného spřaženého magnetického toku druhé cívky a proudu první cívky.

Účinky obou proudů I_1 a I_2 nyní sečteme. Celkový tok první cívky je součet vlastního toku ϕ_{11} a vzájemného toku ϕ_{12} , tj.

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = \phi_{r1} + \phi_{21} + \phi_{12} = \phi_{r1} + \phi_0.$$

Obdobně celkový tok druhé cívky je součtem vlastního toku ϕ_{22} a vzájemného toku ϕ_{21} , tj.

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = \phi_{r2} + \phi_{12} + \phi_{21} = \phi_{r2} + \phi_0.$$

Celkový vzájemný tok

$$\phi_0 = \phi_{12} + \phi_{21}$$

je nazýván hlavním tokem obou cívek. Tok každé cívky vyjadřujeme součtem hlavního a rozptylového toku.

Stupeň indukční vazby dvou indukčně vázaných cívek s indukčnostmi L_1 a L_2 vyjadřujeme činitelem indukční vazby definovaného výrazem

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad k \leq 1.$$

7.2. Dynamická definice vzájemné indukčnosti

Časově proměnný proud $i_1(t)$ v první cívce vyvolá i časově proměnný vzájemný tok $\phi_{21}(t)$ a následkem elektromagnetické indukce je ve druhé cívce indukováno napětí

$$u_{M2}(t) = \frac{d\psi_{21}(t)}{dt} = M \frac{di_1(t)}{dt}.$$

Podobně, když se mění proud v druhé cívce, je v první cívce indukováno napětí

$$u_{M1}(t) = \frac{d\psi_{12}(t)}{dt} = M \frac{di_2(t)}{dt}.$$

Z těchto rovnic definujeme vzájemnou indukčnost

$$M = \frac{u_{M2}(t)}{\frac{di_1(t)}{dt}}, \text{ resp. } M = \frac{u_{M1}(t)}{\frac{di_2(t)}{dt}}$$

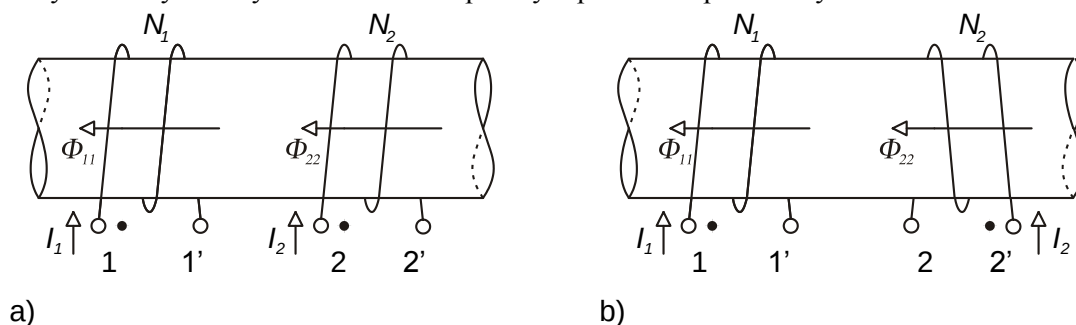
jako podíl okamžité hodnoty napětí indukovaného v druhé cívce časovou změnou proudu v první cívce, resp. napětí indukovaného v první cívce časovou změnou proudu v druhé cívce.

7.3. Určování znamének indukovaných napětí

Při sestavování obvodových rovnic je nezbytně nutné určit znaménka indukovaných napětí. K jejich určení byl zaveden pojem souhlasných (stejnojmenných) svorek patřících dvěma různým navzájem indukčně vázaným cívkám.

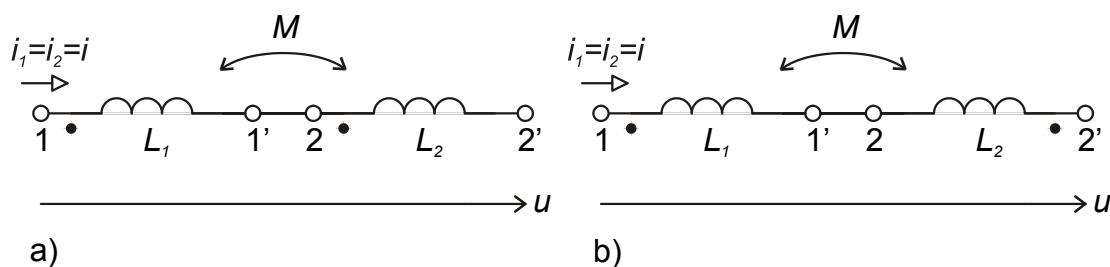
Dvě svorky jsou souhlasné tehdy, když při stejné orientaci proudů vzhledem k nim mají vyvolané magnetické toky stejný směr.

K určení souhlasných svorek musíme mít k dispozici technologický výkres, z kterého je zřejmé, jak jsou cívky navinuty. Směry toků určíme Ampérovým pravidlem pravé ruky



Obr. 2 Určování souhlasných svorek vinutí cívek

(cívky uchopíme do pravé ruky tak, aby prsty byly ve směru toku proudu a palec pak ukazuje směr magnetického toku). Souhlasné svorky označujeme referenčními znaky. Spojíme-li svorku 1' se svorkou 2



Obr. 3 Schéma zapojení indukčně vázaných cívek

pak obdržíme

$$u = L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 \pm 2k\sqrt{L_1 L_2}) \frac{di}{dt}$$

znaménko + je pro zapojení ad a); znaménko - pro zapojení ad b).

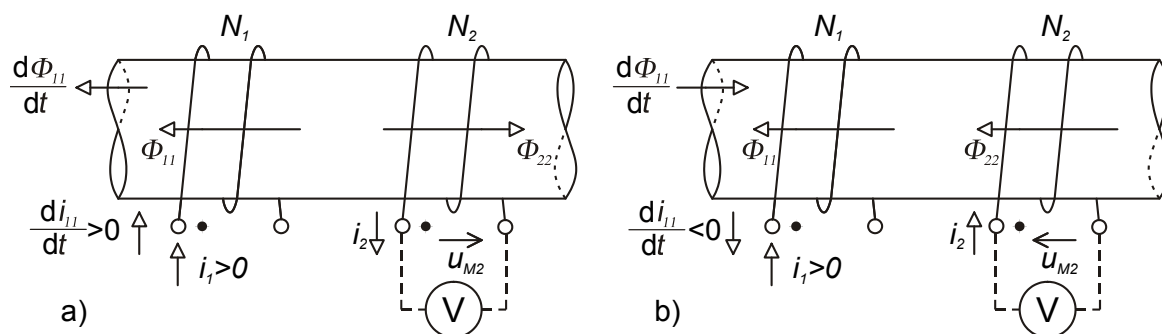
Pro harmonické průběhy obvodových veličin použijeme symbolického počtu

$$\hat{U} = j\omega L_1 \hat{I} \pm j\omega M \hat{I} + j\omega L_2 \hat{I} \pm j\omega M \hat{I} = j\omega (L_1 + L_2 \pm 2M) \hat{I}.$$

Poznámka: Pro případ bifilárního vinutí $L_1 = L_2$ za předpokladu $k=1$ je celková indukčnost nulová, tj. $u=0$, resp. $\hat{U}=0$, pro $i \neq 0$, resp. $\hat{I} \neq 0$. U technických prvků se uplatní pouze ohmické odpory vinutí, které ve schématu nejsou uvažovány.

7.4. Princip akce a reakce

Pro názorné vysvětlení uvažujme případ, kdy proud prochází pouze první cívkou, zatímco



Obr. 4 Znázornění principu akce a reakce

proud druhou cívkou je nulový, tj. $i_1(t) \neq 0$; $i_2(t)=0$. Napětí indukované v druhé cívkě časovou změnou vzájemného spřaženého magnetického toku má pak takový směr (polaritu), aby proud, který by od něho procházel zátěží připojenou k jejím svorkám vyvolal mag. tok ϕ_{22} působících proti změně toku $d\phi_{11}/dt$.

Princip akce a reakce můžeme použít k určení souhlasných svorek i v případech, kdy není zřejmé, jak jsou cívky navinuty. K druhé cívkě připojíme magnetoelektrický voltmetr a poté k první cívkě baterii. Jestliže se ručka voltmetru vychýlila doprava, pak referenčními znaky označíme svorky, ke kterým jsou připojeny kladné póly baterie a voltmetru.

Je-li indukčně vázáno několik cívek najednou, lze postupovat dvojím způsobem:

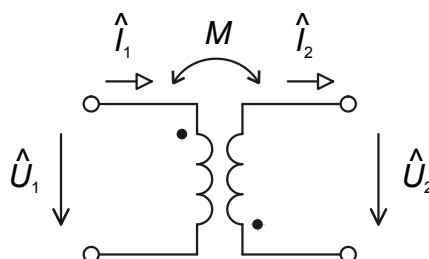
- pro každou indukčně vázanou dvojici cívek použijeme odlišné typy referenčních znaků,
- pro všechny indukčně vázané dvojice cívek použijeme stejné typy referenčních znaků, ale v některých případech musíme uvažovat záporné hodnoty vzájemných indukčností.

7.5. Bezeztrátový, dokonalý a ideální transformátor

Transformátor je elektrický stroj, který slouží k přeměně (transformaci) elektrické energie o určitém napětí na energii obvykle o jiném (větším nebo menším) napětí. Jeho činnost je založena na elektromagnetické indukci, proto je jeho trvalý chod možný jen při střídavém napětí. Transformátor se skládá ze dvou i více indukčně vázaných cívek. Pro názorné vysvětlení budeme uvažovat transformátor se dvěma vinutími.

Bezeztrátový transformátor je charakterizován třemi parametry L_1 , L_2 , M , mezi nimiž platí vztah

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$



Obr. 5 Bezeztrátový nebo dokonalý transformátor

Podle schématu sestavíme rovnice

$$\hat{U}_1 = j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2$$

$$\hat{U}_2 = j\omega M \hat{I}_1 + j\omega L_2 \hat{I}_2$$

ze kterých vyjádříme proudy

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_1 \hat{U}_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_M \hat{U}_2$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_M \hat{U}_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_2 \hat{U}_2$$

kde

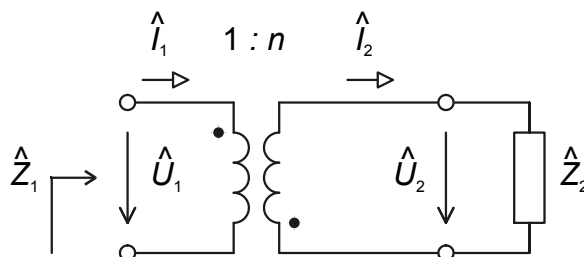
$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \Gamma_M = -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2}$$

jsou inverzní vlastní indukčnosti a inverzní vzájemná indukčnost.

a) Dokonalým transformátorem nazýváme bezeztrátový transformátor s dokonalou vazbou (nulovým rozptylovým tokem), tedy

$$k = 1 \quad a \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$$

b) Ideální transformátor je definován jako dokonalý transformátor, jehož vlastní indukčnosti L_1 a L_2 jsou nekonečně velké. Je charakterizován jedinou konstantou - převodem vinutí n .



Obr. 6 Ideální transformátor

Pro bezetrátový transformátor platí rovnost pro zdánlivé výkony $S_2 = S_1$. Vyjádříme-li zdánlivé výkony pomocí napětí a proudů, pak po rozšíření převodem n obdržíme

$$S_2 = S_1 = U_2 I_2 = U_1 I_1 \frac{n}{n} = n U_1 \frac{I_1}{n},$$

z čehož můžeme odvodit identity pro napětí a proudy

$$U_2 = n U_1 \quad a \quad I_2 = \frac{I_1}{n}.$$

Pomocí nich stanovíme vztah mezi impedancemi

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{n U_1}{\frac{1}{n} I_1} = n^2 Z_1,$$

potom

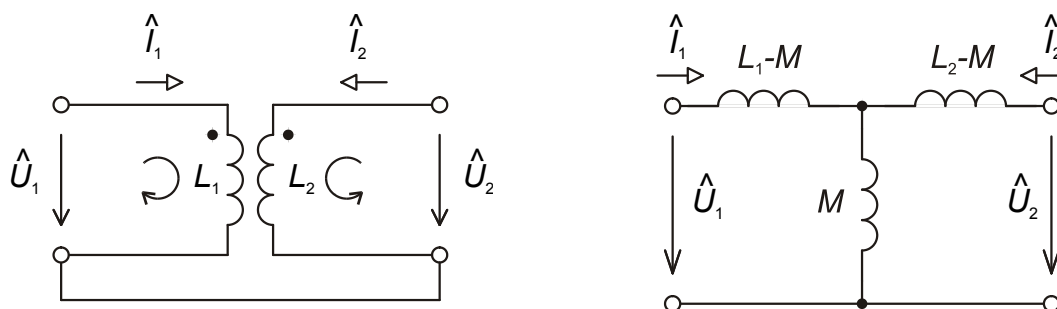
$$n = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}.$$

Převod n ideálního transformátoru je definován vztahem

$$n = \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

7.6. Náhrada magnetické vazby vazbou galvanickou

Dvě magneticky vázané cívky s propojenými souhlasnými svorkami je možno nahradit ekvivalentním T - článkem tak, aby se napěťové a proudové poměry vzhledem k vnějšímu obvodu nezměnily.



Obr. 7 Náhrada magnetické vazby vazbou galvanickou

Pro primární a sekundární cívku platí rovnice

$$\hat{U}_1 = j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2 \quad \text{doplníme o} \quad + j\omega M \hat{I}_1 - j\omega M \hat{I}_1$$

$$\hat{U}_2 = j\omega M \hat{I}_1 + j\omega L_2 \hat{I}_2 \quad \text{doplníme o} \quad + j\omega M \hat{I}_2 - j\omega M \hat{I}_2$$

a po jednoduché úpravě obdržíme

$$\hat{U}_1 = j\omega(L_1 - M)\hat{I}_1 + j\omega M(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)$$

$$\hat{U}_2 = j\omega(L_2 - M)\hat{I}_2 + j\omega M(\hat{I}_1 + \hat{I}_2),$$

což odpovídá náhradnímu zapojení T - článku. V modelu je magnetická vazba nahrazena přímou galvanickou vazbou větví s indukčností M . Induktory modelu nejsou vzájemně magneticky vázány. Indukčnosti $(L_1 - M)$, $(L_2 - M)$ a M jsou indukčnosti vlastní!

Při $M < L_1$ a $M < L_2$ jsou hodnoty indukčností $(L_1 - M)$ a $(L_2 - M)$ kladné a náhradní T - článek lze realizovat. Je-li však jedna indukčnost menší než vzájemná ($M > L_1$ nebo $M > L_2$), je jedna hodnota

indukčnosti modelu ($L_1 - M$ nebo $L_2 - M$) záporná a nelze ji realizovat. Je možné s ní při řešení obvodu počítat.



Text k prostudování

Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitola 3.3



Další studijní texty

Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitola 2.2



Příklady

1. Jeden závit cívky má indukčnost L . Určete celkovou indukčnost a) dvou závitů cívky, b) tří závitů cívky za předpokladu stejného směru vinutí a dokonalé indukční vazby, tj. $k = 1$.

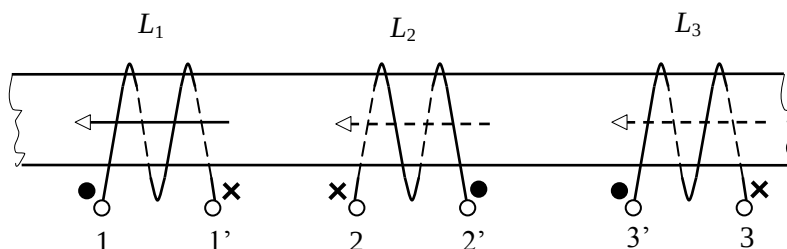
Řešení:

ad a) nejdříve určíme hodnotu vzájemné indukčnosti dvou samostatných závitů cívky $M'' = \sqrt{LL} = L$ a následně výslednou indukčnost $L'' = L + M'' + L + M'' = 4L$.

ad b) určíme hodnotu vzájemné indukčnosti mezi dvěma závity cívky a jedním závitem cívky $M''' = \sqrt{L''L} = \sqrt{4LL} = 2L$ a následně výslednou indukčnost

$L''' = L'' + M''' + L + M''' = 4L + 2L + L + 2L = 9L$. Celková indukčnost dvou závitů cívky je čtyřikrát větší a tří závitů cívky devětkrát větší než indukčnost jednoho závitu cívky, ale pouze za předpokladu dokonalé indukční vazby.

2. Určete souhlasné svorky cívek v technologickém výkresu viz obr. 8.



Obr. 8 Technologický výkres vinutí cívek

Řešení:

Nejdříve si zvolíme vztažnou (referenční) svorku (kteroukoliv) – např. 1 a označíme ji libovolným symbolem např. Vůči vztažné svorce pak určíme souhlasné svorky ostatních cívek 2', 3' a označíme je stejnými symboly. Obdobně bychom mohli zvolit jako vztažnou svorku některou z označených symbolů x a k ní určit souhlasné svorky, ale v jednom analyzovaném případě vždy uplatňujeme jen jeden systém.

3. V zadaném schématu zapojení (obr. 9) s napětovým zdrojem harmonického průběhu o kmitočtu ω určete napětí cívek L_4, L_1, L_3 .

Řešení:

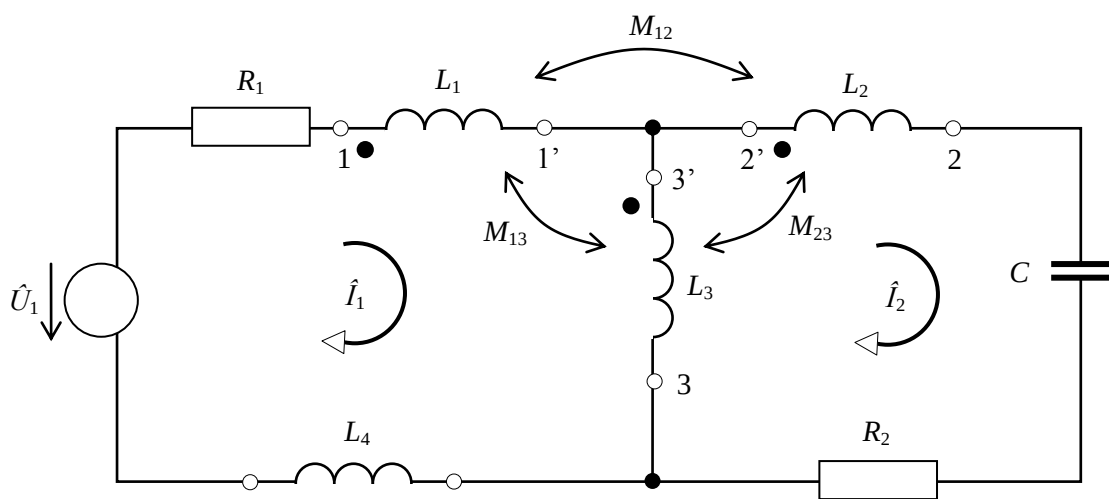
Přeneseme označení souhlasných svorek indukčně vázaných cívek z technologického výkresu a zvolíme libovolné směry počítacích šipek smyčkových proudů $\hat{I}_1, \hat{I}_2$.

Cívka L_4 není indukčně vázána s jinou cívkou, proto $\hat{U}_{L_4} = j\omega L_4 \hat{I}_1$.

V cívce L_1 se indukuje napětí vlastní indukčností L_1 průchodem proudu $\hat{I}_1$:

$j\omega L_1 \hat{I}_1$, vzájemnou indukčností M_{12} průchodem proudu $\hat{I}_2$ cívkou L_2 : $j\omega M_{12} \hat{I}_2$, vzájemnou indukčností M_{13} průchodem proudu $\hat{I}_1$ cívkou L_3 : $j\omega M_{13} \hat{I}_1$ a průchodem proudu $\hat{I}_2$ toutéž cívkou: $j\omega M_{13} \hat{I}_2$.

Indukovaná napětí mohou vykazovat jak kladná, tak i záporná znaménka. Určujeme je vůči smyčkovému proudu (v daném případě $\hat{I}_1$) podle souhlasných svorek např. postupem: Počítací šipka proudu $\hat{I}_1$ je orientována cívkou L_1 od souhlasné svorky,



Obr. 9 Schéma zapojení k příkladům

- počítací šipka proudu $\hat{I}_2$ je orientována cívkou L_2 stejně jako proud $\hat{I}_1$ cívkou L_1 , proto indukovanému napětí $j\omega M_{12} \hat{I}_2$ přiřadíme kladné znaménko,
- počítací šipka proudu $\hat{I}_1$ je orientována cívkou L_3 stejně jako proud $\hat{I}_1$ cívkou L_1 , proto indukovanému napětí $j\omega M_{13} \hat{I}_1$ přiřadíme kladné znaménko,
- počítací šipka proudu $\hat{I}_2$ je orientována cívkou L_3 stejně jako proud $\hat{I}_1$ cívkou L_1 , proto indukovanému napětí $j\omega M_{13} \hat{I}_2$ přiřadíme kladné znaménko. Potom

$$\hat{U}_{L1} = j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M_{12} \hat{I}_2 + j\omega M_{13} \hat{I}_1 - j\omega M_{13} \hat{I}_2.$$

Obdobně sestavíme rovnice pro napětí cívky L_3

- vůči smyčkovému proudu $\hat{I}_1$: $\hat{U}_{L3} = j\omega L_3 \hat{I}_1 - j\omega L_3 \hat{I}_2 + j\omega M_{13} \hat{I}_1 + j\omega M_{13} \hat{I}_2$
- vůči smyčkovému proudu $\hat{I}_2$: $\hat{U}_{L3} = -j\omega L_3 \hat{I}_1 + j\omega L_3 \hat{I}_2 - j\omega M_{13} \hat{I}_1 - j\omega M_{13} \hat{I}_2$.

4. V zadaném schématu zapojení (obr. 9) sestavte rovnice pro analýzu obvodu metodou smyčkových proudů.

Řešení:

pro smyčku 1:

$$R_1 \hat{I}_1 + j\omega(L_1 + L_3 + L_4)\hat{I}_1 - j\omega L_3 \hat{I}_2 + 2j\omega M_{13}\hat{I}_1 - j\omega M_{13}\hat{I}_2 + j\omega M_{23}\hat{I}_2 + j\omega M_{12}\hat{I}_2 - \hat{U} = 0$$

a pro smyčku 2:

$$R_2 \hat{I}_2 + j\omega(L_2 + L_3)\hat{I}_2 + \frac{\hat{I}_2}{j\omega C} - j\omega L_3 \hat{I}_1 - 2j\omega M_{23}\hat{I}_2 + j\omega M_{23}\hat{I}_1 - j\omega M_{13}\hat{I}_1 + j\omega M_{12}\hat{I}_1 = 0.$$

5. Rovnice sestavené v předchozím příkladu zobrazte orientačním názorovým diagramem napětí a proudů.

Řešení:

Pro zvýšení přehlednosti grafického zobrazení je vhodné zjednodušit zápis dílčích napětí smyčky 2 a označit

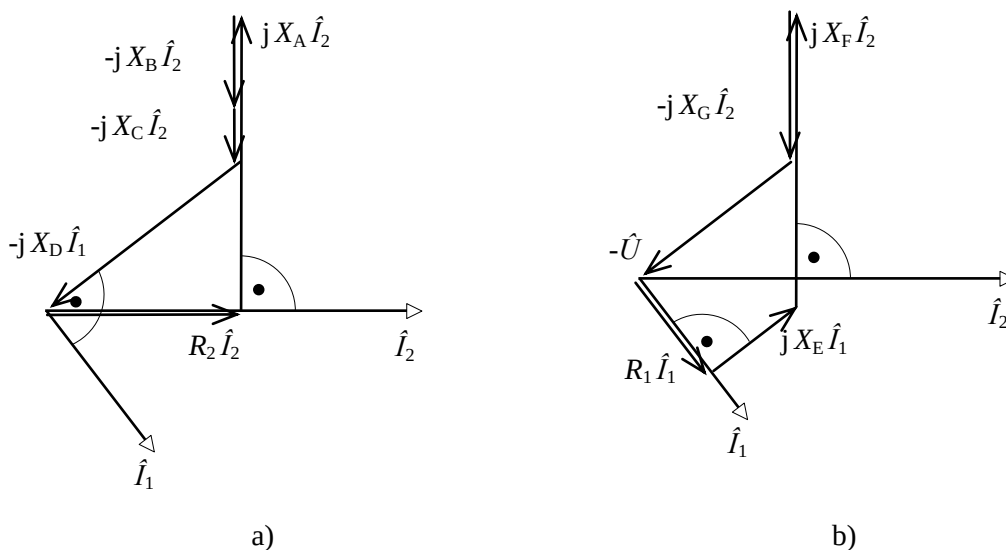
$$j\omega(L_2 + L_3)\hat{I}_2 = jX_A \hat{I}_2; -2j\omega M_{23}\hat{I}_2 = -jX_B \hat{I}_2; \frac{\hat{I}_2}{j\omega C} = -jX_C \hat{I}_2; j\omega(-L_3 + M_{23} - M_{13} + M_{12})\hat{I}_1 = -jX_D \hat{I}_1$$

a podobně pro napětí smyčky 1

$$j\omega(L_1 + L_3 + L_4)\hat{I}_1 = jX_E \hat{I}_1; 2j\omega M_{13}\hat{I}_1 = jX_F \hat{I}_2; j\omega(-L_3 + M_{23} - M_{13} + M_{12})\hat{I}_2 = -jX_G \hat{I}_2.$$

Nejdříve sestojíme názorový diagram pro smyčku 2 (obr. 10 a) – začneme fázorem proudu $\hat{I}_2$, který zakreslíme vodorovně, poté graficky sečteme všechna napětí, jenž jsou buzena proudem $\hat{I}_2$ a k ní přičteme všechna napětí buzená proudem $\hat{I}_1$ - jsou reprezentována fázorem $(-jX_D \hat{I}_1)$. Poloha tohoto fázoru je jednoznačně dána tím, že součet všech napětí smyčky 2 se rovná nule, proto tento fázor musí končit v počátku. Z jeho polohy určíme polohu fázoru proudu $\hat{I}_1$ smyčky 1. Protože jsme fázoru napětí $X_D \hat{I}_1$ přiřadili záporné znaménko, pak fázor proudu $\hat{I}_1$ je posunut vůči němu o $+90^\circ$. Kdybychom fázoru napětí $X_D \hat{I}_1$ přiřadili kladné znaménko, pak by byl fázor proudu $\hat{I}_1$ posunut vůči němu o -90° .

Konstrukci fázorového diagramu smyčky 1 (obr. 10 b) začneme přenesením fázorů proudů $\hat{I}_1$ a $\hat{I}_2$ z smyčky 2 do vytvářeného nového grafu a k nim sestojíme příslušná napětí. Jejich součet s napětím zdroje $\hat{U}$ se musí rovnat nule. Z toho jednoznačně vyplývá délka a poloha fázoru $\hat{U}$. Z délky úsečky tohoto fázoru a skutečné hodnoty napětí zdroje jednoznačně stanovíme měřítko napětí, které má rozměr volt/dílek.



Obr. 10 Fázorové diagramy napětí a proudů: a) 2 smyčky, b) 1 smyčky



Otázky

1. Uveďte počet obvodových parametrů, kterými charakterizujeme bezeztrátový transformátor.
2. Uveďte vztah mezi obvodovými parametry bezeztrátového transformátoru.
3. Uveďte počet obvodových parametrů, kterými charakterizujeme dokonalý transformátor.
4. Uveďte vztah mezi obvodovými parametry dokonalého transformátoru.
5. Uveďte konstantu charakterizující ideální transformátor.
6. Definujte konstantu charakterizující ideální transformátor.
7. Napište vztahy charakterizující primární a sekundární vinutí bezeztrátového transformátoru pro: a) zdánlivý výkon, b) napětí, c) proud, d) impedance.

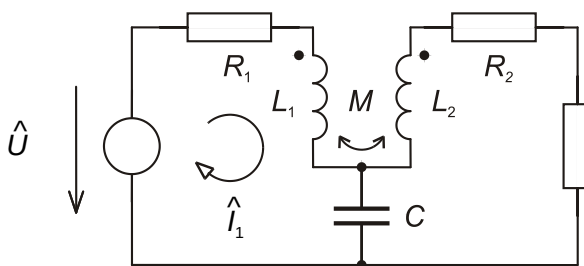


Odpovědi na otázky naleznete v 5. dávce.



Úlohy k řešení

1. Dvě cívky s vlastními indukčnostmi $L_1 = 20 \text{ mH}$ a $L_2 = 5 \text{ mH}$ vykazují činitel vzájemné vazby $k = 0,7$. Vypočítejte hodnotu vzájemné indukčnosti M a určete hodnotu výsledné indukčnosti jejich sériového zapojení pro: a) souhlasné, b) nesouhlasné směry magnetických toků.
2. Popište způsob určení souhlasných svorek v obr. 8 zvolíme-li svorku 2 jako referenční – označme ji např. x.
3. Označení souhlasných svorek z předchozího úkolu přeneste do schématu zapojení v obr. 9 a určete napětí cívek L_4, L_1, L_3 .
4. Nahraďte indukční vazbu dvou cívek vazbou galvanickou. Sestavte rovnice, vytvořte jejich obvodové modely a vypočítejte číselné hodnoty příslušných obvodových parametrů pro údaje z úkolu 1.
5. Určete kmitočet, při němž je napětí na neoznačeném rezistoru nulové (zapojení je tzv. Campbellův filtr). Řešte metodou smyčkových proudů.



Obr. 11 Schéma zapojení k zadání úkolu 5.

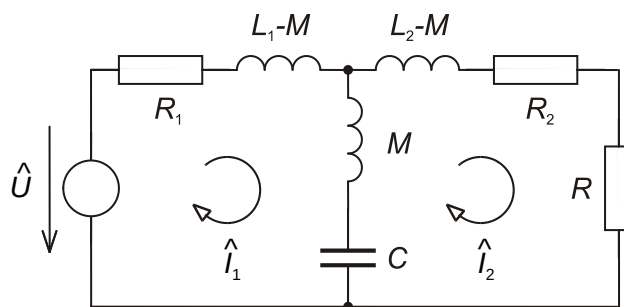


Klíč k řešení

1. Postup je obdobný jako v dávce 3.
2. Postup je obdobný jako v příkladu 2.
3. Postup je obdobný jako v příkladu 3.
4. Postup je obdobný jako v dávce 6.
5. Indukční vazbu nahradíme galvanickou (podle dávky 6) viz obr. 12. Napětí neoznačeného rezistoru s nenulovou hodnotou odporu R je přímo úměrné proudu (označme ho např. $\hat{i}_2$). Má-li být toto napětí nulové, pak i hodnota proudu $\hat{i}_2 = 0$ a to je možné pouze za předpokladu, když součet napětí

vzájemné indukčnosti M a kapacitoru C je roven nule, což je možné pouze tehdy, jsou-li tato napětí v protifázi – tedy v rezonanci.

Tento stav nastane při kmitočtu $\omega = 1/\sqrt{MC}$.



Obr.12 Schéma zapojení k řešení úkolu 5.



Autokontrola

Pokud jste reagovali správně na více jak polovinu podnětů z každé oblasti, pokračujte ve studiu jiné kapitoly, pokud ne, pak text studijní opory znovu prostudujte a opakovaně vypracujte odpovědi na podněty.



Zadání 7. samostatné práce

Vytvořte dvousmyčkový obvod obsahující jeden napěťový zdroj, jeden kapacitor, dva rezistory (v každé smyčce jeden) a čtyři induktory, z nichž jeden není s ostatními indukčně vázán. Libovolně zvolte souhlasné svorky indukčně vázaných cívek, metodou smyčkových proudů sestavte obvodové rovnice a nakreslete jejich názorový diagram.

Zpracoval: Jaromír Kijonka

8. ANALÝZA OBVODŮ S NELINEÁRNÍMI PRVKY



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

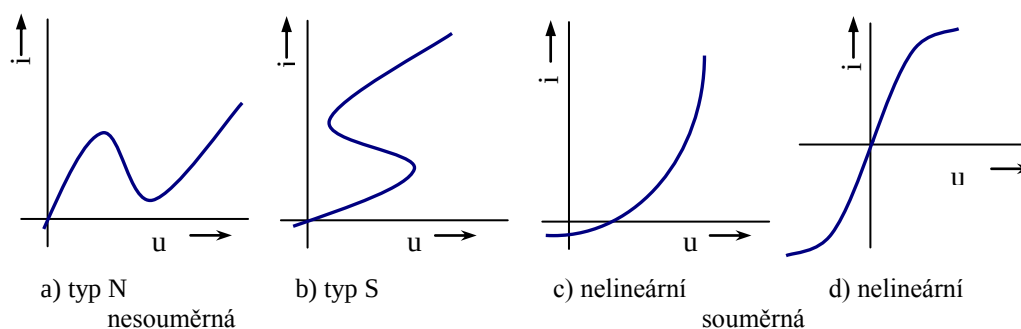
- rozpoznat lineární a nelineární část obvodu,
- řešit lineární část obvodu,
- určit pracovní bod nelineárního prvku,
- aproximovat nelineární charakteristiku,
- využít tyto znalosti k analýze obecného obvodu z oblasti aplikovaných elektrotechnických disciplín.



Výklad

V předchozích kapitolách jsme se zabývali lineárními obvody a jejich řešením. Zopakujme tedy, že lineární obvod obsahuje pouze lineární prvky. Lineární prvek je takový prvek, jehož parametry – odpor R a vodivost G jsou konstantní, nezávislé na velikosti působících napětí a proudů. Charakteristika lineárního prvku je přímka procházející počátkem. Připomeňme, že v lineárním obvodu platí princip superpozice.

Pokud obvod obsahuje alespoň jeden prvek s nelineární charakteristikou – viz obr. 1, je celý obvod hodnocen jako nelineární. V nelineárních obvodech **neplatí** princip superpozice!

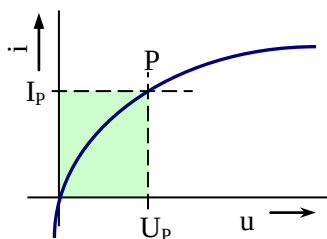


Obr. 1: Základní typy nelineárních ampérovoltových (AV) charakteristik

8.1. Definice základních pojmů

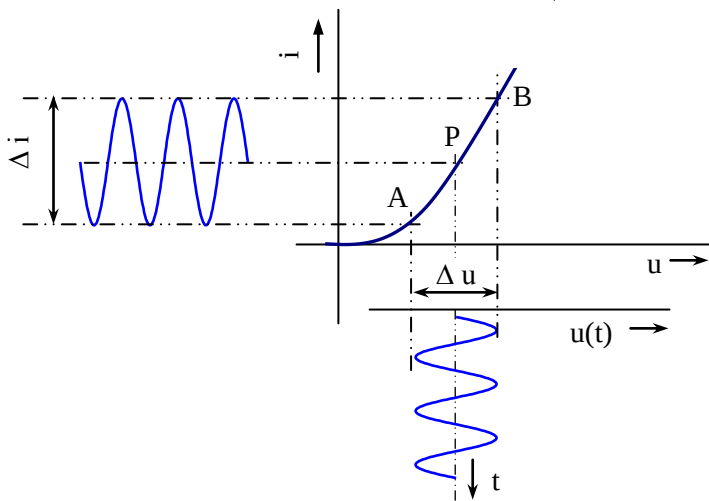
U nelineárních obvodů definujeme pojmy: pracovní bod, pracovní oblast charakteristiky, statický odpor R_s (statická vodivost G_s) a diferenciální (diferenční) odpor R_d (diferenciální vodivost G_d)

Pracovní bod: známe-li nelineární charakteristiku, můžeme ke každé hodnotě obvodové veličiny určit odpovídající hodnotu druhé veličiny – této dvojici bodů říkáme pracovní bod $P = [U_p, I_p]$ – viz obr. 2.



Obr. 2: Definice pracovního bodu P

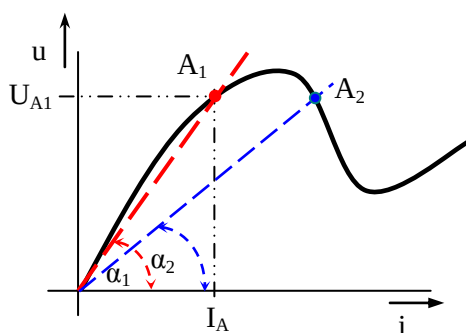
Pracovní oblast charakteristiky: definujeme jako vzdálenost mezi body $\overline{AB}$ – viz obr.3



Obr. 3: Definice pracovní oblasti charakteristiky

Statický odpor: je definován stejně jako odpor lineárního prvku – viz obr. 4. Jeho velikost však není **konstantní**, pro každý bod charakteristiky je různý. Hodnota statického odporu je vždy kladná.

$$R_s = u/i \quad \text{resp.} \quad G_s = i/u \quad \Rightarrow$$



Obr. 4: Definice statického odporu nelineárního prvku

$$R_{s1} = \frac{U_{A1}}{I_{A1}} = \frac{m_U}{m_I} = k \cdot \tan \alpha_1$$

kde

m_U je měřítko napětí (např. V/cm)

m_I je měřítko proudu (např. A/cm)

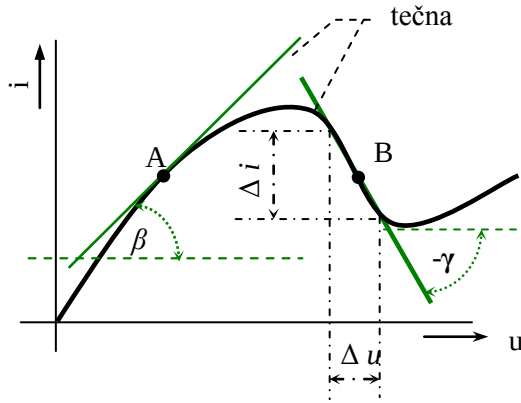
α_1 je úhel, který svírá spojnice bodu A s počátkem

Pomocí těchto parametrů můžeme vyjádřit i okamžitou hodnotu výkonu:

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2$$

Pro pracovní bod **P**, o souřadnicích U_p, I_p – obr. 2, je tento výkon úměrný vyznačené ploše.

Diferenciální odpor: je závislý na poloze klidového pracovního bodu a je určený sklonem tečny k charakteristice v daném bodě. V klesající části charakteristiky je záporný, ve stoupající části je kladný – obr. 5.



Obr. 5: Definice diferenciálního R_d a diferenčního R_{Δ} odporu nelineárního prvku

$$R_{dA} = \frac{du}{di} = \frac{m_u}{m_i} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad R_{dB} \doteq R_{\Delta B} = \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{m_u}{m_i} \cdot \operatorname{tg}(-\gamma)$$

kde m_u, m_i – měřítko napětí a proudu,

β – úhel, který svírá směřnice tečny k charakteristice v daném bodě

8.2. Analýza nelineárních obvodů

Analýza nelineárních obvodů představuje složitější problém než analýza lineárních obvodů. V nelineárních obvodech neplatí princip superpozice, platí zde Kirchhoffovy zákony, které spolu s popisem nelineárních prvků umožňují popsat každý nelineární obvod soustavou nelineárních algebraických nebo transcendentních rovnic. Tvar těchto rovnic závisí především na způsobu popisu charakteristik nelineárního prvku, který může být dán buď analytickým výrazem nebo grafem či tabulkou naměřených hodnot.

Metody analýzy nelineárních obvodů můžeme rozdělit do tří základních skupin: *metody analytické, grafické a numerické*. Každá z uvedených metod má své výhody a nevýhody. Hlavní výhodou analytických metod je možnost získání obecných výsledků s přesností daných charakteristik. Nevýhodou je omezení jejich použití pouze na případy, v nichž jsou algebraické a transcendentní rovnice analyticky řešitelné. Grafické metody jsou výhodné pro svou názornost a pro přímé zpracování graficky zadaných nebo naměřených charakteristik skutečných nelineárních prvků. Nevýhodou je jejich omezená přesnost daná kvalitou grafických konstrukcí a nemožnost získání obecných výsledků. Numerické metody využívají výpočetní techniky a jejího programového vybavení. Tyto metody dosahují vysoké přesnosti výsledků analýzy, ale opět nedávají obecné výsledky, každá změna musí být řešena samostatně.

8.3. Aproximace nelineárních charakteristik

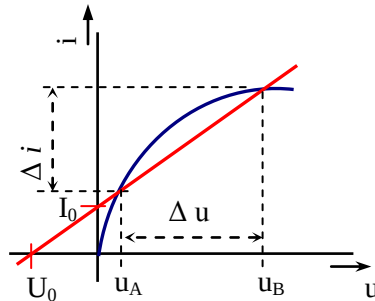
Charakteristiky skutečných nelineárních prvků jsou zpravidla dány grafem nebo tabulkou naměřených hodnot. Při řešení analytických a numerických metod potřebujeme vyjádřit tyto charakteristiky nebo jejich části ve formě analytických výrazů.

Nejobvyklejší postup při získávání aproximačních analytických výrazů je, že změřenou charakteristiku nahradíme vhodným matematickým modelem spolu s určením všech jeho parametrů. Základní matematické aproximace nelineárních charakteristik jsou:

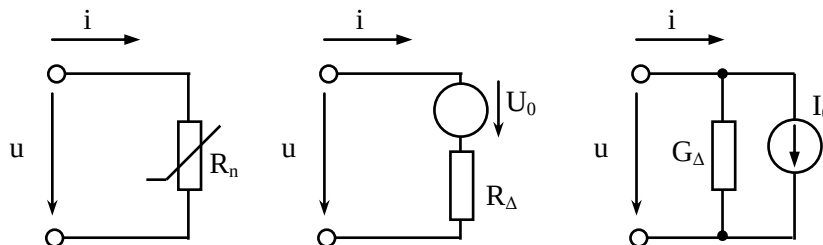
Linearizace:

Náhradou charakteristiky nelineárního rezistoru přímkou linearizujeme charakteristiku v celé pracovní oblasti diferenčními parametry R_Δ , G_Δ , U_0 , I_0 . Můžeme použít všech principů a metod analýzy a syntézy lineárních obvodů. Je zřejmé, že tato linearizace nebere do úvahy nelineární vlastnost prvku a hodí se pouze pro přibližné řešení obvodů s nepodstatnými nelinearitami.

Nejjednodušší aproximací nelineární charakteristiky je linearizace v určité pracovní oblasti tj.



Obr. 6: Linearizace charakteristiky v pracovní oblasti



Obr. 7: Náhradní zapojení nelineárního rezistoru při linearizaci v pracovní oblasti

v určitém okolí pracovního bodu – viz obr. 6.

Aproximační přímku lze popsat rovnicí

$$u = U_0 + R_\Delta i \quad \text{nebo} \quad i = I_0 + G_\Delta u$$

kde

U_0 a I_0 jsou souřadnice průsečíků aproximační přímky se souřadnicovými osami

$$R_\Delta = \frac{u_B - u_A}{i_B - i_A} = \frac{\Delta u}{\Delta i} = G_\Delta^{-1}$$

Tzn., že přibližnou náhradou nelineárního rezistoru v uvažované pracovní oblasti je sériové zapojení lineárního rezistoru R_Δ a napěťového zdroje U_0 nebo paralelní zapojení lineárního rezistoru o vodivosti G_Δ a zdroje proudu I_0 – viz obr. 7. Je-li pracovní oblast jen malá část charakteristiky, takže ji můžeme

s dostatečnou přesností nahradit úsečkou – tečnou v pracovním bodě, pak hodnoty diferenčních parametrů R_Δ a G_Δ jsou velmi blízké hodnotám diferenciální odporu a vodivosti v uvažovaném pracovním bodě.

Hlavní výhodou linearizace je jednoduchost použitého modelu. Model obsahuje pouze aktivní a pasivní lineární prvky a tudíž můžeme využít všech metod analýzy lineárních obvodů.

V závislosti na tvaru charakteristiky můžeme někdy použít tzv. *linearizace po úsecích*. Charakteristiku rozdělíme v tomto případě do několika oblastí a v každé z nich ji nahradíme úsečkou s příslušnou směrnicí. Náhradní charakteristikou je pak lomená čára složená z přímkových úseků. Je zřejmé, že přesnost aproximace roste s počtem úseků a tím i počet řešených rovnic. Roste ale i složitost analýzy, která spočívá hlavně ve stanovení hranic platnosti jednotlivých úseků.

Aproximace mocninnými funkcemi

Tato aproximace využívá obecnou mocninu ve tvaru

$$y = ax^b = ax^{m/n}$$

kde m, n jsou celá čísla.

Uvedená funkce má pouze dva neznámé koeficienty, takže stačí znalost dvou bodů pro jejich určení pomocí interpolační metody (např. proud vakuovou diodou v oblasti prostorového náboje vyjádříme vztahem $i = au^{3/2}$).

Aproximace exponenciálními polynomy:

Exponenciální polynom

$$y = a_0 + a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + \dots + a_n e^{b_n x} = \sum_{k=0}^n a_k e^{b_k x}$$

je vhodný v řadě praktických případů. Zpravidla vystačíme se dvěma nebo třemi členy polynomu (např. VA charakteristika polovodičové diody má tvar $i = I_0(e^{u/U_T} - 1)$).

Aproximace transcendentními funkcemi:

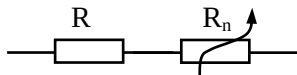
Některé typy nelineárních charakteristik lze aproximovat různými transcendentními funkcemi obsahující některé konstanty jako parametry, např.

$$y = a \cdot \arctg bx, \quad y = a \cdot \sinh bx, \quad y = a \cdot \tgh bx$$

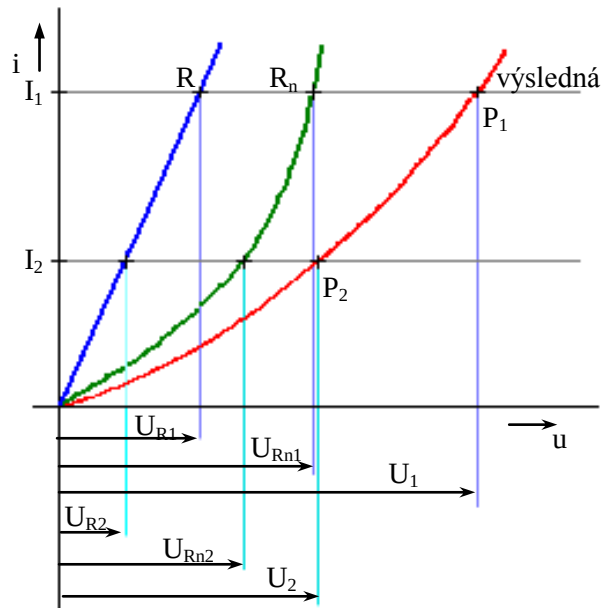
8.4. Grafické řešení lineárních obvodů

Jednoduché odporové obvody mohou být graficky analyzovány metodou postupného zjednodušování stejně jako lineární obvody. Místo výpočtů náhradních odporů pro sériové a paralelní zapojení rezistorů musíme postupně sčítat (sestrojovat) jednotlivé charakteristiky dokud nedostaneme výslednou charakteristiku.

a) Řešení sériového řazení rezistorů



Řešením je zkonstruování výsledné charakteristiky sériově řazených rezistorů. Do jednoho obrázku nakreslíme obě dvě charakteristiky. V sériovém zapojení (např. lineárního rezistoru R a nelineárního rezistoru R_n) opakovaně sčítáme pořadnice napětí při zvolených proudech.



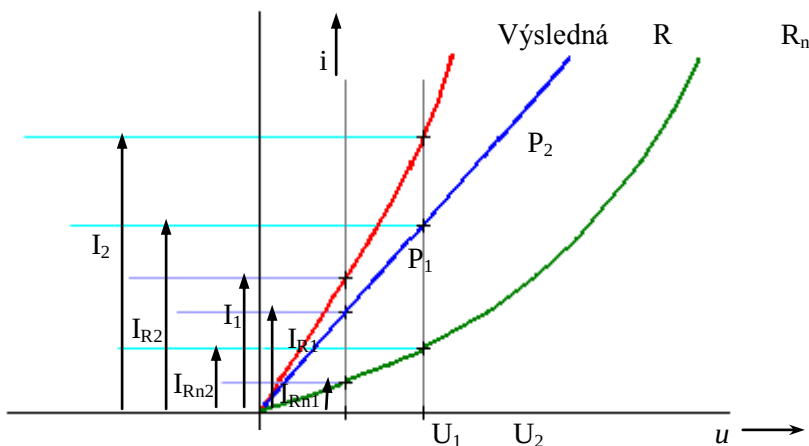
Obr. 8: Metoda postupného zjednodušování pro sériové řazení rezistorů

Platí: $U_1 = U_{R_1} + U_{R_{n1}} \quad U_2 = U_{R_2} + U_{R_{n2}}$

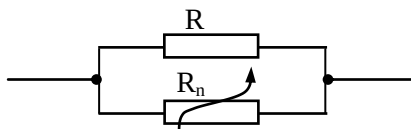
b) Řešení paralelního řazení rezistorů

Řešením je opět zkonstruování výsledné charakteristiky paralelního zapojení rezistorů. Nejprve nakreslíme do obrázku V-A charakteristiky obou rezistorů. Protože v paralelním obvodu je na obou součástkách stejné napětí, získáme body výsledné charakteristiky součtem proudů rezistorů pro zvolené hodnoty napětí.

Platí: $I_1 = I_{R_1} + I_{R_{n1}} \quad I_2 = I_{R_2} + I_{R_{n2}}$



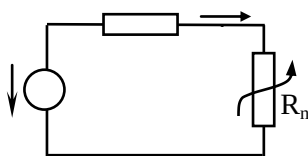
Obr. 9: Metoda postupného zjednodušování pro paralelní řazení součástek



c) Určení pracovního bodu nelineární součástky graficko-početní metodou

Nelineární obvody obsahující pouze jeden nelineární rezistor lze vždy zjednodušit použitím Théveninovy věty na obvod obsahující pouze jeden napěťový zdroj U_0 , lineární rezistor R_i a daný nelineární prvek – např. R_n – viz obr. 10.

Volbou statického (klidového) pracovního bodu volíme i určité pracovní podmínky činnosti součástky. Pracovní bod je určen stejnosměrným pracovním napětím U_{P1} a procházejícím stejnosměrným proudem I_{P1} . Nastavit požadovaný pracovní bod P_1 znamená přivést do (na) součástky(u) odpovídající veličiny z napájecího zdroje.



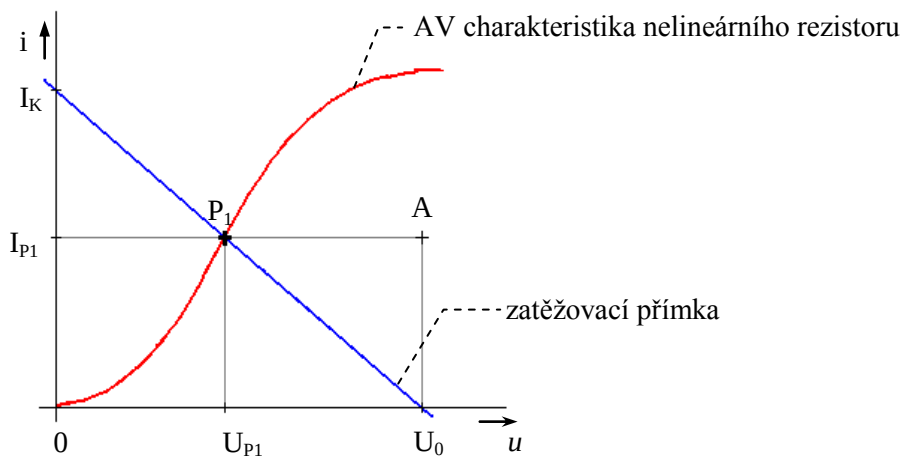
Obr. 10: Náhradní zapojení obvodu s jedním nelineárním rezistorem

Pracovní bod určíme pomocí *zatěžovací přímky*. V průsečíku zatěžovací přímky a nelineární VA charakteristiky je pracovní bod P. Zatěžovací přímku určíme ze stavu:

naprázdno: – (odpor R_n je odpojen, proud procházející obvodem $I = 0$) na výstupu obvodu je napětí $U = U_0$

nakrátko: – (odpor R_n je zkratován) proud procházející obvodem je nyní

$$I_K = \frac{U_0}{R_i}$$



Obr. 11: Určení pracovního bodu nelineárního rezistoru

- Výkon, který dodává do obvodu napájecí zdroj se pro bod P_1 rovná $P = U_0 \cdot I_{P1}$. Graficky se tento výkon rovná ploše obdélníku 0, U_0 , A, I_{P1} .
- Výkon nelineární součástky R_n se rovná součinu $P = U_{P1} \cdot I_{P1}$. Graficky je tento výkon dán ploše obdélníku 0, U_{P1} , P_1 , I_{P1} .
- výkon rezistoru R_1 se rovná součinu $P = (U_0 - U_{P1}) \cdot I_{P1}$. Graficky je dán plochou obdélníku U_{P1} , U_0 , A, P

**Text k prostudování**

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitoly 4.4 až 4.7

**Další studijní texty**

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitola 16.3

**Otázky**

1. Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.
2. Který obvod je nelineární?
3. Kdy použijeme k řešení obvodu principu superpozice?
4. Proč používáme k řešení nelineárních obvodů Théveninovu (Nortonovu) větu?
5. Jak určíme pracovní bod nelineárního prvku?

**Odpovědi naleznete v [1] na**

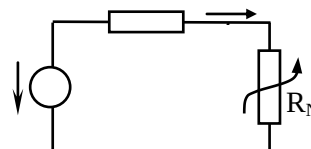
str. 15 (1. otázka), str. 83 (2. otázka), str. 79 (3. otázka), str. 95 (4. otázka).

**Úlohy k řešení**

1. (2 body) Proud, který protéká obvodem je 0,5 A. Určete napětí zdroje U , jsou-li zadány VA charakteristiky prvků (řešte graficky):

VA charakteristika odporu R :

U (V)	0	3	5
I (mA)	0	3	5



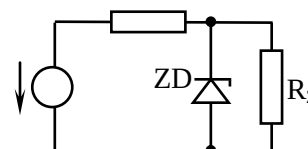
VA charakteristika nelineárního odporu R_N :

U (V)	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1
I (mA)	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	0	0,6	2

2. (6 bodů) Stabilizátor stejnosměrného napětí je napájen stejnosměrným napětím $U = 20$ V. Rezistory R a R_Z mají hodnotu 500Ω . Určete pracovní bod stabilizační diody (Théveninovou větou – 4 body). Stanovte výkon P rozptýlený diodou (2 body). VA charakteristika diody je dána tabulkou.

AV charakteristika Zenerovy diody

I (mA)	-1	-10	-20	-30	-40	-50
U (V)	-4,5	-5,30	-5,65	-5,95	-6,15	-6,30

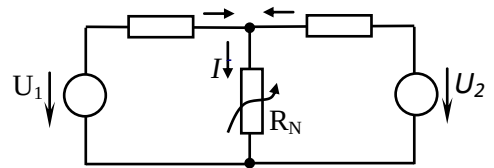


3. (5 bodů) Určete proud procházející nelineárním prvkem, jsou-li zadány hodnoty $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $U_1 = 42 \text{ V}$, $U_2 = 30 \text{ V}$. Nelineární prvek je zadán VA charakteristikou (řešte analyticky).

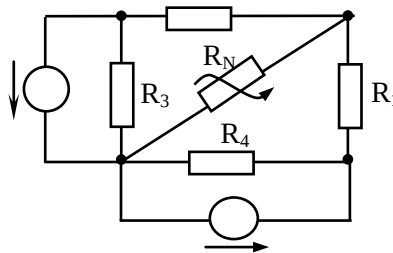
$I_1 \quad I_2$

VA charakteristika nelineárního odporu R_N :

U (V)	0	2	3	4	5	6
I (mA)	0	12	20	35	52	70

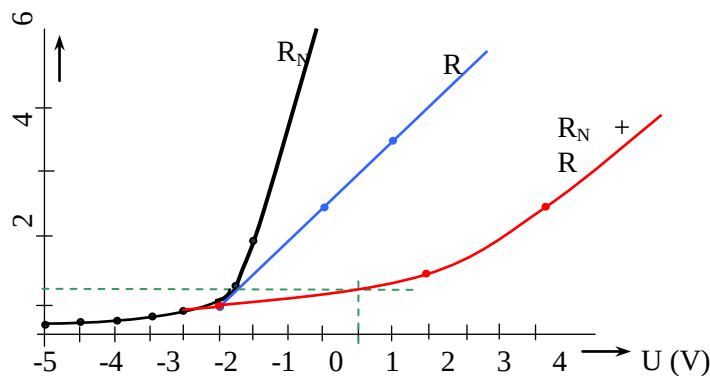


4. (8 bodů) Nalezněte pracovní bod nelineárního prvku a stanovte jeho ztrátový výkon. Linearizujte v pracovním bodě nelineární prvek a určete parametry náhradního zapojení. (Řešte pomocí principu superpozice a Théveninovou (Nortonovou) větou).

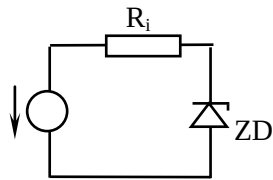


Klíč k řešení

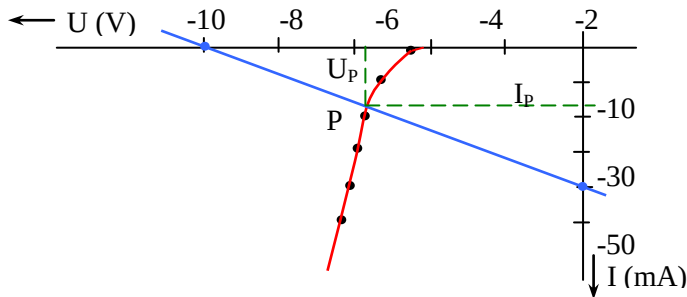
1. Podle Kirchhoffova zákona sčítáme napětí na jednotlivých prvcích (1 bod). Protéká-li obvodem proud $I = 0,5 \text{ A}$, je napětí zdroje $U = 4 \text{ V}$ (1 bod).



2. Lineární část obvodu nahradíme pomocí Théveninovy věty – U_0 , R_i (2 body). Nakreslíme AV charakteristiku stabilizační (Zenerovy) diody. Ze stavu naprázdno a nakrátko určíme zatěžovací přímku – pracovní bod (2 body), ztrátový výkon diody P_{ZD} (2 body).



$$U_0 = R_Z \cdot \frac{U}{R + R_Z} = 10 \text{ V} \quad R_i = \frac{R \cdot R_Z}{R + R_Z} = 250 \Omega$$



$$\mathbf{P} = [-5, 8]$$

$$P_{ZD} = U_P \cdot I_P = 85,84 \text{ mW}$$

3. VA charakteristiku nelineárního odporu aproximujeme vhodnou křivkou – parabolou $\rightarrow U = k \cdot I^2$ (musí platit, že obě křivky musí procházet dvěma společnými body – počátkem souřadnicového hodu a dalším bodem – např. A – viz obrázek) – 1 bod.

a) Z obrázku určíme konstantu (1 bod)

$$k: \quad k = \frac{U_A}{I_A^2} = \frac{60}{5,5^2} = 2$$

b) Pomocí Kirchhoffových zákonů napíšeme rovnice (3 body):

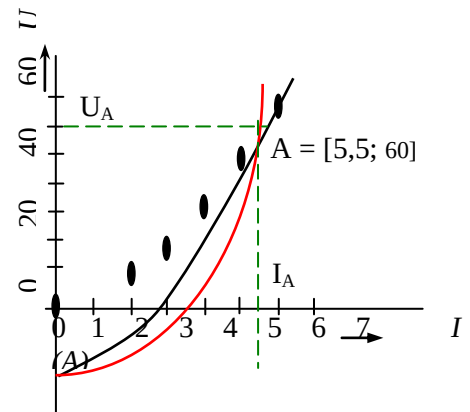
$$(1) \quad I_1 + I_2 - I = 0$$

$$R_1 I_1 + k \cdot I^2 = U_1$$

$$R_2 I_2 + k \cdot I^2 = U_2$$

z rovnic vyjádříme proudy I_1 a I_2 ,
hodnoty dosadíme do vztahu (1)

$$I_1 = 3,62 \text{ A}, \quad I_2 = 3,16 \text{ A}, \quad I_3 = 0,46 \text{ A},$$



4. Nejprve nahradíme lineární část obvodu pomocí Théveninovy (nebo Nortonovy) věty náhradním napětovým zdrojem U_0 a k němu do série řazeným odporem R_i . (4 body). Ze stavu naprázdno a nakrátko v náhradním schématu určíme zatěžovací přímku a pracovní bod (2 body).

$$\text{naprázdno:} \quad I = 0 \rightarrow U = U_0 = 5 \text{ V}$$



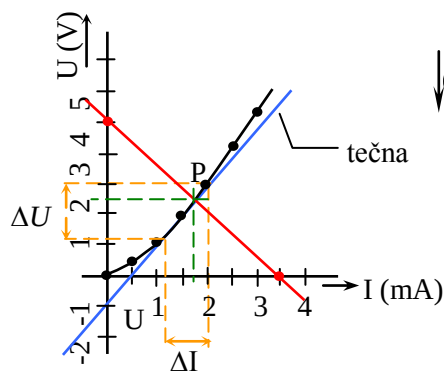
bod A

$$\text{nakrátko:} \quad U = 0 \rightarrow I = U_0 / R_i = 3,5 \text{ V}$$

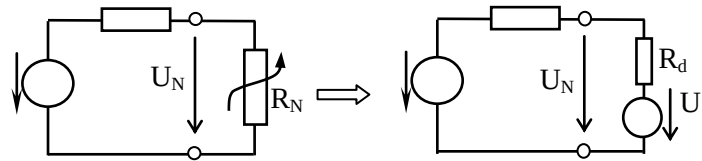


bod B

Linearizace – tečna v pracovním bodě P – nelineární odpor R_N nahradíme lineárním modelem – sériovým zapojením diferenčního odporu R_d a napětovým zdrojem U (2 body).



Výkon nelineárního prvku R_N :



$$R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{3 - 1,2}{2 - 1,1} = 2 \Omega$$

U – odečteno z grafu – -1 V

$$I_N = \frac{U_0 - U}{R_d + R_i} = \frac{5 - (-1)}{2 + 1,42} = 1,75 \text{ A}$$

$$U_N = R_d \cdot I_N + U = 2 \cdot 1,75 + (-1) = 2,5 \text{ V}$$

$$\text{Výkon nelin. prvku } R_N: P = U_N \cdot I_N = 1,75 \cdot 2,5 = 4,375 \text{ W}$$



Autokontrola

Pokud jste získali z kontrolních otázek a příkladů alespoň **15** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.



Zadání 8. samostatné práce

Nelineární prvek je aproximován charakteristikou $i = 4u^3 - 3u$. Určete proudovou odezvu na napětí $u = \cos \omega t \text{ V}$, vypočtete okamžitý výkon, stanovte dynamickou vodivost a uveďte vlastnosti nelineárního prvku (usměrňovač, dělič nebo násobič kmitočtu, kmitočtový filtr).

Zpracovala: Jitka Mohylová

9. ANALÝZA OBVODŮ S NEHARMONICKÝMI PRŮBĚHY VELIČIN, VÝKONY



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

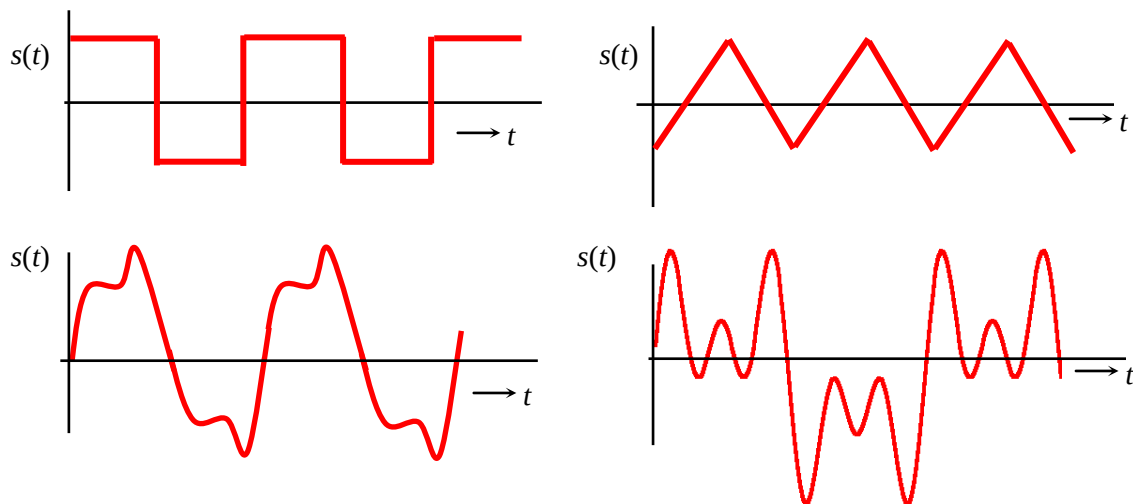
- harmonickou analýzu periodických průběhů (Fourierův rozvoj)
- aplikovat Duhamelův integrál,
- určit efektivní hodnotu neharmonické veličiny
- určit hodnoty výkonů,
- řešit obvody s neharmonickým napájením,
- využít tyto znalosti k analýze obecného obvodu z oblasti aplikovaných elektrotechnických disciplín.



Výklad

Doposud jsme se zabývali harmonickými průběhy obvodových veličin – mění se periodicky s časem s konstantní amplitudou. Ideální harmonické průběhy se v technické praxi vyskytují poměrně málo. Velmi časté jsou naopak periodicky se opakující nesinusové průběhy různých tvarů – viz. obr.1. Původ neharmonických veličin v obvodech je dvojí:

- samotný zdroj napájí lineární obvod neharmonickým periodickým napětím resp. proudem (v oznamovací technice jsou všechny veličiny, které přenáší zprávu neharmonické)
- neharmonické veličiny vznikají v nelineárních obvodech – tyto obvody napájíme ze zdroje harmonického napětí (proudu), ale všechny odvozené veličiny jsou neharmonické.



9.1. Harmonická analýza – Fourierův rozvoj

Libovolnou periodickou funkci (neharmonickou veličinu) můžeme rozložit na konstantu a řadu harmonických funkcí s obecně nekonečným počtem členů. V praxi je počet členů vždy omezen.

Periodické průběhy můžeme vyjádřit pomocí Fourierovy řady jak v časové tak ve frekvenční oblasti.

Fourierovou řadou k periodickému signálu $s(t)$, která představuje funkci obecně komplexní, (s periodou T_0 , $T_0 > 0$, a s opakovacím kmitočtem $f_0 = 1/T_0$, který má v intervalu T_0 konečný počet extrémů a nespojitostí), rozumíme nekonečnou řadu

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk2\pi t/T_0} \quad -\infty < t < \infty$$

kde c_k jsou komplexní Fourierovy koeficienty definované vztahem

$$c_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-jk2\pi t/T_0} dt \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Zápis Fourierovy řady pro reálné průběhy $s(t)$ pak je:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi t}{T_0}\right) + b_k \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi t}{T_0}\right) \right] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t]$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

kde koeficienty Fourierovy řady jsou

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos k\omega_1 t dt \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin k\omega_1 t dt$$

Fourierovu řadu lze také vyjádřit ve tvaru

$$s(t) = F(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

kde $A_0 = \frac{a_0}{2}$ stejnosměrná složka

A_1 první (základní) harmonická složka

$A_{2,3,\dots}$ vyšší harmonické složky

Pro k -tou harmonickou složku máme

$$A_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) = a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t$$

Vyjádríme sinus součtu argumentů na levé straně rovnice a obě strany rovnice srovnáme. Má-li rovnice platit pro kterékoliv t , amplitudy odpovídajících složek se musí rovnat:

$$A_k \cos \varphi_k \sin k\omega_1 t = b_k \sin k\omega_1 t,$$

$$A_k \sin \varphi_k \cos k\omega_1 t = a_k \cos k\omega_1 t$$

Proto

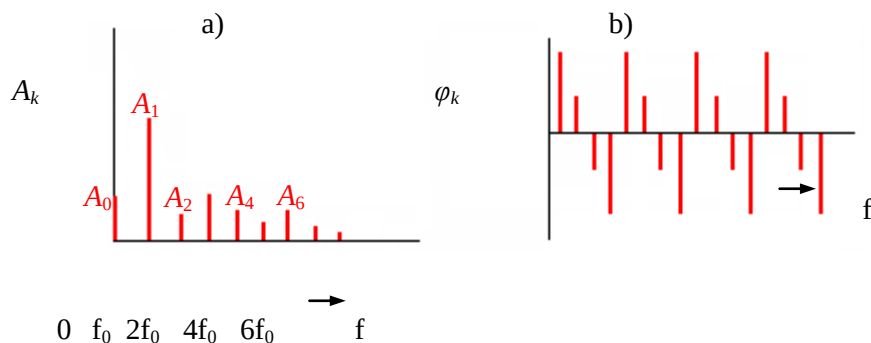
$$A_k \cos \varphi_k = b_k, \quad A_k \sin \varphi_k = a_k$$

Pro fázi k -té harmonické složky proto dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{\sin \varphi_k}{\cos \varphi_k} = \frac{a_k}{b_k}$$

a její amplituda je $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

Posloupnost amplitud A_k jednotlivých harmonických složek se nazývá amplitudové spektrum, posloupnost počátečních fází φ_k je fázové spektrum. Graf amplitudového spektra je důležitější, protože ukazuje **rozložení energie signálu v závislosti na kmitočtu**. Amplitudové spektrum je jednoznačně svázáno s tvarem signálu a nezávisí např. na volbě časového okamžiku, který pokládáme za počátek periody. Amplitudové spektrum signálu se také poměrně snadno experimentálně zjišťuje. Průběh fázového spektra naproti tomu se mění se změnou volby počátku periody a nemá takovou vypovídací schopnost jako spektrum amplitudové.



Obr. 1: a) amplitudové spektrum, b) fázové spektrum

Sečtením všech členů nekonečné Fourierovy řady dostaneme původní periodický průběh. Jestliže počet členů v součtu omezíme (zanedbáme členy s vyššími kmitočty), pak se k původnímu průběhu pouze přiblížíme. Velikost odchylky závisí na tom, jakou část celkové energie signálu nesou zanedbané členy.

9.2. Některé zvláštní případy Fourierova rozvoje

Jestliže periodický signál $s(t)$ vykazuje určitou symetrii, zjednoduší se výpočet koeficientů Fourierovy řady.

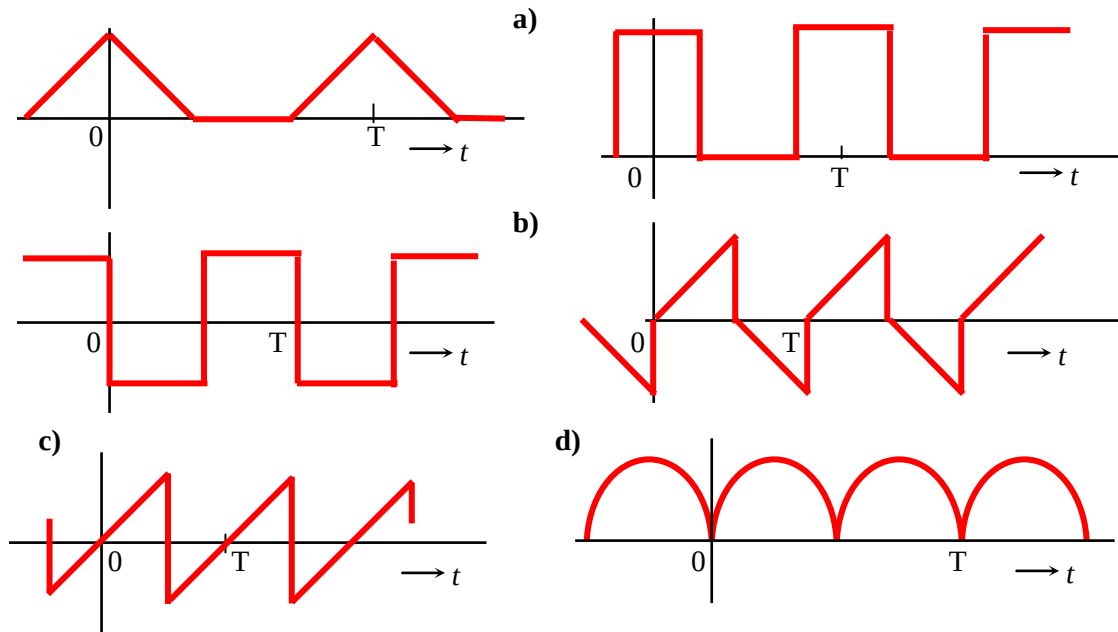
1. $s(t)$ je lichá funkce času, tj. $s(-t) = -s(t)$,
průběh je středově symetrický podle počátku souřadnic – obr. 2. Fourierův rozvoj neobsahuje kosinové složky, protože ty jsou sudými funkcemi času. Také stejnosměrná složka je nulová. Proto všechny koeficienty

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. $s(t)$ je sudá funkce času, tj. $s(-t) = +s(t)$,
průběh je symetrický podle svislé osy – obr. 2.
V tomto případě vymizí sinové složky rozvoje a proto všechny koeficienty

$$b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

3. $s(t)$ je antisymetrická funkce, tj. $s(t+T_0/2) = -s(t)$,
průběh se ve druhé polovině periody opakuje s opačným znaménkem – obr. 2.
Fourierův rozvoj obsahuje pouze liché harmonické složky (obecně sinové i kosinové), neobsahuje stejnosměrnou složku.
4. $s(t)$ se ve druhé polovině periody opakuje se stejným znaménkem – obr. 2..
Fourierův rozvoj obsahuje pouze sudé harmonické (v obecném případě včetně stejnosměrné složky).

Obr. 2: Příklady průběhů $s(t)$

9.3. Efektivní hodnota periodického neharmonického průběhu

Napájíme-li periodickým neharmonickým proudem rezistor, přeměňuje se v rezistoru elektrická energie v teplo. Efektivní hodnotu pak definujeme jako odmocninu ze střední hodnoty kvadrátu proudu během jedné periody, tj.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt}.$$

Dosadíme-li za okamžitou hodnotu proudu jeho Fourierův rozvoj

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

Pak pro efektivní hodnotu proudu dostaneme výraz

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \dots} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots},$$

kde

$I_1, I_2, I_3, \dots$ jsou efektivní hodnoty harmonických složek.

V případech, kdy první harmonická má rozhodující vliv na celkovou efektivní hodnotu periodického průběhu, používáme k posouzení váhy vyšších harmonických složek tzv. **činitele neharmonického zkreslení**.

Ten definujeme jako podíl efektivní hodnoty vyšších harmonických (obvykle nežádaných) k efektivní hodnotě základní harmonické, tj.

$$k = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1}.$$

Tento činitel snadno vypočítáme, známe-li Fourierův rozvoj signálu. Při experimentálním měření činitele zkreslení potřebujeme zvláštním filtrem potlačit základní harmonickou složku a pomocí jiného filtru naopak potlačit všechny vyšší harmonické. (K měření hodnot pro čitatele i jmenovatele zlomku musíme vždy použít měřicí přístroj, pro který je výslovně uvedeno, že měří efektivní hodnotu – často se označuje anglickou zkratkou "True RMS".)

Poněkud snadněji se měří činitel neharmonického zkreslení, definovaný jako

$$k' = 100 \cdot \sqrt{\frac{I_2^2 + I_3^2 + \dots}{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}} = 100 \cdot \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \quad [\%]$$

Ve jmenovateli výrazu pro k' je efektivní hodnota celého průběhu, kterou snadno změříme bez nutnosti filtrace. Vzhledem k tomu, že obvykle jde o činitele zkreslení řádu nejvýše několika procent, rozdíl mezi oběma definicemi je srovnatelný s chybou, které se při měření dopustíme.

9.4. Efektivní hodnota periodického neharmonického průběhu

Periodické napětí a proud vyjádříme pomocí Fourierových řad ve tvaru

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \zeta_k), \quad a \quad i(t) = I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} I_{ml} \sin(l\omega_1 t + \psi_l)$$

kde

$$\begin{aligned} u_0(t) &= U_0 & u_k(t) &= \sqrt{2} \cdot U_k \sin(k\omega_1 t + \zeta_k) \\ i_0(t) &= I_0 & i_l(t) &= \sqrt{2} \cdot I_l \sin(l\omega_1 t + \psi_l) \end{aligned}$$

dosazením do základního vztahu pro *okamžitý výkon* $p = u(t) \cdot i(t)$ pak dostaneme:

$$p = u(t) \cdot i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_k(t) \cdot i_l(t)$$

Pro praxi má největší význam *činný výkon*, definovaný jako střední hodnota okamžitého výkonu

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad [\text{W}] \\ P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_k(t) i_l(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{2} \cdot U_k \sin(k\omega_1 t + \zeta_k) \sqrt{2} \cdot I_l \sin(l\omega_1 t + \psi_l) dt \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot U_k \cdot \sqrt{2} \cdot I_l}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos[(k-l)\omega_1 t + \zeta_k - \psi_l] - \cos[(k+l)\omega_1 t + \zeta_k + \psi_l] \} dt \end{aligned}$$

pro $k \neq l$ je tato střední hodnota rovna nule a pro $k = l$ je dána výrazem

$$P = U_k I_k \cos(\zeta_k - \psi_k) = U_k I_k \cos \varphi_k$$

kde

$$\varphi_k = \zeta_k - \psi_k \quad \text{je fázový posun obou průběhů.} \Rightarrow$$

Činný výkon neharmonického napětí a proudu je roven součtu činných výkonů jednotlivých harmonických:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k \quad [\text{W}]$$

Pro periodické napětí a proud definujeme také:

Jalový výkon jako součet jalových výkonů jednotlivých harmonických, tj.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \quad [\text{var}]$$

Zdánlivý výkon pro periodické napětí a proud stejného kmitočtu je dán součinem efektivních hodnot, tj.

$$S = UI = \sqrt{\left(U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2 \right)} \cdot \sqrt{\left(I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2 \right)} \quad [\text{VA}]$$

Obecně platí že $S^2 \geq P^2 + Q^2$. Tato nerovnost může být změněna v rovnici doplněním dalšího členu na pravou stranu:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

kde D je tzv. *deformační výkon*. Tato rovnice je pro něj definiční - $D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$



Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitoly 8.1 až 8.4

[2] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 2. Skriptum ČVUT Praha 1999; kapitola 2



Další studijní texty

[3] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 9



Otázky

1. Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.
2. Jak je definována amplituda, perioda, fáze?
3. Jak je definována efektivní hodnota neharmonické veličiny?
4. Kdy využijeme Duhamelův integrál?
5. Jak určíme účinný, činný, jalový, zdánlivý a deformační výkon?



Odpovědi naleznete na

str.149 v [1] (1.otázka), str.227 v [1] (2.otázka), str. 32 v [2] (3.otázka), str.230 v [1] (4.otázka).

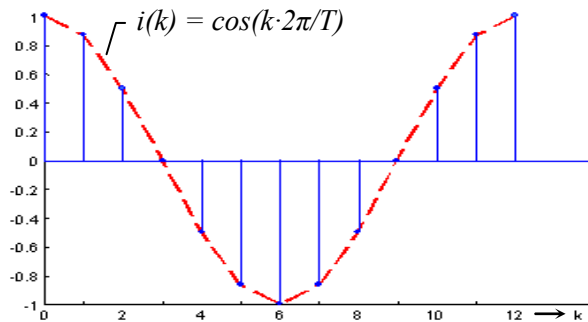


Úlohy k řešení

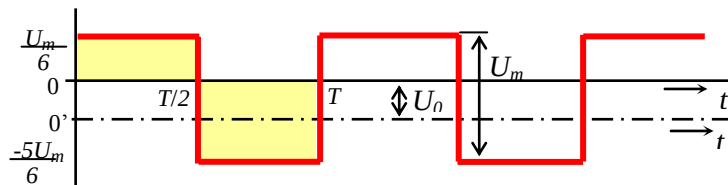
1. (4 body) Pro harmonickou veličinu $i(k) = \cos(k \cdot 2\pi/T)$, $T_v = 1$ ms vypočtěte:
 - a) amplitudu, opakovací periodu (kmitočet)
 - b) efektivní hodnotu

c) střední hodnotu kladné půlvlny

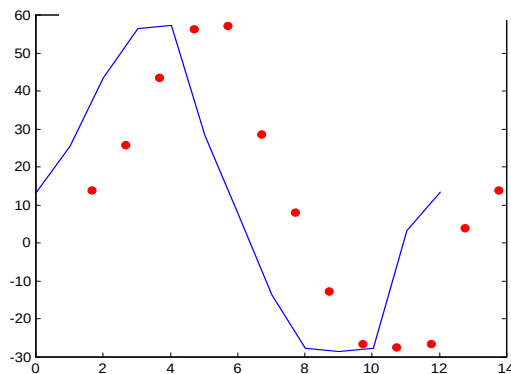
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$i(k)$	1	0,866	0,5	0	-0,5	-0,866	-1	-0,866	-0,5	0	0,5	0,866	1	...



2. (10 bodů) Vyjádřete Fourierův rozvoj v obou tvarech a nakreslete amplitudové spektrum obdélníkového kmitavého průběhu z obrázku (řešte matematickou analýzou).

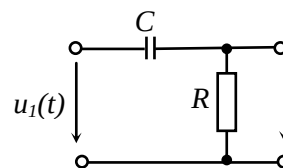


3. (8 bodů) Vyjádřete numerickou metodou oba tvary Fourierova rozvoje až po 4. harmonickou. Naměřený průběh proudu $i(t)$ je na obrázku.



Z grafu odečteme hodnoty:

$$\begin{aligned}
 i_0 &= 13 \text{ mA} & i_6 &= 7 \text{ mA} \\
 i_1 &= 25 \text{ mA} & i_8 &= -14 \text{ mA} \\
 i_2 &= 43 \text{ mA} & i_9 &= -28 \text{ mA} \\
 i_3 &= 56 \text{ mA} & i_{10} &= -29 \text{ mA} \\
 i_4 &= 57 \text{ mA} & i_{11} &= -28 \text{ mA} \\
 i_5 &= 28 \text{ mA} & i_{12} &= 13 \text{ mA}
 \end{aligned}$$



4. (6 bodů) Z obvodu na obrázku určete pomocí

$$u_1(t) = U \cdot e^{-kt}$$

Duhamelova integrálu $u(t)$, je-li $u(t)$

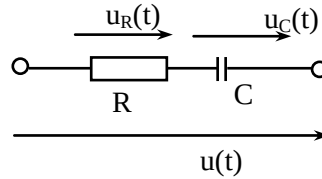
5. (7 bodů) Spotřebič je připojen na nesinusový průběh napětí $u(t)$ a teče jím proud $i(t)$. Vypočtěte: efektivní hodnotu napětí a proudu, činný, jalový, zdánlivý, deformáční výkon a účinník při napětí:

$$u(t) = 30 + 20\sin(\omega t + 30^\circ) + 10\sin(2\omega t + 70^\circ) + 12\sin(3\omega t + 60^\circ) + 6\sin(5\omega t + 75^\circ) \text{ V}$$

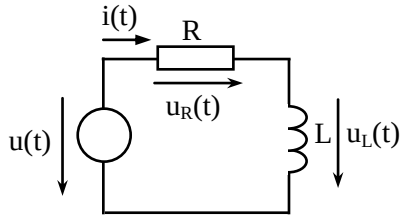
a proudu:

$$i(t) = 5 + 4\sin(\omega t - 60^\circ) + 6\sin(2\omega t + 10^\circ) + 3\sin(3\omega t - 60^\circ) + 2\sin(5\omega t + 30^\circ) \text{ A}$$

6. (5 bodů) Určete hodnotu napětí zdroje $u(t)$ z obrázku a jeho efektivní hodnotu a činný výkon zdroje, je-li zadáno: $u_c(t) = 10 + 20\sin(100t) \text{ V}$, $R = 100 \Omega$, $C = 300 \mu\text{F}$. Obvod řešte pomocí obecných veličin.



7. (10 bodů) Určete okamžité hodnoty napětí na jednotlivých prvcích a efektivní hodnotu proudu odebíraného ze zdroje. Napětí zdroje $u(t) = 20 + 50\sin\omega t + 10\sin(3\omega t + \pi/6)$. Obvod řešte principem superpozice symbolicko-komplexní metodou.



Klíč k řešení

1. Amplituda $I_m = 1$, $N = 12$, $T = N \cdot T_v = 12$ ms, $f = 1/T = 83,3$ Hz, $I_{ef} = \sqrt{\sum_{k=0}^{11} i_k^2} / N = 0,707$ A,

$$I_+ = [s(9) + s(10) + s(11) + s(0) + s(1) + s(2)] / 6 = 0,622 \text{ A} \quad (4 \text{ body})$$

2. a) Průběh lze popsat: $F(t) = u(t) = U_m/6$ pro $t \in \langle 0, T/2 \rangle$ a $u(t) = -5U_m/6$ pro $t \in \langle T/2, T \rangle$. Pro zjednodušení výpočtu posuneme časovou osu t do polohy t' . Nový průběh je souměrný podle $0'$ a signál se opakuje vždy po půlperiodě s opačným znaménkem – Fourierova řada obsahuje pouze liché sinové složky a stejnsměrnou složku (2 body).

b) určení členů Fourierovy řady (4 body).

$$\text{Stejnsměrná složka: } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T/2} \frac{U_m}{6} dt + \int_{T/2}^T \frac{-5U_m}{6} dt \right\} = \frac{-U_m}{3} = U_0$$

Sinové složky:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} \frac{U_m}{6} \sin n\omega t dt + \int_{T/2}^T \frac{-5U_m}{6} \sin n\omega t dt \right\} = \left| \text{dosadíme: } \omega = 2\pi/T \right| = \frac{2U_m(1 - \cos n\pi)}{2n\pi} \text{ je-li } n$$

liché $\rightarrow n = 2k-1$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$ je $\cos(2k-1)\pi = -1$ a proto $b_{2k-1} = 2U_m/(2k-1)\pi$

je-li n sudé $\rightarrow n = 2k$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$ je $\cos 2k\pi = 1$ a proto $b_{2k} = 0$

složkový tvar obdélníkového průběhu z obrázku tedy je:

$$u(t) = \frac{-U_m}{3} + \frac{2U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

c) vyjádření Fourierova rozvoje (5 bodů): $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

$$A_0 = -U_m/3, \quad \varphi_0 = \pi/2$$

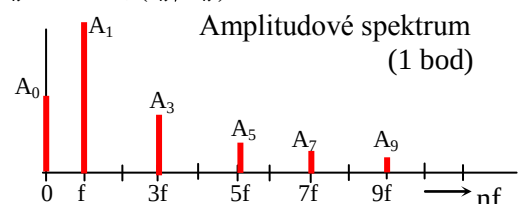
$$A_{2k-1} = b_{2k-1} = \frac{2U_m}{\pi(2k-1)}, \quad \varphi_{2k-1} = 0$$

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \sin(2k-1)\omega t$$

$$\varphi_k = -\arctg(b_k/a_k)$$



Amplitudové spektrum
(1 bod)



3. Periodu $T = 2\pi$ rozdělíme na c stejných dílků $\Delta\alpha = 2\pi/c$. $n = 4 \rightarrow c \geq 2n + 2$ (n = harmonic-ká) volíme $c = 12$. Výpočet jednotlivých harmonických složek určíme ze vztahů: (4 body)

$$a_0 = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{k=c} i_k, \quad a_n = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{k=c} i_k \cos n\alpha_k, \quad b_n = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{k=c} i_k \sin n\alpha_k, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = -\arctg(b_k/a_k)$$

$$a_0 = \frac{1}{12} (13 + 25 + 43 + 56 + 57 + 28 + 7 - 14 - 28 - 29 - 28 + 3) = 11,1 \text{ mA}$$

$$a_1 = \frac{2}{12} (i_1 \cos 30^\circ + i_2 \cos 60^\circ + i_3 \cos 90^\circ + \dots + i_{11} \cos 330^\circ + i_{12} \cos 360^\circ) = 1,86 \text{ mA}$$

$$b_1 = \frac{2}{12} (i_1 \sin 30^\circ + i_2 \sin 60^\circ + i_3 \sin 90^\circ + \dots + i_{11} \sin 330^\circ + i_{12} \sin 360^\circ) = 42 \text{ mA}$$

$$A_1 = \sqrt{1,85^2 + 42^2} = 42,04 \quad \varphi_1 = -\arctg 42/1,85 = -87^\circ 30'$$

$$a_2 = \frac{2}{12} (i_1 \cos 2 \cdot 30^\circ + i_2 \cos 2 \cdot 60^\circ + i_3 \cos 2 \cdot 90^\circ + \dots + i_{11} \cos 2 \cdot 330^\circ + i_{12} \cos 2 \cdot 360^\circ) = -1,33 \text{ mA}$$

$$b_2 = \frac{2}{12} (i_1 \sin 2 \cdot 30^\circ + i_2 \sin 2 \cdot 60^\circ + i_3 \sin 2 \cdot 90^\circ + \dots + i_{11} \sin 2 \cdot 330^\circ + i_{12} \sin 2 \cdot 360^\circ) = -4,9 \text{ mA}$$

$$A_2 = 5,08 \quad \varphi_2 = 105^\circ 10' \quad \text{atd.}$$

Fourierův rozvoj pomocí sinových a kosinových složek (1 bod):

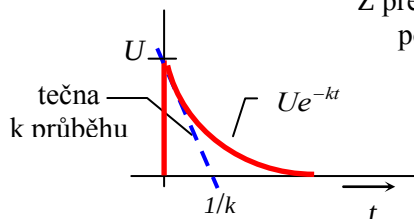
$$i(t) = 11,1 + 1,86 \cos \omega_0 t - 1,33 \cos 2\omega_0 t + 3,33 \cos 3\omega_0 t + 0,67 \cos 4\omega_0 t + \\ + 42 \sin \omega_0 t - 4,9 \sin 2\omega_0 t - 3,5 \sin 3\omega_0 t - 0,87 \sin 4\omega_0 t$$

druhý tvar Fourierova rozvoje (1 bod):

$$i(t) = 11,1 + 42,1 \cos(\omega_0 t - 87^\circ 30') - 5,08 \cos(2\omega_0 t + 105^\circ 10') + 4,82 \cos(3\omega_0 t + 46^\circ 20') + 1,09 \cos(4\omega_0 t + 52^\circ 25')$$

4.

Z předchozího učiva známe odezvu na jednotkový skok, použijeme druhý tvar Duhamelova integrálu: (6 bodů)



$$u(t) = u(0_+) u^*(t) + \int_0^t u'(t-\xi) \cdot u^*(t-\xi) d\xi \quad (\tau = RC)$$

$$u(t) = Ue^{-kt} \quad u'(t) = -kUe^{-kt} \quad u^*(t) = e^{-t/RC} \quad u(0_+) = U$$

$$u(t) = Ue^{-t/RC} + \int_0^t -kUe^{-k\xi} \cdot e^{-(t-\xi)/RC} d\xi = Ue^{-t/\tau} - kUe^{-t/\tau} + \int_0^t e^{-k\xi/\tau} \cdot e^{\xi/\tau} d\xi = \quad (1)$$

$$Ue^{-t/\tau} - kUe^{-t/\tau} \int_0^t e^{\xi(1-k)/\tau} d\xi = Ue^{-t/\tau} - \frac{kUe^{-t/\tau}}{1/\tau - k} \left[e^{t(\frac{1}{\tau} - k)} - 1 \right] = \frac{U}{k\tau - 1} \cdot (k\tau \cdot e^{-kt} - e^{-t/\tau}) =$$

Pro $k\tau = 1 \Rightarrow k = 1/\tau \Rightarrow$ použijeme-li úpravy integrálu (1) dostaneme:

$$u(t) = Ue^{\frac{-t}{\tau}} - kUe^{\frac{-t}{\tau}} \underbrace{\int_0^t e^{\xi \cdot 0} d\xi}_1 = U \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \text{ V}$$

Podle vztahu $X = \sqrt{X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2}$ určíme efektivní hodnotu napětí a proudu (2 body):

$$U = \sqrt{30^2 + \frac{20^2}{2} + \frac{10^2}{2} + \frac{12^2}{2} + \frac{6^2}{2}} = 35,2 \text{ V}$$

$$I = \sqrt{5^2 + \frac{4^2}{2} + \frac{6^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{2^2}{2}} = 6,9 \text{ A}$$

Výkony (4 body)

$$P = \sum_{k=0}^n U_k \cdot I_k \cdot \cos \varphi_k \Rightarrow P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_5 \quad Q = \sum_{k=1}^n U_k \cdot I_k \cdot \sin \varphi_k \Rightarrow Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_5$$

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^n U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n I_k^2} \Rightarrow S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_5 \quad P_d = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$P = 30 \cdot 5 + \frac{20 \cdot 4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \cos 90^\circ + \frac{10 \cdot 6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \cos 60^\circ + \frac{12 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \cos 60^\circ + \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = 178,25 \text{ W}$$

$$Q = \frac{20 \cdot 4}{2} \cdot \sin 90^\circ + \frac{10 \cdot 6}{2} \cdot \sin 60^\circ + \frac{12 \cdot 3}{2} \cdot \sin 60^\circ + \frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \sin 45^\circ = 85,85 \text{ var}$$

$$S = 35,2 \cdot 6,9 = 242 \text{ VA}$$

$$P_d = \sqrt{242^2 - 178,25^2 - 85,85^2} = 139 \text{ vad}$$

účinník (1 bod)

$$\cos \varphi_k = \frac{\sum_{k=0}^n U_k \cdot I_k \cdot \cos \varphi_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^n U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n I_k^2}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{178,25}{242} = 0,736$$

5. V obvodu musíme určit proud, pak napětí na rezistoru. Výsledné napětí je dáno součtem dílčích napětí (3 body).

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot \frac{d[10 + 20 \sin 100t]}{dt} = C \cdot 100 \cdot \cos 100t = 0,6 \cos 100t \text{ A}$$

$$u_R(t) = R \cdot i = 60 \cdot \cos 100t \text{ V}$$

$$u(t) = 10 + 20 \sin 100t + 60 \cdot \cos 100t \text{ V}$$

efektivní hodnota napětí (1 bod):

$$U = \sqrt{10^2 + \frac{20^2}{2} + \frac{60^2}{2}} = 45,82 \text{ V}$$

činný výkon (2 body):

$$u(t) = 10 + 20 \sin 100t + 60 \cdot \cos 100t = 10 + 20 \cos(100t - \pi/2) + 60 \cdot \cos 100t$$

$$P = \frac{0,6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{60}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,6}{\sqrt{2}} = 18 \text{ W} \quad P = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = 100 \cdot 0,6^2/2 = 18 \text{ W}$$

6. Určíme impedanci $\hat{Z}$ obvodů (1 bod):

$$\hat{Z}(k\omega) = R + j\omega L \Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + (k\omega L)^2} \cdot e^{j \arctg \frac{k\omega L}{R}} = |\hat{Z}(k\omega)| \cdot e^{j\varphi(k\omega)}$$

Určíme hodnotu proudu $i(t) = \frac{u(t)}{|\hat{Z}(k\omega)| \cdot e^{j\varphi(k\omega)}}$ (3 body):

$$i(t) = \frac{20}{R} + \frac{50}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right) + \frac{10}{\sqrt{R^2 + (3\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{3\omega L}{R}\right)$$

Napětí na jednotlivých prvcích (5 bodů):

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = 20 + \frac{50 \cdot R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right) + \frac{10 \cdot R}{\sqrt{R^2 + (3\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{3\omega L}{R}\right)$$

$$u_L(t) = \omega L \cdot i(t) = \frac{50 \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right) + \frac{10 \cdot 3 \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + (3\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{3\omega L}{R}\right)$$

Efektivní hodnota proudu (1 bod):

$$I = \sqrt{\left(\frac{20}{R}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{R^2 + (3\omega L)^2}}\right)^2}$$



Autokontrola

Pokud jste získali z kontrolních otázek a příkladů alespoň **37** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.



Zadání 9. samostatné práce

Při napájení ze zdroje harmonického průběhu napětí $u = 300 \sin \omega t$ V prochází odporníkem o odporu $R = 120 \, \Omega$ jednocestně usměrněný proud. Nakreslete obvodové schéma, označte v něm veličiny, graficky zobrazte časové průběhy proudu, napětí, výkonu a určete hodnotu činného výkonu každého obvodového prvku. Uveďte jakými stavy modelujeme usměrňovač.

Zpracovala: Jitka Mohylová

10. URČOVÁNÍ PARAMETRŮ A IMITANCÍ TECHNICKÝCH PRVKŮ; EKVIVALENCE, JOULEOVO TEPLA



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl: Po prostudování textu této studijní podpory budete umět:

- modelovat skutečné technické (reálné) prvky obvodů pomocí prvků ideálních,
- určovat imitance technických prvků,
- konstruovat fázorové diagramy aktivních a reaktivních složek napětí, proudu, výkonu a imitancí,
- definovat činitel jakosti a ztrátový úhel,
- sestavovat náhradní schémata technických prvků,
- rozlišovat provozní parametry,
- určovat Jouleovo teplo vodičů,
- navrhovat opatření na snížení ztrát ve vodičích.



Výklad

Náhradní schémata pasivních prvků

Znamé (zadané, změřené) okamžité hodnoty harmonických průběhů obvodových veličin – napětí $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$ a proudu $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I)$ jednoznačně reprezentujeme fázorem $\hat{U} = U e^{j\varphi_U}$ a $\hat{I} = I e^{j\varphi_I}$. Pro harmonický průběh veličiny $v(t)$ platí mezi efektivní hodnotou V a amplitudou V_m vztah

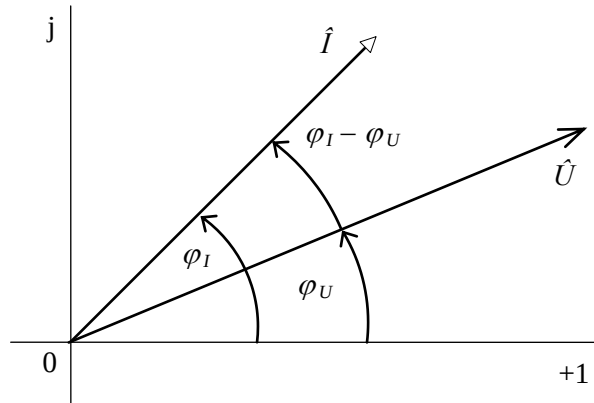
$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}.$$

Fázory zobrazujeme ve zvoleném měřítku napětí m_U a proudu m_I . Takové zobrazení nazýváme fázorový diagram, např. obr. 1.

Je-li splněna podmínka $-90^\circ \leq \varphi_I - \varphi_U \leq 90^\circ$,

pak lze jednoznačně modelovat obvodové veličiny součtem aktivní a reaktivní složky imitance. Imitance má charakter:

- induktivní pro $-90^\circ \leq \varphi_I - \varphi_U < 0^\circ$,
- kapacitní pro $0^\circ < \varphi_I - \varphi_U \leq 90^\circ$,
- odporový pro $\varphi_I - \varphi_U = 0^\circ$.



Obr. 1 Fázorový diagram obvodových veličin.

10.1. Imittance

Podíl efektivních hodnot obvodových veličin nazýváme imittance.

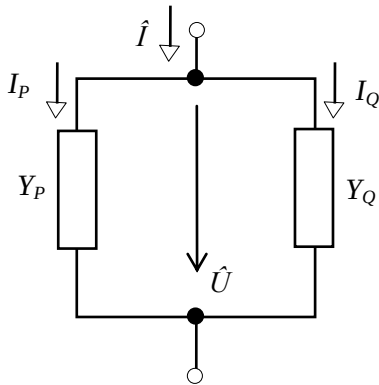
a) Podíl proudu a napětí nazýváme admittance

$$\frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \hat{Y} = \frac{I e^{j\varphi_I}}{U e^{j\varphi_U}} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_I - \varphi_U)} = Y e^{j\varphi_Y} = Y(\cos \varphi_Y + j \sin \varphi_Y) =$$

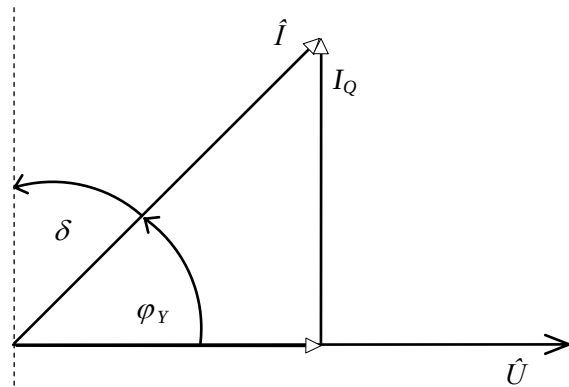
$$= \operatorname{Re}\{\hat{Y}\} + j \operatorname{Im}\{\hat{Y}\} = Y_P + j Y_Q \quad ,$$

$$\text{kde } \cos \varphi_Y = \frac{\operatorname{Re}\{\hat{Y}\}}{Y}, \quad \sin \varphi_Y = \frac{\operatorname{Im}\{\hat{Y}\}}{Y}.$$

Fáze admittance je definovaná výrazem $\varphi_Y = \varphi_I - \varphi_U$ (obr. 1, obr. 3). Admittance je normování proudu napětím. Admittancí modelujeme paralelním zapojením aktivní Y_P a reaktivní Y_Q složky admittance (obr. 2), které charakterizujeme aktivní $I_P = Y_P U$ a reaktivní $I_Q = Y_Q U$ složkou proudu. Ve fázorovém diagramu složek proudu zakreslíme aktivní složku proudu ve fázi s řídícím fázorem napětí, kdežto reaktivní složku proudu kolmo na fázor napětí. Měřítka napětí a proudu jsou totožná s měřítky použitými ve fázorovém diagramu obvodových veličin v obr. 1. Zvolíme-li měřítko admittance $m_Y = m_I U^{-1}$, pak záměnou písmena I písmenem Y v obr. 3 obdržíme fázorový diagram složek admittance.



Obr. 2 Obvodový model admittance



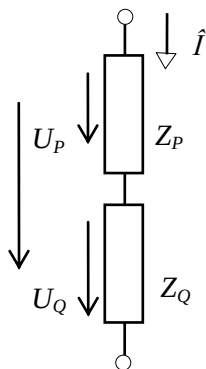
Obr. 3 Fázorový diagram složek proudu

b) Podíl napětí a proudu nazýváme impedance

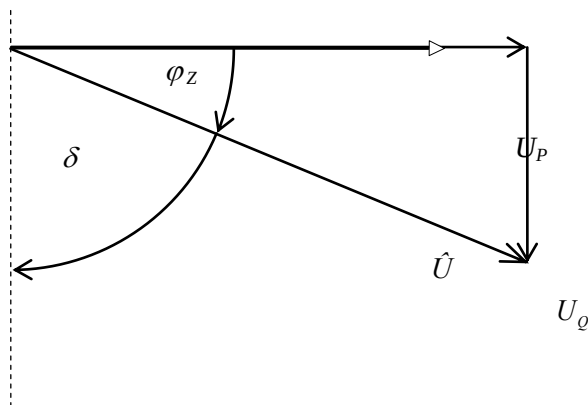
$$\begin{aligned}\frac{\hat{U}}{\hat{I}} &= \hat{Z} = \frac{U e^{j\varphi_U}}{I e^{j\varphi_I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = Z e^{j\varphi_Z} = Z(\cos \varphi_Z + j \sin \varphi_Z) = \\ &= \operatorname{Re}\{\hat{Z}\} + j \operatorname{Im}\{\hat{Z}\} = Z_P + j Z_Q ,\end{aligned}$$

$$\text{kde } \cos \varphi_Z = \frac{\operatorname{Re}\{\hat{Z}\}}{Z}, \quad \sin \varphi_Z = \frac{\operatorname{Im}\{\hat{Z}\}}{Z}.$$

Fáze impedance je definovaná výrazem $\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$ (obr. 5). Impedance je normování napětí proudem. Impedanci modelujeme sériovým zapojením aktivní Z_P a reaktivní Z_Q složky impedance (obr. 4), které charakterizujeme aktivní $U_P = Z_P I$ a reaktivní $U_Q = Z_Q I$ složkou napětí. Ve fázorovém diagramu složek napětí (obr. 5) zakreslíme aktivní složku napětí ve fázi s řídícím fázorem proudu, kdežto reaktivní složku napětí kolmo na fázor proudu. Zvolíme-li měřítko impedance $m_Z = m_U I^{-1}$, pak záměnou písmene U písmenem Z v obr. 5 obdržíme fázorový diagram složek impedance.



Obr. 4 Obvodový model impedance



Obr. 5 Fázorový diagram složek napětí

10.2. Výkon

Komplexní hodnotu výkonu $\hat{P}$ určíme:

a) normujeme-li podle $\hat{U}$, pak

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \hat{Y} \hat{U}^2 = \frac{I}{U} U^2 e^{j\varphi_Y} = UI e^{j\varphi_Y} = P e^{j\varphi_Y} = I e^{j\varphi_I} U e^{-j\varphi_U} = \hat{I} \hat{U}^* = P(\cos \varphi_Y + j \sin \varphi_Y) = \\ &= \operatorname{Re}\{\hat{P}\} + j \operatorname{Im}\{\hat{P}\} = P_P + j P_Q ,\end{aligned}$$

kde $*$ označuje komplexně sdruženou hodnotu. Zvolíme-li měřítko výkonu $m_P = m_I U$, pak záměnou písmena I písmenem P v obr. 3 obdržíme fázorový diagram složek výkonu.

b) normujeme-li podle $\hat{I}$, pak

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \hat{Z} \hat{I}^2 = \frac{U}{I} I^2 e^{j\varphi_Z} = UI e^{j\varphi_Z} = P e^{j\varphi_Z} = U e^{j\varphi_U} I e^{-j\varphi_I} = \hat{U} \hat{I}^* = P(\cos \varphi_Z + j \sin \varphi_Z) = \\ &= \operatorname{Re}\{\hat{P}\} + j \operatorname{Im}\{\hat{P}\} = P_P + j P_Q .\end{aligned}$$

Zvolíme-li měřítko výkonu $m_p = m_U I$, pak záměnou písmena U písmenem P v obr. 5 obdržíme fázorový diagram složek výkonu.

10.3. Znaménka reaktivních složek

V odvozených rovnicích reaktivní složky paralelního modelu vykazují kladné hodnoty pro kapacitní charakter obvodu a záporné hodnoty pro induktivní charakter obvodu, zatímco reaktivní složky sériového modelu vykazují kladné hodnoty pro induktivní charakter obvodu a záporné hodnoty pro kapacitní charakter obvodu. Graficky reaktivní složky zobrazujeme úsečkami, jejichž délka je vždy nezáporná, na imaginární ose v rovině složených (komplexních) čísel.

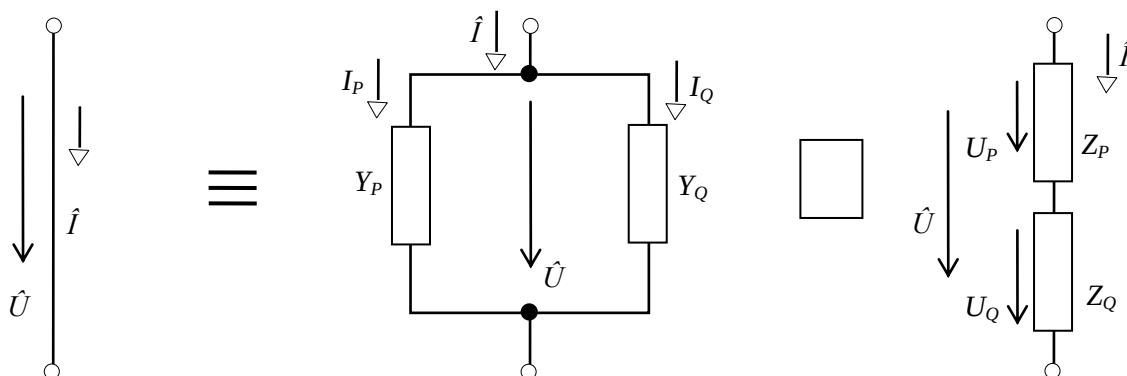
10.4. Ekvivalence paralelního a sériového obvodového modelu

Ekvivalence znamená rovnocennou náhradu. Ta je definována rovností absolutních hodnot složek výkonu paralelního a sériového obvodového modelu (obr. 6). Absolutní hodnoty složek výkonu jsou součinem efektivních hodnot příslušných napětí a proudu

$$P_p = I_p U = Y_p U^2 = U_p I = Z_p I^2, \quad P_Q = I_Q U = Y_Q U^2 = U_Q I = Z_Q I^2.$$

Dělíme-li obě rovnice druhou mocninou efektivní hodnoty proudu a příslušnou složkou admitance, obdržíme

$$\frac{Z_p}{Y_p} = \frac{Z_Q}{Y_Q} = \frac{U^2}{I^2} = Z^2.$$



Obr. 6 Ekvivalence paralelního a sériového obvodového modelu imitancí

Přepočet absolutních hodnot složek admitance na složky impedance znamená vynásobení složek admitance druhou mocninou impedance a naopak. Je zřejmé, že platí $P = UI = YU^2 = ZI^2$.

10.4.1 Vymezení činitelů složek

Podíl aktivní složky výkonu a výkonu nazvěme činitel aktivní složky a podíl reaktivní složky výkonu a výkonu nazvěme činitel reaktivní složky $\lambda_p = \frac{P_p}{P}$; $\lambda_Q = \frac{P_Q}{P}$.

Pomocí činitelů složek pak vyjádříme rovnice

$$P^2 = P_p^2 + P_Q^2 = P^2(\lambda_p^2 + \lambda_Q^2),$$

$$I^2 = I_p^2 + I_Q^2 = I^2(\lambda_p^2 + \lambda_Q^2), \quad Y^2 = Y_p^2 + Y_Q^2 = Y^2(\lambda_p^2 + \lambda_Q^2),$$

$$U^2 = U_p^2 + U_Q^2 = U^2(\lambda_p^2 + \lambda_Q^2), \quad Z^2 = Z_p^2 + Z_Q^2 = Z^2(\lambda_p^2 + \lambda_Q^2).$$

Vzhledem k identitě $\lambda_p^2 + \lambda_Q^2 = 1$ stačí k jednoznačnému vymezení složek znát hodnotu jednoho činitele složky a efektivní hodnotu napětí a efektivní hodnotu proudu.

Pouze hodnoty admitance a impedance jsou inverzní

$$YZ = \frac{P}{I^2} \frac{P}{U^2} = \frac{P^2}{P^2} = 1,$$

zatímco součin stejné složky admitance a impedance se rovná druhé mocnině činitele složky.

$$Y_p Z_p = \frac{P_p}{I^2} \frac{P_p}{U^2} = \frac{P_p^2}{P^2} = \lambda_p^2 \leq 1, \quad Y_Q Z_Q = \frac{P_Q}{I^2} \frac{P_Q}{U^2} = \frac{P_Q^2}{P^2} = \lambda_Q^2 \leq 1.$$

10.4.2 Určení hodnot obvodových parametrů

Hodnoty obvodových parametrů určíme ze známých hodnot složek imitancí $G = Y_p$; $R = Z_p$.

Vyazuje-li obvod induktivní charakter, pak $(\omega L_Y)^{-1} = Y_Q$; $\omega L_Z = Z_Q$,

vyazuje-li obvod kapacitní charakter, pak $\omega C_Y = Y_Q$; $(\omega C_Z)^{-1} = Z_Q$.

10.5. Parametry technických prvků – kondenzátoru, cívky a odporníku

Kapacitorem, induktorem a rezistorem modelujeme jednotlivé fyzikální jevy, jenž charakterizujeme jediným obvodovým parametrem. Kapacitor, induktor a rezistor jsou pouze naše představy, proto jimi za žádných okolností neprochází proud.

Realizací našich představ (jejich zhmotněním) vyrobíme reálné prvky – kondenzátory, cívky a odporníky, jejichž charakteristiky se více či méně blíží našim představám. Proto můžeme tvrdit, buď že kapacitor je nedokonalým modelem kondenzátoru, induktor je nedokonalým modelem cívky a rezistor nedokonalým modelem odporníku, nebo že vyrobené kondenzátory, cívky a odporníky jsou produktem nedokonalé realizace našich představ.

10.5.1 Činitel jakosti

Každý pasivní prvek můžeme modelovat součtem aktivní a reaktivní složky imitance. Jak dokonale se nám podařilo naše představy zhmotnit, to udává tzv. činitel jakosti Q , který je definován podílem

reaktivní a aktivní složky výkonu výrazem $Q = \frac{P_Q}{P_p}$.

Kondenzátory mají činitel jakosti od 100 do 300, cívky od 10 do 40 a odporníky činitelem jakosti necharakterizujeme.

Inverzní hodnotu činitele jakosti nazýváme ztrátový úhel $Q^{-1} = \frac{P_p}{P_Q} = \delta \doteq \operatorname{tg} \delta$.

10.5.2 Provozní parametry

K realizaci obvodů je nezbytné mít informaci o hodnotách obvodových parametrů jednotlivých technických prvků. Každý výrobce je povinen uvést hodnotu kapacity kondenzátoru, indukčnosti cívky a odporu odporníku. Je třeba, abychom si uvědomili, že uvedená hodnota parametru (např. 100 kΩ) ještě neznamená, že odporník má právě tuto hodnotu odporu.

Po výrobě jsou kondenzátory a odporníky tříděny do tolerančních tříd. Pokud není uvedena tolerance, pak to znamená toleranci $\pm 20\%$ (tzv. řada E 6), písmeno A vymezuje toleranci $\pm 10\%$ (E 12),

písmeno B toleranci $\pm 5\%$ (E 24) atd. Řada E 6 je vymezena hodnotami: 100, 150, 220, 330, 470, 680 a jejich násobky 10^x , řada E 12 obsahuje předchozí hodnoty doplněné o 120, 160, 270, 390, 560, 860 a jejich násobky 10^x ... řada E 192.

Kdybychom v řadě hodnot s největší tolerancí $\pm 20\%$ měli záměr zrealizovat hodnotu např. 100 k Ω mnohem přesněji, můžeme uspět následujícím způsobem: měřením zjistíme skutečnou hodnotu odporu např. 95 k Ω , zařadíme-li k tomuto odporníku do série další se štitkovou hodnotou 4,7 k Ω , můžeme si být jisti, že výsledná hodnota odporu bude v toleranci $\pm 1\%$ vůči hodnotě 100 k Ω .

Každý kondenzátor musí mít uvedenou hodnotu napětí – je to maximální provozní napětí s ohledem na jmenovitou elektrickou pevnost použitého dielektrika.

Každá cívka musí mít uvedenou hodnotu proudu – je to maximální hodnota provozního proudu s ohledem na jmenovitou proudovou hustotu vodiče vinutí cívky.

Každý odporník musí mít uvedenou hodnotu ztrátového výkonu – je to výkon, který je schopno těleso odporníku předat okolnímu prostředí při jmenovité provozní teplotě.

10.5.3 Tepelné třídy materiálu izolantů

Mezi vlastnosti, kterými jsou materiály elektrotechnických výrobků charakterizovány má závažný význam i tepelná odolnost. Její význam souvisí se záměrem maximálního využití všech materiálů, zejména izolantů, protože ty vykazují nejmenší hodnoty jmenovitých provozních teplot. Pro tyto účely byla vytvořena a normalizována klasifikační stupnice tepelných tříd (Tab. 1), podle níž rozlišujeme materiály. Kritériem je nejvyšší teplota, kterou materiál izolantu snese, aniž by docházelo k jeho vnitřním chemickým změnám. Značení tepelných tříd písmeny velké abecedy má mezinárodní platnost.

Tepelná třída	Y	A	E	B	F	H	C
Mezní teplota [$^{\circ}\text{C}$]	90	105	120	130	155	180	nad 180

Tab. 1 Tepelné třídy materiálů

10.6. Jouleovo teplo

Prochází-li vodičem proud, vytváří se Jouleovo teplo. Je-li efektivní hodnota proudu I neproměnná, teplota vodiče se po určité době ustálí na hodnotě ϑ .

V ustáleném stavu je Jouleovo teplo Q za jednu sekundu rovno hodnotě činného výkonu

$$Q = Pt = P \cdot 1 = R(\vartheta)I^2,$$

kde P je činný výkon, t čas a $R(\vartheta)$ odpor vodiče při teplotě ϑ . Závislost odporu vodiče na intervalu provozních teplot obvykle dostatečně přesně aproximujeme rovnicí přímky $R(\vartheta) = R_{20}(1 + \alpha_R \Delta\vartheta)$,

kde R_{20} je odpor vodiče při teplotě 20° , α_R teplotní součinitel odporu a $\Delta\vartheta = \vartheta - 20$.

10.6.1 Sdílení Jouleova tepla

Jouleovo teplo je sdíleno tělesy o nižší teplotě sáláním, vedením a prouděním. Teplo je sdíleno všemi způsoby současně, často však je některý z nich dominantní.

Sálání (radiace) je přenos tepla prostorem z tělesa teplejšího na těleso chladnější. Každé těleso vysílá všemi směry energii ve formě tepelného záření.

Vedení tepla (kondukce) připadá v úvahu pouze u látek pevných. Pro prostup tepla válcovou stěnou délky 1 m za 1 sekundu je v odborné literatuře uváděn vztah

$$Q = \Delta \vartheta_s \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

kde $\Delta \vartheta_s$ je teplotní rozdíl $\Delta \vartheta_s = \vartheta_2 - \vartheta_1$, r_2 vnější, r_1 vnitřní poloměr, λ součinitel tepelné vodivosti, například pro led 2,2, beton 0,6 až 0,8, vodu 0,56, papír 0,12, strojní olej 0,12.

V tekutinách, tj. kapalinách a plynech je dominantní proudění tepla (konvekce) za předpokladu, že v různých místech tekutiny existuje teplotní rozdíl. Přirozené proudění nastane pohybem teplejších částic s menší měrnou hmotností směrem vzhůru a chladnějších částic, které jsou těžší, směrem dolů. **Teplo tedy přechází z míst teplejších do míst chladnějších přemísťováním částic uvnitř tekutiny.** Ke zvětšení tepelného toku dojde zintenzivněním proudění například vynuceným prouděním pomocí ventilátoru.

Celkový tepelný tok, který přestoupí mezi povrchem plochy a tekutinou za 1 sekundu je dán vztahem

$$Q = \alpha \cdot S \cdot \Delta \vartheta_s \quad [\text{W}, \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}, \text{m}^2, \text{K}],$$

kde S je styčná plocha mezi stěnou a tekutinou

$\Delta \vartheta_s$ teplotní rozdíl mezi stěnou a tekutinou

α součinitel přestupu tepla, který udává množství tepla, jenž projde za jednotku času povrchem stěny 1 m^2 při teplotním spádu 1 K . Hodnota součinitele přestupu tepla závisí na mnoha okolnostech mimo jiné i na rozdílu teplot mezi oběma prostředím. Pro přirozené proudění vzduchu je jeho hodnota 7 a pro nucené proudění až 50 (uvedené hodnoty platí pro pokojovou teplotu 20°C).

10.6.1.1 Sdílení Jouleova tepla válcového vodiče

Uvažujme obvyklý případ umístění vodiče válcového průřezu ve vzduchu. Při běžných provozních teplotách lze zanedbat sdílení tepla sáláním (radiací) a vedením (kondukcí), protože v daných podmínkách je dominantní proudění (konvekce) tepla.

Průchodem proudu narůstá teplota vodiče. Teplota vodiče se ustálí, když následkem vytvořeného rozdílu teplotních stavů se právě činný výkon $P(\vartheta)$ rovná hodnotě sdíleného tepla

$$P(\vartheta) = R(\vartheta)I^2 = \alpha S \Delta \vartheta_s.$$

$$\text{Styčná plocha válce vodiče } S = 2\pi r l \quad (\text{x})$$

$$\text{plocha průřezu vodiče } S_v = \pi r^2$$

jsou funkcí poloměru vodiče r , l je délka vodiče. Vyjádříme-li z předchozí rovnice poloměr vodiče

$$r = \sqrt{\frac{S_v}{\pi}}$$

$$\text{a dosadíme do rovnice (x) obdržíme pro styčnou plochu válce vodiče rov. } S = 2\pi l \sqrt{\frac{S_v}{\pi}} = 2l \sqrt{\pi S_v},$$

která je nezbytná k diskuzi oteplení vícevodičových vedení, protože vymezuje vztah mezi plochou povrchu a plochou průřezu vodiče (vodičů u vícevodičových vedení).

10.6.2 Diskuze styčných ploch vodičů

Pro stejný měrný odpor materiálu vodičů budeme řešit případy, kdy vedení o průřezu S_v je realizováno buď jedním vodičem, nebo a vodiči průřezu

$$S_{va} = \frac{S_v}{a},$$

$$\text{nebo } b \text{ vodiči průřezu } S_{vb} = \frac{S_v}{b},$$

tj. celkový průřez vedení se nezmění $S_v = aS_{va} = bS_{vb}$.

Dosadíme-li za poloměry vodičů

$$r_a = \sqrt{\frac{S_{va}}{\pi}} = \sqrt{\frac{S_v}{a\pi}}, \quad r_b = \sqrt{\frac{S_{vb}}{\pi}} = \sqrt{\frac{S_v}{b\pi}}$$

do vzorců pro určení styčných ploch (index c je symbolem celkových hodnot)

$$S_{ca} = aS_a = a2\pi r_a l = 2l\sqrt{a\pi S_v}, \quad S_{cb} = bS_b = b2\pi r_b l = 2l\sqrt{b\pi S_v}$$

$$\text{obdržíme pro jejich poměr výraz } \frac{S_{cb}}{S_{ca}} = \frac{2l\sqrt{b\pi S_v}}{2l\sqrt{a\pi S_v}} = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{q},$$

kde proměnné a, b jsou přirozená čísla 1, 2, 3, ... n a proměnná q je racionální číslo

$$q = \frac{b}{a} = \frac{\frac{S_v}{S_{vb}}}{\frac{S_v}{S_{va}}} = \frac{S_{va}}{S_{vb}} = \frac{\pi r_a^2}{\pi r_b^2} = \frac{r_a^2}{r_b^2}$$

Nahradíme-li jednovodičové vedení n vodičovým vedením (tj. $a=1, b=n$) stejného celkového průřezu, pak

$$\frac{S_{cn}}{S_{c1}} = \sqrt{n}$$

tedy celková styčná plocha n vodičového vedení je $\sqrt{n}$ krát větší než styčná plocha jednovodičového vedení (obr. 7).

10.6.3 Diskuze oteplení vícevodičových vedení

V diskuzi budou analyzovány dva provozní stavy vícevodičových vedení:

1. Oteplení vedení není závislé na počtu vodičů vedení.
2. Oteplení vedení je závislé na počtu vodičů vedení.

10.6.3.1 Oteplení vedení není závislé na počtu vodičů vedení

10.6.3.1.1 Činný výkon

Je vhodné připomenout, že činný výkon, kterým charakterizujeme Jouleovo teplo, bude diskutován pro stejné celkové průřezy vedení S_v a stejnou provozní teplotu $\mathcal{G}$. Při stejných provozních teplotách vodičů vedení jsou i stejné celkové hodnoty odporů vedení, tj.

$$R_{c1}(\mathcal{G}) = R_{ca}(\mathcal{G}) = R_{cb}(\mathcal{G}) = R(\mathcal{G}).$$

Stejnou provozní teplotu je však možné dosáhnout pouze v případě, je-li poměr činných výkonů roven poměru styčných ploch.

$$\frac{P_{cb}}{P_{ca}} = \frac{S_{cb}}{S_{ca}} = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{q}.$$

V daných podmínkách to znamená, že pro poměr celkových efektivních hodnot proudů musí platit

$$\frac{P_{cb}}{P_{ca}} = \frac{R(\mathcal{G})I_{cb}^2}{R(\mathcal{G})I_{ca}^2} = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{q} \Rightarrow \frac{I_{cb}}{I_{ca}} = \sqrt[4]{q} = \sqrt{\frac{r_a}{r_b}}.$$

10.6.3.1.2 Proudová hustota

Z výše odvozeného vyplývá, že při stejné provozní teplotě vedení je proud b vodičového vedení $(b/a)^{1/4}$ násobkem proudu a vodičového vedení. Protože celkové průřezy vodičů jsou stejné, je

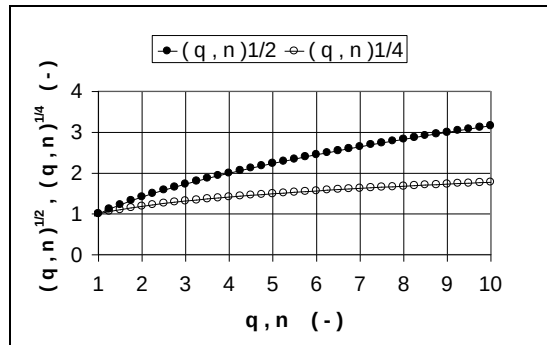
vedení s b vodiči provozováno s proudovou hustotou $J_b = \frac{I_{cb}}{S_v}$

a vedení s a vodiči s proudovou hustotou $J_a = \frac{I_{ca}}{S_v}$,

což znamená, že proudová hustota b vodičového vedení je $(b/a)^{1/4}$ násobkem proudové hustoty a vodičového vedení. Nahradíme-li jeden vodič n vodičovým vedením, je možné každý vodič provozovat s proudovou hustotou $(n)^{1/4}$ krát větší než u jednovodičového vedení (viz obr. 7).

10.6.3.1.3 Vliv izolace vinutí

Pro výpočet styčných ploch jsme doposud uvažovali pouze poloměry vodičů. Opatříme-li vodiče běžnou izolační vrstvou, dojde k nárůstu styčné plochy vodiče, což umožňuje provozovat izolovaný vodič s větší proudovou hustotou než vodič holý.



Obr. 7 Graf druhé odmocniny q , graf čtvrté odmocniny q .

10.6.3.2 Oteplení vedení je závislé na počtu vodičů vedení

V této části rozboru bude diskutováno oteplení jednoho vodiče n vodičového vedení – oteplení každého vodiče je stejné, přičemž celkový průřez vedení S_v a efektivní hodnota proudu I se nemění s počtem vodičů.

V takových podmínkách pro jeden vodič n vodičového vedení snadno stanovíme vztahy pro efektivní hodnotu proudu, průřezu, poloměru

$$I_n = \frac{I}{n}, S_{vn} = \frac{S_v}{n}, r_n = \sqrt{\frac{S_{vn}}{\pi}}$$

$$\text{a styčnou plochu vodiče } S_n = 2\pi r_n l = 2\pi l \sqrt{\frac{S_{vn}}{\pi}} = 2\pi l \sqrt{\frac{S_v}{n\pi}},$$

přičemž hodnota odporu vodiče je závislá na teplotě

$$R_n(\mathcal{G}) = \frac{l}{S_{vn}} \rho_{20} (1 + \alpha_R \Delta \mathcal{G}).$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice výkonové rovnováhy $R_n(\mathcal{G})I_n^2 = \alpha \Delta \mathcal{G}_s S_n$,

obdržíme rovnici

$$\frac{nl}{S_v} \rho_{20} (1 + \alpha_R \Delta \vartheta) \frac{I^2}{n^2} = \alpha \Delta \vartheta_s 2\pi l \sqrt{\frac{S_v}{n\pi}}, \quad (1)$$

kterou rozřešíme vůči oteplení, za předpokladu, že teplota vzduchu $\vartheta_1 = 20^\circ \text{C}$, tj. $\Delta \vartheta = \Delta \vartheta_s$

$$\Delta \vartheta = \left(\frac{2\alpha \sqrt{\pi S_v^3}}{\rho_{20} I^2} \sqrt{n} - \alpha_R \right)^{-1}.$$

Ke zvýšení názornosti odvozeného výrazu jsou v tab. 1 vypočteny hodnoty oteplení vedení v závislosti na počtu vodičů $n \in \langle 1; 10 \rangle$ pro celkový průřez vedení $S_v = 200 \text{ mm}^2$, efektivní hodnotu proudu vedení $I = 300 \text{ A}$, hliníkový materiál s měrným odporem $\rho_{20} = 3,1 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$, teplotním součinitelem odporu $\alpha_R = 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, pro sdílení tepla je uvažováno přirozené proudění vzduchu, jenž je charakterizováno hodnotou činitele $\alpha = 7 \text{ Wm}^{-2}$. Všechny prezentované hodnoty byly odečteny z příslušných tabulek pro uvažovanou teplotu okolí 20°C .

Největší hodnotu oteplení (47°C) vykazuje jednovodičové vedení, narůstajícím počtem vodičů se hodnota oteplení snižuje. S klesající hodnotou oteplení se zmenšuje i hodnota odporu vedení, v tab. 1 jsou uvedeny hodnoty odporů vedení na jednotku délky vedení.

Ke zvýšení názornosti jsou v tab. 1 vypočítány i poměrné hodnoty oteplení n vodičového vedení vůči hodnotě oteplení (47°C) jednovodičového vedení

$$A = 100 \frac{\Delta \vartheta}{\Delta \vartheta_1} = 100 \frac{\Delta \vartheta}{47} \quad (\%)$$

a poměrné hodnoty odporů n vodičového vedení vůči hodnotě odporu $184,3 \Omega$ jednovodičového vedení

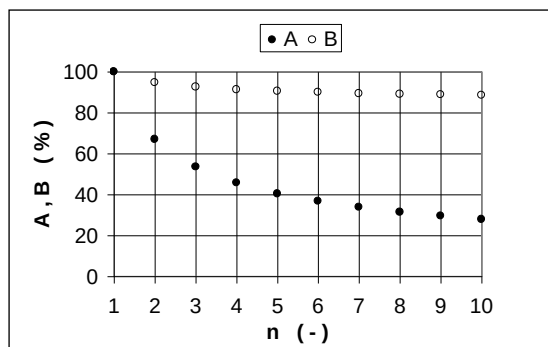
$$B = 100 \frac{R}{R_1} = 100 \frac{R}{184,3} \quad (\%).$$

Protože činný výkon je přímo úměrný hodnotě odporu, jsou hodnoty B zároveň i poměrnými hodnotami činných výkonů.

Vypočítané hodnoty A i B jsou prezentovány v obr. 8.

n (-)	S_{vn} (mm^2)	I_n (A)	$\Delta \vartheta$ ($^\circ$)	A (%)	$R(\vartheta) / I$ ($\mu\Omega / \text{m}$)	B (%)
1	200	300	47	100	184,3	100,0
2	100	150	32	67	174,6	94,8
3	67	100	25	53	170,7	92,6
4	50	75	22	46	168,4	91,4
5	40	60	19	40	166,9	90,5
6	33	50	17	37	165,8	89,9
7	29	43	16	34	164,9	89,5
8	25	38	15	32	164,2	89,1
9	22	33	14	30	163,7	88,8
10	20	30	13	28	163,2	88,6

Tab. 2 Vypočítané hodnoty oteplení vedení.



Obr. 8 Poměrné hodnoty : oteplení – A , činného výkonu – B .

Z vypočítaných hodnot vyplývá, že když např. nahradíme jednovodičové vedení dvouvodičovým, klesne oteplení z hodnoty 47°C na hodnotu 32°C , tedy na 68 % hodnoty původního oteplení,

nahradíme-li však dvou vodičové vedení jednovodičovým, vzroste oteplení z 32°C na 47°C tedy téměř o polovinu (47 %) původní hodnoty. Stejná absolutní hodnota změny oteplení o $\pm 15^{\circ}\text{C}$ představuje při poklesu oteplení relativní změnu 32 %, zatímco při nárůstu oteplení relativní změnu 47 % vůči původní hodnotě oteplení. Téměř o polovinu vzroste i oteplení při náhradě čtyř vodičů dvěma, osmi vodičů čtyřmi, čili v poměru vodičů 2 ku 1. Nahradíme-li vodiče v poměru 3 ku 2, vzroste oteplení téměř o čtvrtinu původního oteplení, atd. Činný výkon při takovýchto náhradách narůstá od 2 % do 6 % původních hodnot.

10.6.4 Záměna materiálu vodičů vedení

V dalším rozboru uvažujme náhradu hliníkového vodiče měděným o $\rho_{20} = 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Pro stanovení průřezu měděného vodiče ekvivalentního hliníkovému vodiči průřezu 200 mm^2 , při stejné ef. hodnotě proudu $I = 300 \text{ A}$ a stejné hodnotě oteplení $\Delta\vartheta = 47^{\circ}\text{C}$ (viz první řádek Tab. 2) vyjdeme z rovnice výkonové rovnováhy (1), kterou rozřešíme vůči průřezu vodiče

$$S_v = \left[\frac{\rho_{20}(1 + \alpha_R \Delta\vartheta) I^2}{\alpha \Delta\vartheta 2 \sqrt{\pi}} \right]^{\frac{2}{3}}$$

a po dosazení pro měděný vodič obdržíme hodnotu 140 mm^2 . Obecně pro poměr průřezu měděného a hliníkového vodiče platí

$$\frac{S_{vCu}}{S_{vAl}} = \left[\frac{\rho_{20Cu}(1 + \alpha_R \Delta\vartheta)}{\rho_{20Al}(1 + \alpha_R \Delta\vartheta)} \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Pro stejnou teplotu vodičů (oba materiály vykazují stejnou hodnotu teplotního součinitele odporu) snadno stanovíme, že podíl průřezu vodičů

$$100 \frac{S_{vCu}}{S_{vAl}} = 100 \left[\frac{\rho_{20Cu}}{\rho_{20Al}} \right]^{\frac{2}{3}} \doteq 70 \%,$$

přičemž poměr výkonu, odporu i styčných ploch pro sdílení tepla je

$$100 \frac{P_{Cu}}{P_{Al}} = 100 \frac{R_{Cu}}{R_{Al}} = 100 \frac{S_{Cu}}{S_{Al}} = 100 \left(\frac{\rho_{20Cu}}{\rho_{20Al}} \right)^{\frac{1}{3}} \doteq 83 \%.$$

Je-li poměrná hodnota průřezu měděných vodičů menší než hodnota vypočtená podle předchozího výrazu, bude jejich provozní oteplení větší než oteplení hliníkových vodičů.

10.6.5 Stručný komentář

1. Vodič menšího průřezu můžeme při stejné teplotě provozovat s větší proudovou hustotou než vodič většího průřezu. Důvodem pro to není povrchový jev (skinefekt), ale větší plocha pro sdílení Jouleova tepla – přesně: větší hodnota poměru plochy vodiče k průřezu vodiče $\frac{S}{S_v} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r}$, která je nepřímo

úměrná poloměru vodiče. Poměr proudových hustot je přímo úměrný druhé odmocnině z podílu poloměru vodičů $(r_a/r_b)^{1/2}$. Takže například vodič s poloměrem 4krát menším může být provozován při stejné teplotě s proudovou hustotou dvakrát větší

$$\sqrt{\frac{r_a}{r_b}} = \sqrt{\frac{r_a}{\frac{1}{4}r_a}} = \sqrt{4} = 2.$$

2. Nahradíme-li a vodičové vedení b vodičovým vedením ($a \neq b$) stejného materiálu a stejného celkového průřezu s tím, že dodržíme požadovanou proudovou hustotu materiálu, pak pro stejn

efektivní hodnoty proudu vedení dojde k významné změně oteplení vedení. Zvýšíme-li počet vodičů, tj. $a < b$, hodnota oteplení klesne, snížíme-li počet vodičů, tj. $a > b$, hodnota oteplení vzroste.

3. Jouleovo teplo může významně ovlivnit i hodnotu teploty okolního prostředí a následkem toho způsobit, že vedení má teplotu vyšší než je dovolená provozní teplota, i když není překročená dovolená proudová hustota materiálu. V daném případě nastává tzv. akumulace tepla, kterou lze snížit (dokonce i vyloučit) vynuceným prouděním pomocí ventilátoru.



Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitoly 3.6 a 7.4.



Další studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitoly 2.2, 4.3, 4.5, 7.5, úloha 4.32.



Příklady

Zadání pro příklady 1. až 3.:

Měřením byly zjištěny okamžité hodnoty napětí $u = \sqrt{2} 60 \sin(\omega t + 35^\circ)$ V a proudu $i = \sqrt{2} 5 \sin(\omega t + 65^\circ)$ A při kmitočtu $f = 1$ kHz.

Stanovte efektivní hodnotu napětí U , proudu I a charakter obvodu.

Řešení:

$U = 60$ V, $I = 5$ A. Protože hodnoty fáze proudů jsou větší než hodnoty fáze napětí, vykazuje obvod kapacitní charakter: $[(\omega t + \varphi_I) - (\omega t + \varphi_U)] = \varphi_I - \varphi_U = 65 - 35 = 30^\circ$ (kap.).

Vytvořte obvodové modely a určete hodnoty imitancí.

Řešení:

Obvodové veličiny můžeme modelovat a) paralelním (obr. 2), b) sériovým (obr. 4) obvodovým modelem. Hodnoty složek imitancí určíme pomocí rozdílů fází obou veličin $\varphi = 30^\circ$ (kap.).

$$\text{ad a) } Y = \frac{I}{U} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \text{ S,}$$

$$Y_p = Y \cos \varphi = \frac{1}{12} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{24} \text{ S, } Y_Q = Y \sin \varphi = \frac{1}{12} \sin 30^\circ = \frac{1}{24} \text{ S.}$$

$$\text{ad b) } Z = \frac{U}{I} = \frac{60}{5} = 12 \text{ } \Omega,$$

$$Z_p = Z \cos \varphi = 12 \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \text{ } \Omega, \quad Z_Q = Z \sin \varphi = 12 \sin 30^\circ = 6 \text{ } \Omega.$$

Určete hodnoty obvodových parametrů.

Řešení:

$$\text{ad a) } G = Y_p = \frac{\sqrt{3}}{24} \text{ S, } \omega C_Y = Y_Q \Rightarrow C_Y = \frac{Y_Q}{\omega} = \frac{Y_Q}{2\pi f} = \frac{1}{24} \frac{1}{2\pi 10^3} \doteq 6,63 \text{ } \mu\text{F}.$$

$$\text{ad b) } R = Z_p = 6\sqrt{3} \text{ } \Omega, (\omega C_Z)^{-1} = Z_Q \Rightarrow C_Z = \frac{1}{\omega Z_Q} = \frac{1}{2\pi 10^3 \cdot 6\sqrt{3}} \doteq 15,3 \text{ } \mu\text{F}.$$

Zadané veličiny můžeme modelovat paralelním zapojením rezistoru a kapacitoru s hodnotami parametrů: $G = \sqrt{3}/24 \text{ S}$, $C_Y = 6,63 \text{ } \mu\text{F}$ a zároveň i sériovým zapojením rezistoru a kapacitoru s hodnotami parametrů: $R = 6\sqrt{3} \text{ } \Omega$, $C_Z = 15,3 \text{ } \mu\text{F}$.

Neizolovaný hliníkový vodič kruhového průřezu o průměru 2 mm vede proud 14 A. Vypočítejte jeho provozní teplotu, je-li uložen v prostředí s přirozeným prouděním vzduchu pokojové teploty 20° C.

Řešení:

Budeme uvažovat sdílení tepla pouze prouděním. Vyjdeme z rovnice výkonové rovnováhy

$P(\vartheta) = R(\vartheta)I^2 = \alpha S \Delta \vartheta$, kterou rozřešíme vůči oteplení $\Delta \vartheta$ a vyjádříme pomocí známých údajů (odvození je v dávce 11.6.3.2)

$$\Delta \vartheta = \left(\frac{2\alpha \sqrt{\pi S_v^3}}{\rho_{20} I^2} \sqrt{n} - \alpha_R \right)^{-1},$$

kde - součinitel přestupu tepla $\alpha = 7 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$,

průřez vedení $S_v = \pi r^2 = \pi 10^{-6} \text{ m}^2$, - počet vodičů $n = 1$,

teplotní součinitel odporu $\alpha_R = 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, - měrný odpor $\rho_{20} = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m}$.

$$\text{Po dosazení hodnot obdržíme } \Delta \vartheta = \left(\frac{2 \cdot 7 \sqrt{\pi \pi^3 \cdot 10^{-18}}}{3,1 \cdot 10^{-8} \cdot 14^2} \sqrt{1} - 4 \cdot 10^{-3} \right)^{-1} \doteq 53^\circ \text{ C}.$$

Pro vypočtenou hodnotu oteplení je provozní teplota hliníkového vodiče 73° C.

**Otázky**

1. Definujte imitaci obvodu (11.1).
2. Definujte admitanci obvodu (11.1.a).
3. Definujte impedanci obvodu (11.1.b).
4. Definujte komplexní hodnotu výkonu pro paralelní a sériový obvodový model (11.2).
5. Definujte podmínku ekvivalence sériového a paralelního obvodového modelu (11.4).
6. Definujte činitel jakosti a ztrátový úhel (11.5).
7. Uveďte s jakou tolerancí jsou zařazovány vyrobené technické prvky do normalizovaných řad (11.5.2).
8. Napište, co je to Jouleovo teplo (11.6).
9. Napište rovnici výkonové rovnováhy pro sdílení tepla prouděním (11.6.1.1).



Odpovědi na otázky naleznete v dávkách uvedených v závorkách.



Úlohy k řešení

1. Pro zadání příkladů sestrojte fázorový diagram obvodových veličin.
2. Ověřte, zda hodnoty imitancí a složek imitancí vypočítaných ve 2. příkladu jsou inverzní. Lze tento názor zobecnit?
3. Vypočítejte hodnoty složek proudu a napětí pro paralelní a sériový model zadání příkladů.
4. Vypočítejte hodnoty složek výkonu pro paralelní a sériový model zadání příkladů.
5. Ověřte, zda vypočítané hodnoty parametrů paralelního a sériového modelu v 3. příkladu jsou ekvivalentní.
6. Sestrojte fázorové diagramy aktivních a reaktivních složek paralelního a sériového obvodového modelu.
7. Vypočítejte provozní teplotu měděného vodiče za podmínek 4. příkladu.



Klíč k řešení

1. Zvolíme vhodná měřítka proudu a napětí, např. $m_I = 1 \text{ A/dílek}$, $m_U = 10 \text{ V/dílek}$ a sestrojíme fázorový diagram např. viz obr. 1.
2. Ověříme, zda: součin hodnoty admitance a impedance je roven jedné, součin aktivní složky admitance a impedance je roven jedné, ... (viz 11.4.1)
3. viz (11.1)
4. viz (11.2)
5. viz (11.4)
6. Před konstrukcí vhodně zvolte měřítka (viz 11.1, 11.2) pak stačí sestrojit pouze fázorový diagram pro paralelní obvod a fázorový diagram pro sériový obvod.
7. Do rovnice pro výpočet oteplení 4. příkladu dosadíme za měrný odpor mědi hodnotu $1,8 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m}$ a ostatní hodnoty ponecháme.



Autokontrola

Pokud jste reagovali správně na více jak polovinu podnětů z každé oblasti, pokračujte ve studiu jiné kapitoly, pokud ne, pak text studijní opory znovu prostudujte a opakovaně vypracujte odpovědi.



Zadání 10. samostatné práce

Navrhněte možnosti snížení provozní teploty pod 50°C vedení zadaného v 4. příkladu a doložte výpočtem.

Zpracoval: Jaromír Kijonka

11. DIELEKTRICKÉ OBVODY



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- vyjádřit základní pojmy dielektrických obvodů.
- definovat Ohmův zákon pro dielektrický obvod.
- vyřešit sériový a paralelní dielektrický obvod.



Výklad

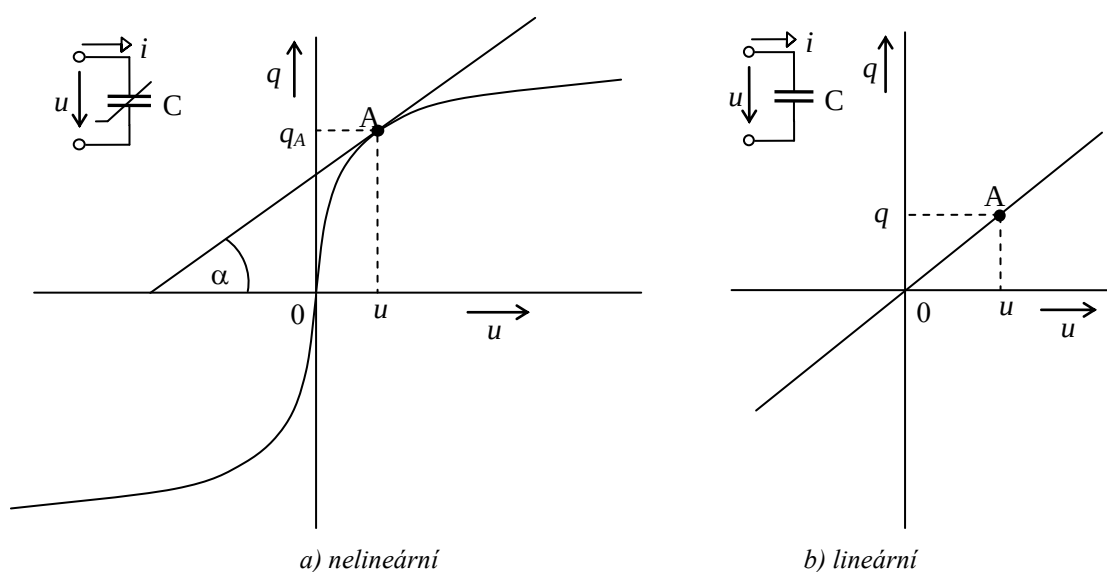
Analogicky k elektrickým a magnetickým obvodům existují i dielektrické obvody. Hovoříme o nich v souvislosti s kondenzátory s jednoduchým, resp. složeným dielektrikem.

11.1. Kapacitor – základní pasivní prvek dielektrických obvodů

Základním pasivním prvkem dielektrických obvodů je kapacitor (ideální kondenzátor). Kapacitor je základní pasivní dvojpól, tvořený dvěma elektrodami mezi kterými je dielektrikum, kterého důležitým parametrem je permitivita ϵ ($\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$). Kapacitor umožňuje akumulovat v obvodu elektrickou energii ve formě energie elektrického pole. Jeho základní charakteristikou je vztah mezi nábojem $q(\text{C})$ a napětím u tj.

$$q = f(u) \quad \text{nebo} \quad u = f(q) \quad (1)$$

Tato charakteristika bývá vyjádřena nejčastěji graficky a nazýváme ji coulombvoltovou charakteristikou - zkráceně CV charakteristika. Příklady těchto charakteristik spolu s užívanými značkami a vyznačenou spotřebičovou orientací kladných smyslů napětí a proudu jsou uvedeny na obr.1.



Obr. 1. Coulombvoltová charakteristika kapacitou

Podle průběhu charakteristik rozlišujeme kapacitory lineární obr. 1 b). Graficky jej znázorňuje přímka procházející počátkem, její rovnice je:

$$q = Cu \quad (2)$$

kde C je kapacita (F) ($= \frac{q}{u}$)

q je náboj akumulovaný kondenzátorem (C) ($1 \text{ C} = 1 \text{ A.s}$)

u – napětí na kondenzátoru (V)

U kapacitorů s lineární CV charakteristikou je definována pouze jedna charakteristika (statická), která je ve všech bodech VC charakteristiky stejná.

Převrácená hodnota kapacity se nazývá elastance:

$$D = 1/C \text{ (F}^{-1}\text{)} \quad (3)$$

Pro nelineární kapacitory definujeme více kapacit:

- statická kapacita, např. v bodě A – obr.1a) je definována vztahem:

$$C_{(A)} = \frac{q_{(A)}}{u_{(A)}} \quad (4)$$

Statická kapacita nelineárního kapacitoru, jak je zřejmé z obr.1a), je v každém v každém bodě VC charakteristiky jiná.

- kapacita diferenciální, její definice je zřejmá z obr.1a) a pro bod A charakteristiky je definovaná vztahem

$$C_{d(A)} = \frac{dq}{du} (= \operatorname{tg} \alpha) \quad (5)$$

Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že diferenciální kapacita je v každém bodě nelineární části VC charakteristiky jiná.

Pozn.: Diferenciální kapacitu můžeme určit z tg α pouze vynásobením podílem měřítek náboje q napětí u .

11.2. Terminologie v dielektrických obvodech

Při analýze dielektrických obvodů jsou základními výpočtovými veličinami elektrický tok ϕ_D a napětí U . Tyto integrální veličiny souvisí s diferenciálními veličinami podle vztahů:

$$\phi_D = \int_S D \cdot dS \quad (6)$$

kde ϕ_D je elektrický tok (A.s),

D - elektrická indukce (A.s.m⁻²),

S - plocha, přes kterou protéká tok ϕ_D (m²).

$$U = \int_l E \cdot dl \quad (7)$$

kde U je napětí (V),

E - intenzita elektrického pole (V.m⁻¹),

l - uzavřená křivka (v našem případě kružnice) po které cirkuluje vektor E (m).

ϕ_D a U jsou veličiny skalární. Velikost vektoru elektrické indukce má v teorii dielektrických obvodů význam hustoty elektrického toku, tj. toku připadajícího na jednotku plochy kolmé na směr toku:

$$D = \frac{\phi_D}{S} \quad (8)$$

Velikost vektoru elektrické intenzity je dána elektrickým napětím, připadajícím na jednotku délky ve směru napětí

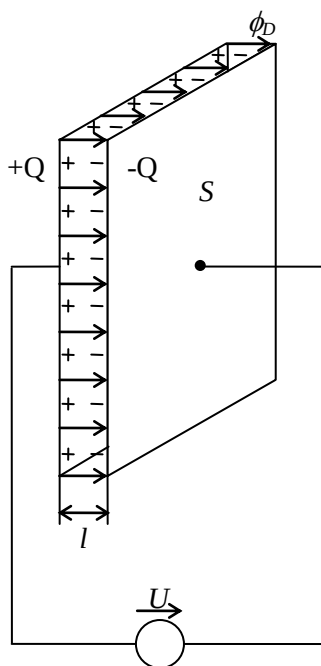
$$E = \frac{U}{l} \quad (9)$$

Jak vyplývá z předcházejícího, zakládá se představa dielektrického obvodu (podobně jako magnetického obvodu) na určité podobnosti s obvodem elektrickým. Je však třeba zdůraznit, že jde o podobnost pouze formální, neboť v obou případech jde co do fyzikální podstaty o zcela jiné jevy.

Především je zřejmý rozdíl v podstatě základních analogických veličin: elektrického proudu a elektrického toku. Zatímco proud ve vodičích je tvořený skutečným a trvalým pohybem částic s nábojem, nejedná se u elektrického toku o takovýto pohyb částic s nábojem, ale jde jen o projev elektrických silových účinků EM pole.

V elektrických obvodech je vliv tzv. svodových proudů (které vznikají nedokonalostí izolace) při dobré izolaci prakticky nulový. V dielektrických obvodech existuje vždy větší nebo menší rozptylový tok, kterého vliv třeba při přesných výpočtech respektovat. Souvisí to s tím, že permitivita vzduchu, který má funkci "dielektrického izolantu" je sice menší než permitivita látky dielektrického obvodu – "dielektrického vodiče", ale v běžných případech jen maximálně o jeden řád, zatím co vodivost dobrých elektrických izolantů je až o 20 řádů menší než je vodivost dobrých vodičů, tedy prakticky nulová.

Mezi dielektrickým obvodem na jedné straně a elektrickým obvodem a magnetickým obvodem na straně druhé existuje dále rozdíl daný fyzikální podstatou vytvoření elektrického, proudového a magnetického pole. Elektrický proud může trvale procházet jen uzavřeným elektrickým obvodem. Podobně magnetický obvod je většinou uzavřený, protože vektorové čáry vektoru B obepínají proudovodič, kterým jsou buzené. Oproti tomu dielektrický obvod je ohraničený prostorem mezi elektrodami (např. kondenzátoru).



Obr. 2 Rovinný kondenzátor jako zdroj v dielektrickém obvodě

Indukční čáry začínají na kladných a končí na záporných částicích s náboji. Dielektrický obvod se proto svým charakterem podobá na část elektrického nebo magnetického obvodu.

Přes tyto a ještě další rozdíly je uvedená podobnost prakticky užitečná, protože ulehčuje řešení dielektrických obvodů.

Uvedeme další analogické veličiny elektrických a dielektrických obvodů. Experimentálně můžeme zjistit, že při dané hodnotě napětí U , které působí v dielektrickém obvodu, závisí hodnota elektrického toku od materiálu a od rozměru obvodu. Tyto vlivy vyjadřujeme (podobně jako u elektrických obvodů) dielektrickým odporem R_d (elastancí), případně dielektrickou vodivostí G_d (permitancí). Dielektrický odpor jistého úseku dielektrického obvodu s konstantním průřezem S , délkou l z materiálu s permitivitou ε je daný vztahem:

$$R_d = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{l}{S} \quad (10)$$

Vztah (10) je podobný vztahu pro výpočet elektrického odporu vodiče $R = \rho l / S = 1 / G$. Konduktivitě ($\gamma = \frac{1}{\rho}$) odpovídá permitivita. Uvedený vztah platí za předpokladu, že v obvodě s průřezem S a délkou l jsou homogenní elektrické silové účinky EM pole. Jednotkou dielektrického odporu je $\Omega \cdot s^{-1} = F^{-1}$.

Převrácená hodnota dielektrického odporu je dielektrická vodivost

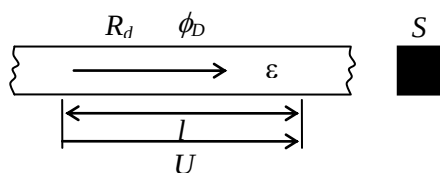
$$G_d = \frac{1}{R_d} = C \quad (11)$$

Z předcházející rovnice vyplývá, že kapacita kapacitoru se rovná dielektrické vodivosti prostoru mezi jeho elektrodami.

Upozorňujeme na to, že název dielektrický odpor (stejně jako magnetický) je třeba chápat jen formálně. Na rozdíl od elektrického odporu necharakterizuje nevratnou přeměnu energie EM pole na teplo.

11.3. Ohmův zákon pro dielektrický obvod

Analogii mezi elektrickým a dielektrickým obvodem můžeme vidět dále i při stanovení Ohmova zákona pro dielektrický obvod.



Obr.3 K Ohmovu zákonu pro dielektrický obvod

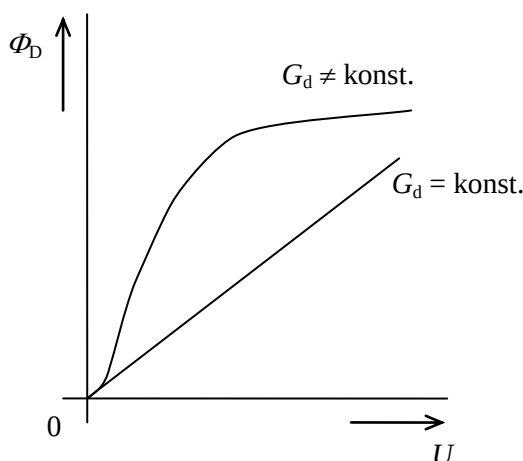
Ohmův zákon pro dielektrický obvod je dán vztahem:

$$\phi_D = G_d U \quad (12)$$

Jeho význam je zřejmý z obr.2.

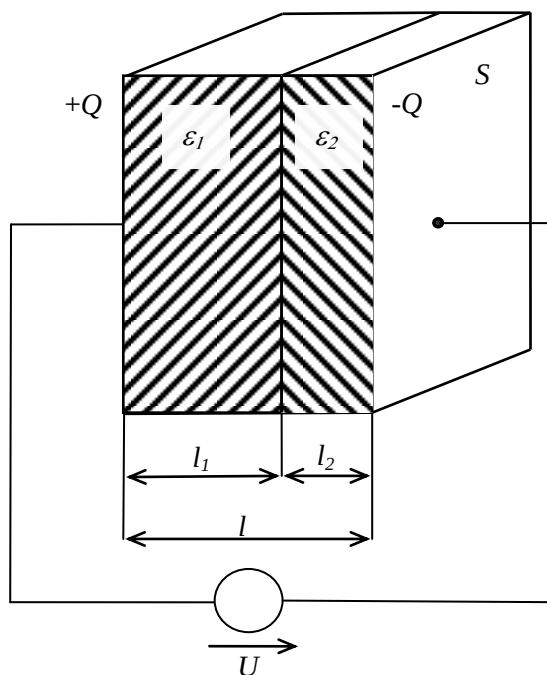
Grafickým zobrazením tohoto zákona je polarizační charakteristika dielektrického obvodu (obr. 4). Je-li $G_d = \text{konst.}$, pak je to přímka. U některých dielektrických látek, které se pro dielektrické obvody používají, však dielektrická vodivost není konstantní. Závisí od permitivity, která je funkcí elektrické intenzity. Potom jsou dielektrické obvody nelineární.

Dielektrické obvody nebývají rozvětvené, proto se zde Kirchhoffovy zákony neuplatňují. Při analýze těchto obvodů obvykle vystačíme s Ohmovým zákonem, přitom existují dva typy úloh: pro požadované ϕ_D hledáme U a při známém U určujeme ϕ_D . Z hlediska konfigurace obvodů jde o sériový, resp. paralelní dielektrický obvod.



Obr.4 Polarizační charakteristika lineárního a nelineárního obvodu

11.4. Sériový dielektrický obvod



Obr.5 Příklad sériového dielektrického obvodu

Sériovým dielektrickým obvodem je např. vrstvené dielektrikum rovinného kondenzátoru (obr.5). Obě vrstvy jsou vzhledem k vektoru elektrické intenzity mezi elektrodami řazené za sebou (do série), proto jimi prochází stejný elektrický tok ϕ_D a stejná je i jeho hustota, tj. elektrická indukce D

$$D_1 = D_2 = D = \frac{\phi_D}{S} \quad (13)$$

Předpokládá se rovnoběžné rozhraní vrstev s povrchem elektrod, tj. nedochází k lomu indukčních čar a elektrické pole v obou vrstvách je homogenní.

Jestliže dosadíme do předcházející rovnice $D_1 = \varepsilon_1 E_1$ a $D_2 = \varepsilon_2 E_2$ dostaneme:

$$D = D_1 = D_2 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \quad (14)$$

ze kterého vztah mezi intenzitami elektrického pole a permitivitami dielektrik:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (15)$$

Elektrické intenzity jsou ve vrstvách nepřímo úměrné jejich permitivitám. Ve vrstvě s menší permitivitou je elektrická intenzita větší, tato vrstva je více mechanicky namáhána.

Elektrická intenzita v jedné vrstvě se určí z napětí mezi elektrodami U . V homogenním poli obou vrstev platí

$$E_1 l_1 + E_2 l_2 = U \quad (16)$$

Jestliže za E_2 dosadíme z rovnice (15) dostaneme:

$$E_1 l_1 + \left(E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) l_2 = E_1 + \left(l_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} l_2 \right) = U \quad (17)$$

a ze (17) intenzitu elektrického pole v dielektriku 1:

$$E_1 = \frac{U}{l_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} l_2} \quad (18)$$

Podobně v dielektriku 2:

$$E_2 = \frac{U}{l_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} l_1} \quad (19)$$

Výrazy ve jmenovateli rovnic (18) a (19) se někdy označují jako redukované délky vrstveného dielektrika.

Kapacita kapacitoru s vrstveným dielektrikem se určí jako jeho výsledná dielektrická vodivost. Při řazení vrstev do série se sčítají jejich dielektrické odpory (elastance). Platí

$$R_d = R_{d1} + R_{d2} \quad (20)$$

Protože elektrické pole v obou vrstvách je homogenní, můžeme použít vztahy:

$$R_d = \frac{l_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{l_2}{\varepsilon_2 S} = \frac{\varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_1 l_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S} \quad (21)$$

z nich potom vyplývá:

$$C = G_d = \frac{1}{R_d} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_1 l_2} \quad (22)$$

Vztah můžeme upravit:

$$C = \frac{\varepsilon_1 S}{l_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} l_2} = \frac{\varepsilon_2 S}{l_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} l_1} \quad (23)$$

Vztahům ve jmenovatelích říkáme redukované délky vrstveného dielektrika.

11.5. Paralelní dielektrický obvod

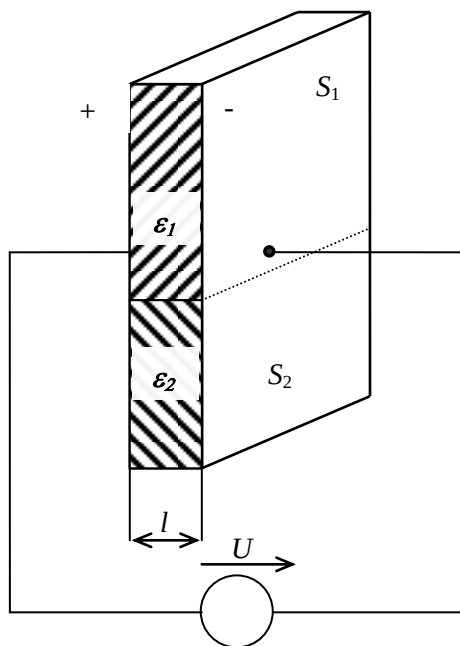
Je tvořený rovinným kondenzátorem v kterém jsou různé dielektrika řazené vedle sebe, jde tedy o paralelní dielektrický obvod. Je na nich stejné napětí U . Proto je elektrická intenzita v obou částech stejná. Platí

$$E_1 = E_2 = E = \frac{U}{l} \quad (24)$$

Elektrická indukce je však úměrná permitivitě $D_1 = \varepsilon_1 E$ a $D_2 = \varepsilon_2 E$. Platí tedy:

$$E = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2} \quad (25)$$

z (25) vyplývá:



Obr.6 Příklad paralelního dielektrického obvodu

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (26)$$

Kapacitu takového kondenzátoru určíme z výsledné vodivosti paralelně řazených vrstev, tedy součtem dílčích vodivostí obou dielektrik:

$$C = G_d = G_{d1} + G_{d2} = \frac{\epsilon_1 S_1}{l} + \frac{\epsilon_2 S_2}{l} = \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{l} \quad (27)$$

Použitá literatura:

[1] Neveselý, M.: Teoretická elektrotechnika I, EDIS Žilina 1998

[2] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů, skriptum ČVUT Praha 1999



Text k prostudování

Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů. Skriptum ČVUT Praha 1999; podkapitola 3.4



Další studijní texty

Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitola 2.2



Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Co je voltcoulombová charakteristika?
2. Co je magnetický tok?
3. Co je to elastance?
4. Jak zní Ohmův zákon pro dielektrické obvody?



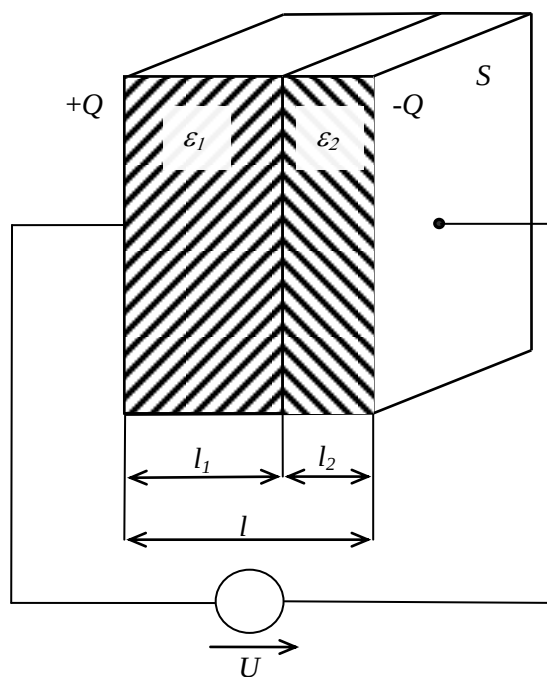
Odpovědi naleznete ve Výkladu

odst.11.1 (1.otázka), odst.11.2 (2.otázka), odst.11.2 (3.otázka), odst.11.3 (4.otázka).



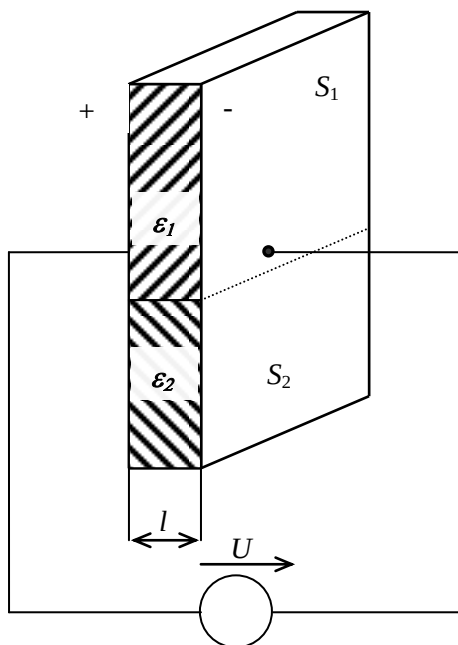
Úlohy k řešení

1. (3 body) Vysvětlete základní pojmy dielektrických obvodů (elektrická indukce, intenzita elektrického pole, dielektrický odpor, dielektrická vodivost, Ohmův zákon pro dielektrické obvody, polarizační charakteristika)

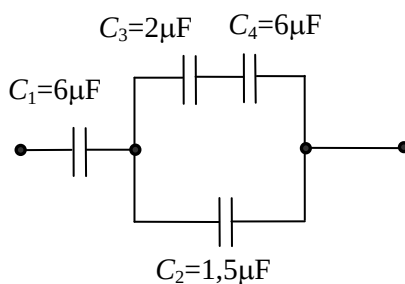


Obr.1 Příklad sériového dielektrického obvodu

2. (4 body) Určete výsledný dielektrický odpor a vodivost obvodu z obr.1
3. (4 body) Určete výslednou dielektrickou vodivost a odpor obvodu z obr..2
4. (1 bod) Vypočtete výslednou kapacitu zapojení kondenzátorů z obr.3



Obr.2 Příklad paralelního dielektrického obvodu



Obr.3 Sérioparalelní spojení kondenzátorů

**Klíč k řešení**

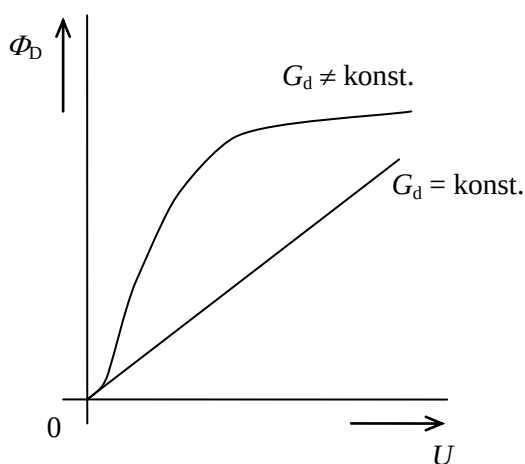
1. $D = \frac{\Phi_D}{S}$ - velikost vektoru elektrické indukce má význam hustoty elektrického pole.

$E = \frac{U}{l}$ - velikost vektoru elektrické intenzity je dána elektrickým napětím připadajícím na jednotku délky.

Dielektrický odpor $R_d = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{l}{S}$

Dielektrická vodivost $G_d = \frac{1}{R_d} = C = \frac{\varepsilon \cdot S}{l}$

Ohmův zákon pro dielektrické obvody $\Phi_D = G_d \cdot U$



Obr.4 Polarizační charakteristika lineárního a nelineárního obvodu

$$2. R_d = \frac{\varepsilon_2 \cdot l_1 + \varepsilon_1 \cdot l_2}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot S}$$

$$G_d = \frac{1}{R_d} = C = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot S}{\varepsilon_2 \cdot l_1 + \varepsilon_1 \cdot l_2}$$

$$3. \quad G_d = C = \frac{\varepsilon_1 \cdot S_1 + \varepsilon_2 \cdot S_2}{l}$$

$$R_d = \frac{l}{\varepsilon_1 \cdot S_1 + \varepsilon_2 \cdot S_2}$$

$$4. \quad C = 2 \text{ } \mu\text{F}$$



Autokontrola

Pokud jste získali z kontrolních otázek a příkladů alespoň **9** bodů, je možno přejít ke studiu jiných témat. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.



Zadání 11. samostatné práce

Určete energii elektrického pole kondenzátoru o kapacitě $C_1 = 4 \text{ } \mu\text{F}$ při napětí $U_1 = 100 \text{ V}$. Jak se změní energetické poměry po připojení nenabitého kondenzátoru, např. stejné kapacity? Odůvodněte výsledek!

Zpracoval: Josef Paleček

II. ČÁST: ZADÁNÍ SAMOSTATNÝCH PRACÍ

12. LABORATORNÍ ÚLOHY

**jsou povinné
pro studenty prezenční formy studia.**

**Studenti kombinované formy studia
proměří v době dvou tutoriálu pouze některé z nich,
ale jejich zadání mohou použít
jako zadání samostatných prací.**

TEORIE OBVODŮ I - LABORATORNÍ CVIČENÍ

JMÉNO:

SKUPINA:

DATUM:

1. Měření parametrů zdrojů a výkonové přizpůsobení zátěže

Teoretický rozbor:

Ideální zdroj napětí dodává do obvodu konstantní napětí U_0 nezávislé na zatěžovacím proudu (má nulový vnitřní odpor). Jeho vnější voltampérovou charakteristikou je přímka rovnoběžná s osou proudu.

Ideální zdroj proudu dodává konstantní proud I_0 do libovolné zátěže (má nulovou vnitřní vodivost). Jeho vnější VA charakteristikou je přímka rovnoběžná s osou napětí.

Skutečný zdroj napětí popisujeme zapojením tvořeným sériovým spojením ideálního zdroje napětí s konstantním napětím U_0 a vnitřního odporu R_i skutečného zdroje.

Skutečný zdroj proudu popisujeme zapojením tvořeným paralelním spojením ideálního zdroje proudu s konstantním vnitřním proudem I_0 a vnitřní vodivosti G_i skutečného zdroje.

Skutečné zdroje napětí nebo proudu se k ideálním zdrojům blíží v určitém rozsahu charakteristiky.

Ekvivalence - skutečné zdroje napětí a proudu jsou navzájem ekvivalentní (z hlediska připojené zátěže), platí-li $I_0 = G_i \cdot U_0$ a $G_i = 1 / R_i$.

Přenos maximálního výkonu ze zdroje do spotřebiče - výkonové přizpůsobení (jedna ze základních otázek sdělovací techniky) se dosahuje přizpůsobením parametrů spotřebiče parametrům zdroje - výkonové přizpůsobení. Impedance spotřebiče musí být rovna komplexně sdružené hodnotě vnitřní impedance náhradního zdroje napětí. Ve stejnosměrných obvodech musí být odpor spotřebiče roven vnitřnímu odporu náhradního zdroje napětí.

Zadání:

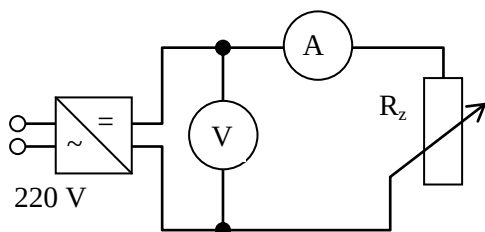
1) Změřte voltampérovou charakteristiku laboratorního zdroje napětí s proudovým omezením. Ke zdroji připojte proměnný odporník. Obvodové veličiny měřte univerzálními přístroji.

2) Vyjádřete se k vlastnostem zdroje. Vyznačte oblasti, ve kterých má zdroj vlastnosti blízké ideálnímu zdroji napětí nebo proudu.

3) Změřte zatěžovací charakteristiky napěťového děliče. Napětí zdroje zvolte tak, aby při nulovém zatěžovacím odporu tekl zkratem proud menší než 0,6 A.

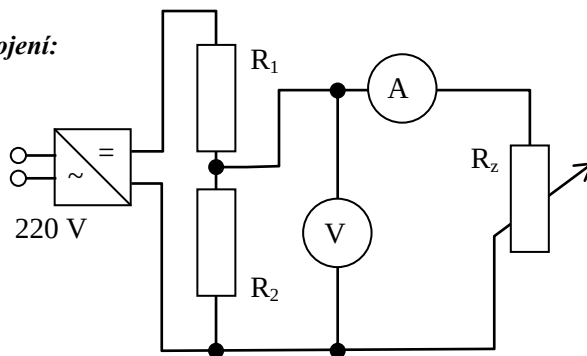
4) Výpočtem určete závislost výkonu zátěže a účinnosti na proměnlivé hodnotě zatěžovacího odporníku R_z .

5) Vypočítané závislosti výkonu zátěže a účinnosti v závislosti na zatěžovacím odporu znázorněte v grafech ($P_2 = f(R_z)$, $\eta = f(R_z)$) a určete hodnotu R_z při maximálním výkonu.

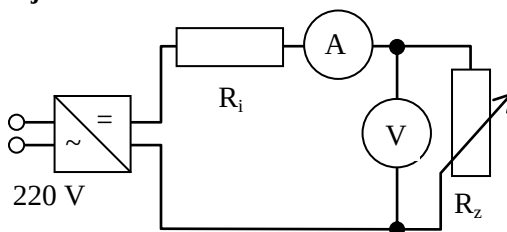


Obr. 1 – charakteristika zdroje

Schéma zapojení:



Obr. 2 – charakteristika děliče



Obr. 3 – výkonové přizpůsobení

Použité přístroje:

Tabulka 1 - charakteristika zdroje

I (mA)										
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

U (V)										
---------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Tabulka 2 - charakteristika děliče

I (mA)										
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

U (V)										
---------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Tabulka 3 - měření výkonového přizpůsobení

$U_0 =$

U_z (V)	I (mA)	R_z (Ω)	P_1 (W)	P_2 (W)	η (%)

Příklad výpočtu:

Závěr:

TEORIE OBVODŮ I - LABORATORNÍ CVIČENÍ

JMÉNO:

SKUPINA:

DATUM:

2. Théveninova a Nortonova věta

Teoretický rozbor:

Pokud u složitého elektrického obvodu hledáme obvodové veličiny jen ve vybrané větvi ohraničené dvojicí uzlů, je vhodné vzhledem k nim nahradit obvod náhradním zdrojem elektrické energie.

Théveninova věta - věta o náhradním zdroji napětí :

Lineární elektrický obvod nebo jeho část s konečným počtem aktivních a pasivních dvojpólů lze vzhledem ke dvěma uzlům nahradit náhradním zdrojem napětí s napětím U_0 a vnitřním odporem R_i . Napětí náhradního zdroje je rovno napětí mezi rozpojenými uzly nahrazované části obvodu. Vnitřní odpor náhradního zdroje je roven odporu nahrazované části mezi uvažovanými uzly, jsou-li všechny zdroje vyřazeny.

Nortonova věta - věta o náhradním zdroji proudu:

Lineární elektrický obvod nebo jeho část s konečným počtem aktivních a pasivních dvojpólů lze vzhledem ke dvěma uzlům nahradit náhradním zdrojem proudu s proudem I_0 a vnitřní vodivostí G_i . Proud náhradního zdroje je roven proudu nakrátko mezi uvažovanými uzly nahrazované části obvodu. Vnitřní vodivost náhradního zdroje je rovna vodivosti nahrazované části mezi uvažovanými uzly, jsou-li všechny zdroje vyřazeny.

Zdroje napětí s nulovými vnitřními odpory nahrazujeme spoji nakrátko, zdroje proudu nahrazujeme prázdným dvojpólem (rozpojením).

Dualita elektrických obvodů:

Dualita v elektrických obvodech je odvozena z rovnosti okamžitých výkonů na příslušných prvcích obvodu. V důsledku uplatnění duality mluvíme o duálních obvodech, prvcích, metodách, řešeních, matematických modelech, duálních topologických útvarech apod. Duální korespondenci můžeme přiřadit např. Kirchhoffovým zákonům, R a G , L a C , metodě smyčkových proudů a řezových napětí, Théveninové a Nortonové větě o náhradních zdrojích, smyčce a řezu, paralelnímu a sériovému spojení duálních prvků apod.

Dualita je jedna z významných metod, které používáme k analýze a syntéze elektrických obvodů, její uplatňování vede k optimalizaci pracovních postupů při řešení problémů.

Zadání:

1. Napěťový dělič tvořený dvěma odporníky nahradte podle věty o náhradních zdrojích ekvivalentním zdrojem napětí a proudu. Parametry zdrojů určete ze stavu naprázdno a nakrátko. Napětí zdroje nastavte tak, aby byl schopen dodávat proud nakrátko. Vnitřní odpor nebo vodivost náhradních zdrojů vytvořte z odporníků použitých v děliči.

2. Náhradu ověřte při dvou různých hodnotách zatěžovacího odporníku.

3. Pro obě měření vypočítejte za jednotku času oteplení obou typů zdrojů a z tohoto hlediska se vyjádřete k jejich ekvivalenci.

4. Posuďte, zda platí pro tento experiment dualita.

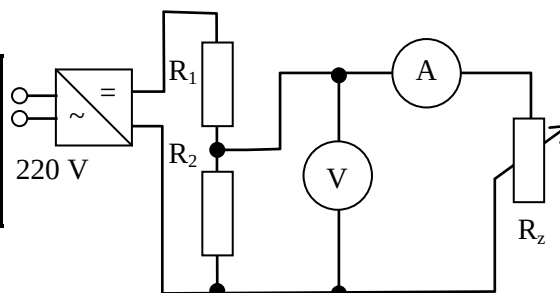
Použité přístroje:

Tabulky naměřených hodnot:

Schéma zapojení:

Napěťový dělič

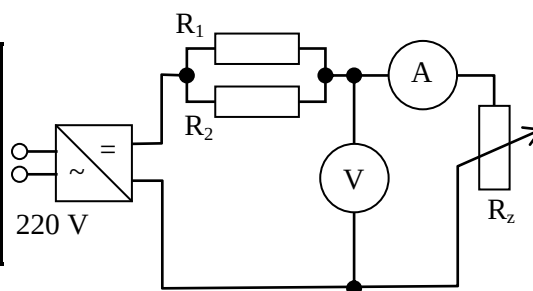
$R_z (\Omega)$	Naprázdno	Nakrátko	$R_{z1} (\Omega)$	$R_{z2} (\Omega)$
U (V)				
I (mA)				



Obr. 1 – napěťový dělič

Náhradní zdroj napětí

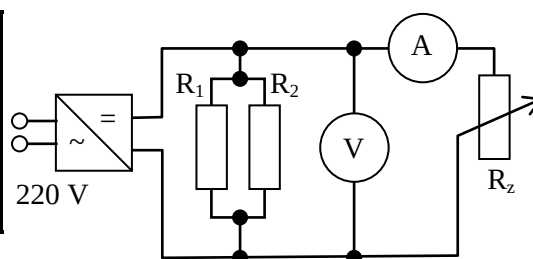
$R_z (\Omega)$	Naprázdno	Nakrátko	$R_{z1} (\Omega)$	$R_{z2} (\Omega)$
U (V)				
I (mA)				
P (W)			-----	-----



Obr. 2 – náhradní zdroj napětí

Náhradní zdroj proudu

$R_z (\Omega)$	Naprázdno	Nakrátko	$R_{z1} (\Omega)$	$R_{z2} (\Omega)$
U (V)				
I (mA)				
P (W)			-----	-----



Obr.3 – náhradní zdroj proudu

Příklad výpočtu:

Závěr:

TEORIE OBVODŮ I - LABORATORNÍ CVIČENÍ

JMÉNO:

SKUPINA:

DATUM:

3. Princip reciprocity a kompenzace

Teoretický rozbor:

Princip reciprocity (věta o vzájemnosti) - platí pro pasivní lineární obvody. Proud v libovolné (k-té) větvi pasivního lineárního obvodu vyvolaný zdrojem umístěným v jiné (x-té) větvi téhož obvodu, je roven proudu v x-té větvi při přemístění zdroje do k-té větve. Pro smyčky je princip reciprocity formulován ve tvaru: Proud v k-té smyčce lineárního pasivního obvodu, vyvolaný zdrojem v x-té smyčce, se rovná proudu v x-té smyčce při přemístění tohoto zdroje do k-té smyčky. Obvody pro které platí princip reciprocity, se nazývají reciproční. Lineární pasivní obvody jsou vždy reciproční. Reciproční prvky jsou takové, které mají v obou směrech polaritu stejné vlastnosti.

Princip kompenzace:

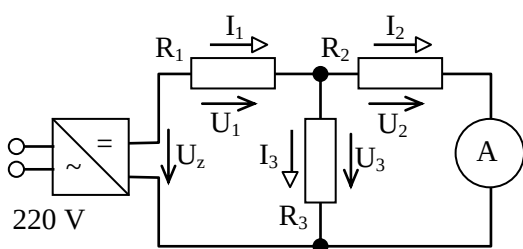
Napětíová kompenzace - napětíové ani proudové poměry v obvodu se nezmění, jestliže je z el. obvodu vyňat kterýkoliv pasivní dvojpól s odporem R , kterým protéká proud I a vytváří na něm napětí $U = R I$, a je nahrazen ideálním zdrojem napětí s vnitřním napětím $U_0 = U$.

Proudová kompenzace - napětíové ani proudové poměry v obvodu se nezmění, jestliže je z el. obvodu vyňat kterýkoliv pasivní dvojpól s odporem R , kterým protéká proud I , a je nahrazen ideálním zdrojem proudu s vnitřním proudem $I_0 = I$.

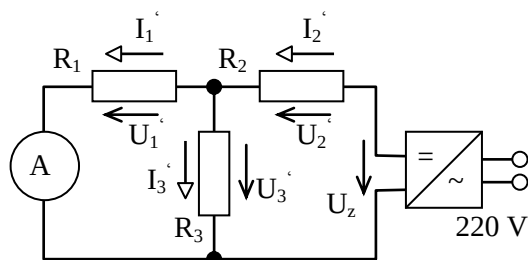
Zadání:

1. Sestavte dvousmyčkový obvod z odporníků známých, ale různých hodnot, a jedním zdrojem – obrázek 1. Hodnoty odporníků zjistíte z tabulky prvků, která je v laboratoři.
2. Výpočtem určete všechny obvodové veličiny. Obvodové veličiny nalezněte libovolnou metodou.
3. Experimentálně ověřte princip reciprocity - obrázek 2.
4. Experimentálně ověřte princip kompenzace. Odporníky ve zvolené větvi nahrad'te ideálním zdrojem proudu – obrázek 3. Kompenzaci posuďte srovnáním obvodových veličin.

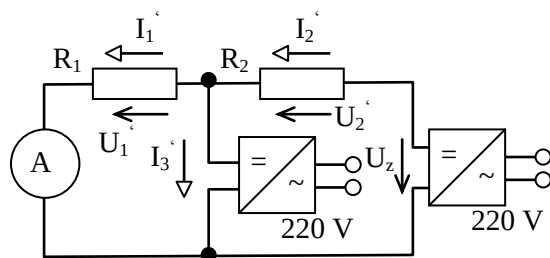
Schéma zapojení:



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Použité přístroje:

Tabulky naměřených hodnot obvodových veličin pro ověření principu reciprocity a kompenzace

Tabulka 1

U_1 (V)	
I_1 (mA)	
U_2 (V)	
I_2 (mA)	
U_3 (V)	
I_3 (mA)	
U_z (V)	

Tabulka 2

U_1' (V)	
I_1' (mA)	
U_2' (V)	
I_2' (mA)	
U_3' (V)	
I_3' (mA)	
U_z (V)	

Tabulka 3

U_1' (V)	
I_1' (mA)	
U_2' (V)	
I_2' (mA)	
U_z (V)	

Příklad výpočtu obvodových veličin:

Závěr:

TEORIE obvodů I - LABORATORNÍ CVIČENÍ

JMÉNO:

SKUPINA:

DATUM:

4. Nelineární obvody

Teoretický rozbor:

Lineární odporový prvek má konstantní odpor nezávislý na velikosti napětí a proudu v něm. Lineární prvek je vždy jen teoretickou idealizací skutečného prvku, jehož odpor závisí na mnoha vlivech, především na teplotě. Nelineární prvky mají závislost proudu na napětí výrazně nelineární, takže náhrada jednoduchými lineárními dvojpóly není možná. Elektrický obvod, který obsahuje jeden nebo více nelineárních prvků - dvojpólů, je nelineární.

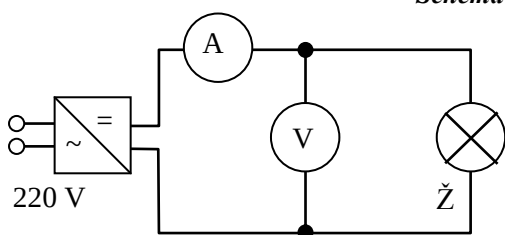
Linearizace:

Pro charakteristiku většiny nelineárních prvků se nedá teoreticky odvodit rovnice, která by ji vyjadřovala s dostatečnou přesností. Pokud je předběžně znám rozsah, v němž se bude měnit napětí nebo proud, je výhodné aproximovat příslušný úsek charakteristiky co nejjednodušší analytickou funkcí, tak aby se dosáhlo požadované přesnosti. Nejvýhodnější je náhrada pracovního úseku charakteristiky přímkou, která má směrnici rovnou diferenciálnímu odporu R_d nelineárního prvku v dané oblasti. Přímka vytíná na ose napětí úsek U_d . Napětí v pracovní oblasti je dáno rovnicí $U = R_d I - U_d$. Je tedy možné nahradit nelineární odporový prvek ekvivalentním náhradním dvojpólem, který je sériovým spojením lineárního odporu R_d a ideálního zdroje napětí s napětím U_d . Nelineární odporový prvek je tímto způsobem linearizován.

Zadání:

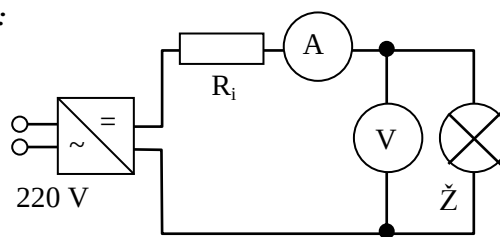
1. Změřte VA charakteristiku žárovky.
2. Změřte napětí a proud protékající žárovkou v případě, kdy je její pracovní bod nastaven předřadným odporem.
3. Výpočtem určete příkon žárovky.
4. Z měření naprázdno a nakrátko určete grafickou metodou hodnoty napětí a proudu v pracovním bodu.
5. Charakteristiku žárovky v pracovním bodu linearizujte a určete příslušné parametry.
6. V náhradním schématu s linearizovaným modelem výpočtem určete příkon žárovky.

Schéma zapojení:

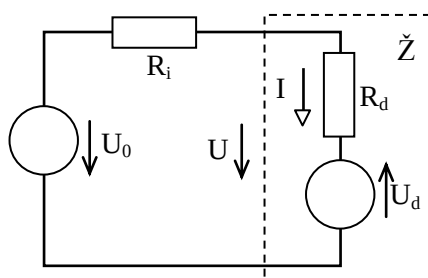


Obr. 1 – měření charakteristiky žárovky

žárovky



Obr. 2 – měření pracovního bodu



Obr. 3 – linearizovaný model žárovky

Použité přístroje:

Tabulka naměřených a vypočtených hodnot

[illegible]

Příklad výpočtu:

Závěr:

TEORIE ODVODŮ I - LABORATORNÍ CVIČENÍ

JMÉNO:

SKUPINA:

DATUM:

5. Měření obvodových veličin v jednofázových střídavých obvodech

Teoretický rozbor:

Komplexní impedance sériového obvodu RLC:

$$\hat{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Modul impedance:

$$Z = |\hat{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Argument impedance:

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Je-li $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, je argument záporný a impedance má kapacitní charakter. Je-li $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, je argument kladný a impedance má indukční charakter.

Rezonance je stav, kdy imaginární složka impedance obvodu s indukčností, kapacitou a odporem je rovna nule. V případě sériového obvodu RLC je $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ - impedance je rovna činnému odporu $\hat{Z} = R$.

Řídicí fázor rezonančního proudu je v reálné ose. Ve fázi s ním je napětí na odporu. Stejně velká napětí na indukčnosti a kapacitě jsou v protifázi a vzájemně se ruší, takže celkové napětí je rovno napětí na odporu a je ve fázi s proudem. Při tom napětí na indukčnosti a kapacitě mohou být mnohonásobně větší než celkové napětí.

Proto se rezonanci v sériovém obvodu RLC říká **napětíová rezonance**. Z podmínky rezonance $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$

plyne vztah pro rezonanční kmitočet - Thomsonův vzorec: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Zadání:

1. Změřte proud a napětí v sériovém obvodu RLC v závislosti na frekvenci. Pro měření obvodových veličin použijte univerzální měřicí přístroje. Měřte v rozsahu kmitočtu 100 Hz až 5 kHz. Při měření udržujte přibližně proud 1 mA.

2. Z naměřených hodnot vypočítejte a vynesete do jednoho grafu absolutní hodnoty $Z(f)$, $X_L(f)$, $X_C(f)$ a $R(f)$. Považujte jednotlivé technické prvky za ideální.

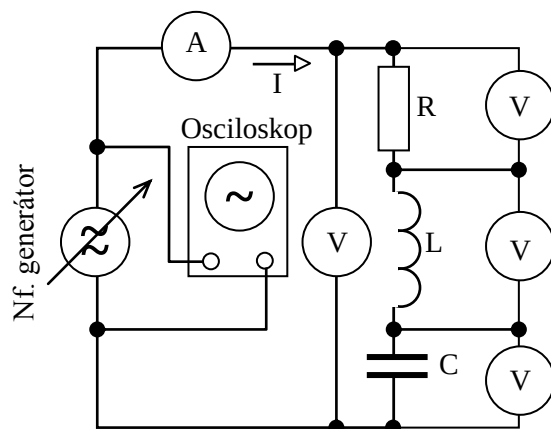
3. Pro jeden kmitočet nakreslete fázorový diagram.

Poznámka:

Protože RC generátory mají vnitřní impedanci 600Ω (kvůli impedančnímu přizpůsobení vůči sdělovacím vedením), je vhodné při jakémkoliv zapojení zařadit do série k výstupním svorkám odporník přibližně stejné hodnoty - předejde se tak případnému přetížení zdroje a následnému zkreslení harmonického průběhu.

Použité přístroje:

Schéma zapojení:



Tabulka naměřených hodnot

f (Hz)	I (mA)	U (V)	U_R (V)	U_L (V)	U_C (V)	Z (Ω)	X_L (Ω)	X_C (Ω)

R (Ω)	f_r (Hz) cívka se vzduch. jádrem	f_r (Hz) cívka s Fe jádrem

Příklad výpočtu:

Závěr:

13. VÝPOČETNÍ ÚLOHY

1. Zvolte si obvod tvořený třemi zdroji, z nichž jeden nebo dva jsou proudové a třemi rezistory. Principem superpozice určete číselné hodnoty napětí a proudu všech obvodových prvků. Řešte pro stejnosměrné veličiny.
2. Zvolte si obvod tvořený ideálním zdrojem napětí nebo proudu a sérioparalelním zapojením pěti rezistorů. Metodou postupného zjednodušování určete číselné hodnoty napětí a proudu všech obvodových prvků. Řešte pro stejnosměrné veličiny.
3. Zvolte si nezatížený dělič napětí nebo proudu tvořený ideálním zdrojem a dvěma rezistory. Určete číselné hodnoty vnitřního odporu děliče, napětí nebo proud naprázdno a výkony všech obvodových prvků (i zdroje). Řešte pro stejnosměrné veličiny.
4. Elektromagnetický jev je modelován buď sériovým nebo paralelním náhradním schématem tvořeným rezistorem, induktorem a kapacitorem. Pro jeden z modelů určete činitel jakosti obvodu, rezonanční kmitočet a vlastní kmitočet obvodu. Nakreslete fázorový diagram veličin pro rezonanční kmitočet a kmitočet menší a větší než rezonanční.
5. Pro okamžité hodnoty napětí $u = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$ a proudu $i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$. Nakreslete fázorový diagram napětí a proudu, fázorový diagram výkonů a napište vzorce pro výpočet hodnot výkonů.
6. Odvoďte podmínku výkonového přizpůsobení stejnosměrného zdroje a zakreslete ji do charakteristiky zdroje.
7. Odvoďte podmínku výkonového přizpůsobení střídavého zdroje.

III. ČÁST: PŘÍKLADY ŘEŠENÍ

14. PŘÍKLADY ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚKOLŮ

Úkol č. 1: Pro sérioparalelní řazení dvou rezistorů, jednoho induktoru, kapacitoru a ideálního zdroje napětí jsou zadány číselné hodnoty reaktancí, odporů, kmitočtu a jedné z obvodových veličnin.

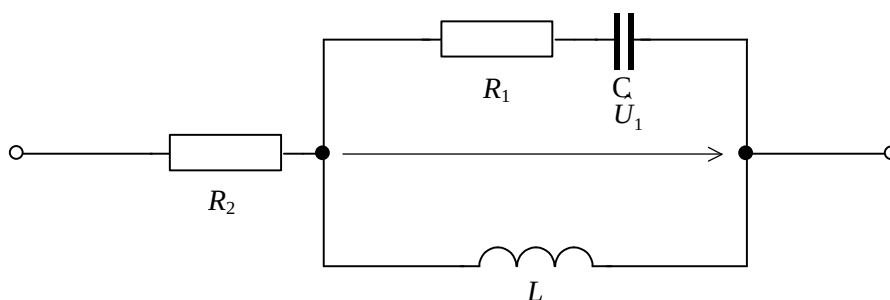
a) Ve schématu zapojení nakreslete počítací šipky všech obvodových veličnin, nakreslete jejich orientační fázorový diagram a výpočtem určete jejich číselné hodnoty.

b) Určete číselnou hodnotu celkového komplexního zdánlivého výkonu, činného a jalového výkonu.

c) Určete číselné maximální hodnoty energie elektrického pole kapacitoru a magnetického pole induktoru.

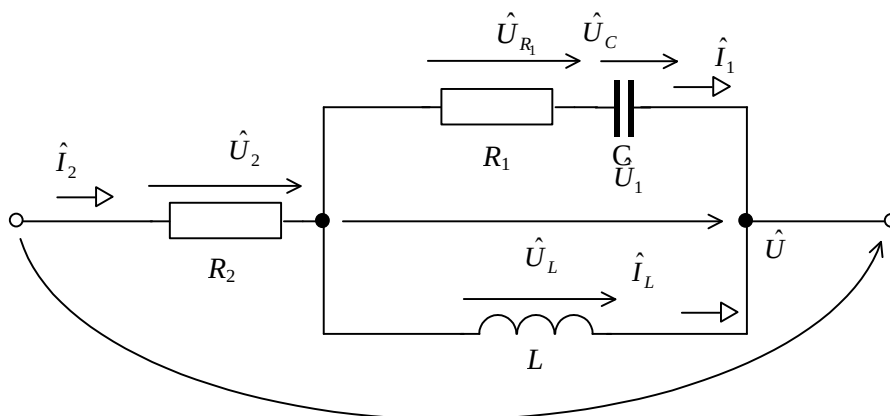
d) Vyjádřete okamžité hodnoty napětí a proudů kapacitoru a induktoru pro libovolný čas t .

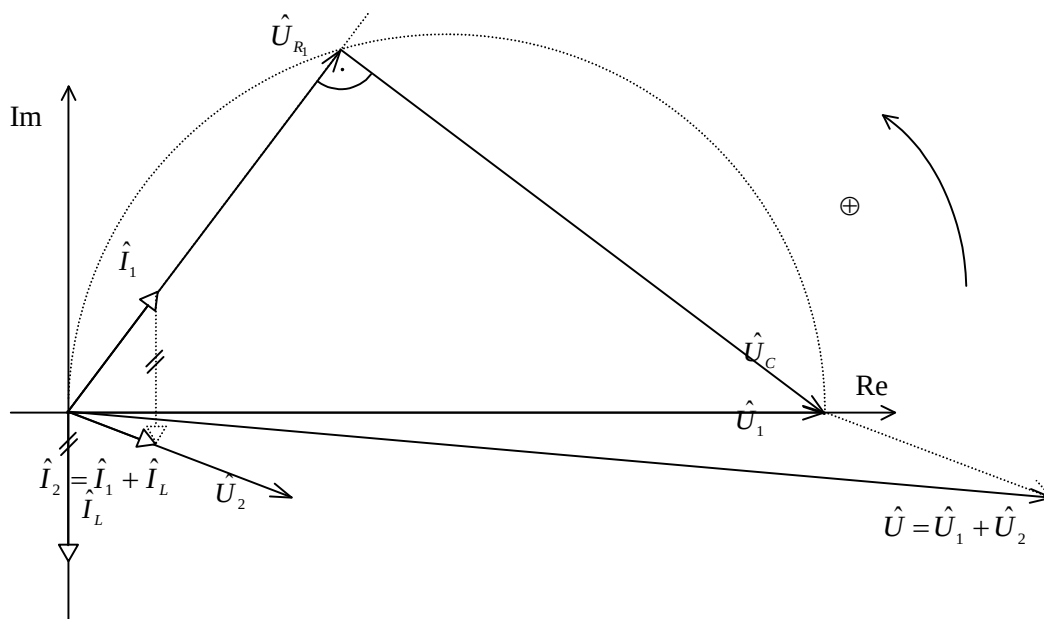
V zadaném schématu zapojení obvodu v harmonicky ustáleném stavu postupujte podle bodů zadání úkolu č. 1. Zadané hodnoty jsou $R_1 = 6 \, \Omega$, $R_2 = 5 \, \Omega$, $X_C = 8 \, \Omega$, $X_L = 10 \, \Omega$, $\hat{U}_1 = 10 \, \text{V}$, $f = 10 \, \text{kHz}$.



Výsledky:

ad a)





$$\hat{U}_L = \hat{U}_1$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_1} = \frac{\hat{U}_{R_1} + \hat{U}_C}{\hat{Z}_1} = \frac{10}{10e^{-j53,13^\circ}} = 1e^{j53,13^\circ} = (0,6 + j0,8) \text{ A}$$

$$\hat{I}_L = \frac{\hat{U}_L}{jX_L} = \frac{\hat{U}_1}{jX_L} = \frac{10}{j10} = -j1 = 1e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

$$\hat{U}_{R_1} = R_1 \hat{I}_1 = 6 \cdot 1e^{j53,13^\circ} = 6e^{j53,13^\circ} = (3,6 + j4,8) \text{ V}$$

$$\hat{U}_C = -jX_C \hat{I}_1 = -j8 \cdot 1e^{j53,13^\circ} = 8e^{j90^\circ} \cdot 1e^{j53,13^\circ} = 8e^{j36,87^\circ} = (6,4 - j4,8) \text{ V}$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \hat{I}_L = 0,6 + j0,8 + (-j1) = 0,6 - j0,2 = 0,632 e^{-j18,43^\circ} \text{ A}$$

$$\hat{U}_2 = R_2 \hat{I}_2 = 5 \cdot 0,632 e^{-j18,43^\circ} = 3,16e^{-j18,43^\circ} = (3 - j1) \text{ V}$$

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = 10 + 3 - j1 = 13 - j1 = 13,04e^{-j4,40^\circ} \text{ V}$$

ad b)

$$\hat{S} = \hat{U} \hat{I}_2^* = 13,04 e^{-j4,40^\circ} \cdot 0,632 e^{j18,43^\circ} = 8,24e^{j14,03^\circ} = (8 + j2) \text{ VA}$$

$$P = \text{Re}\{\hat{S}\} = 8 \text{ W}$$

$$Q = \text{Im}\{\hat{S}\} = 2 \text{ var}$$

Jalový výkon má kladné znaménko, což odpovídá výslednému induktivnímu charakteru obvodu.

ad c)

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 8} \cong 2 \mu\text{F}$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{10}{2\pi \cdot 10^4} = 159 \mu\text{H}$$

$$W_{el \max} = \frac{1}{2} C U_{C \max}^2 = \frac{1}{2} C (\sqrt{2} U_C)^2 = C U_C^2 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 8^2 = 128 \cdot 10^{-6} \text{ VAs}$$

$$W_{mg \max} = \frac{1}{2} L I_{L \max}^2 = \frac{1}{2} L (\sqrt{2} I_L)^2 = L I_L^2 = 159 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2 = 159 \cdot 10^{-6} \text{ VAs}$$

ad d)

$$\begin{aligned} u_C &= \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{U}_C e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{U}_C e^{j2\pi f t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ 8 e^{-j\frac{36,87^\circ}{180^\circ} \pi} e^{j2\pi \cdot 10^4 t} \right\} = \\ &= \sqrt{2} \cdot 8 \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t - \frac{36,87}{180} \pi) \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

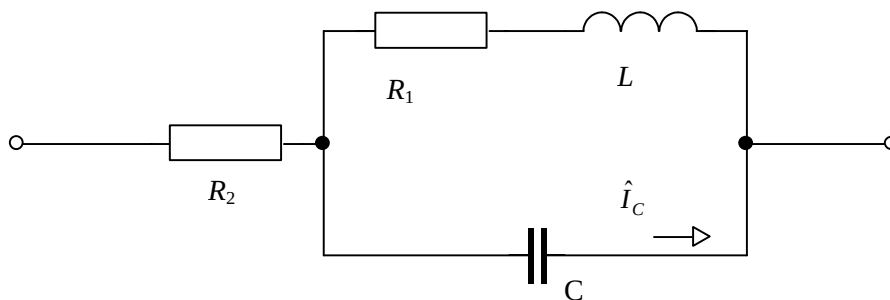
$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_1 e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_1 e^{j2\pi f t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ 1 e^{j\frac{53,13^\circ}{180^\circ} \pi} e^{j2\pi \cdot 10^4 t} \right\} = \\ &= \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t + \frac{53,13}{180} \pi) \quad (\text{A}) \end{aligned}$$

$$u_L = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{U}_L e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{U}_L e^{j2\pi f t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ 10 e^{j0} e^{j2\pi \cdot 10^4 t} \right\} = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t) \quad (\text{V})$$

$$i_L = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_L e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_L e^{j2\pi f t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ 1 e^{-j\frac{90^\circ}{180^\circ} \pi} e^{j2\pi \cdot 10^4 t} \right\} = \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{A})$$

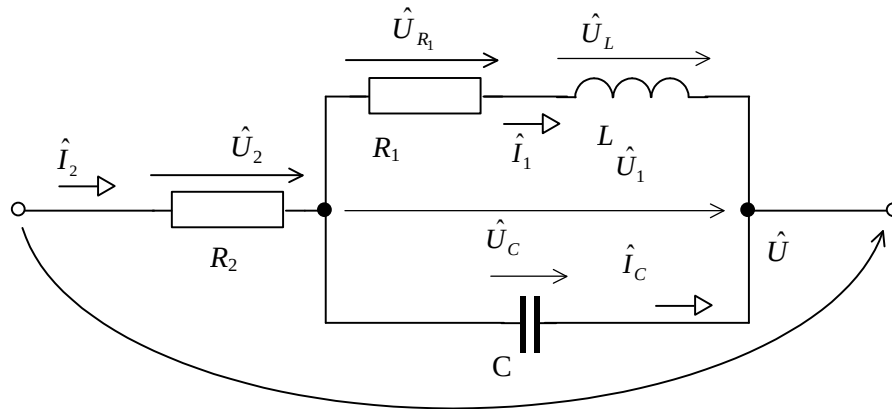
Příklad 1.1.

V zadaném schématu zapojení obvodu v harmonicky ustáleném stavu postupujte podle bodů zadání úkolu č. 1. Zadané hodnoty jsou $R_1 = 6 \, \Omega$, $R_2 = 5 \, \Omega$, $X_C = 10 \, \Omega$, $X_L = 8 \, \Omega$, $\hat{I}_C = 1 e^{j90^\circ} \text{ A}$, $f = 10 \text{ kHz}$.



Výsledky:

ad a)



$$\hat{U}_C = \hat{U}_1 = -jX_C \hat{I}_C = -j10 \cdot 1e^{j90^\circ} = 10e^{-j90^\circ} \cdot 1e^{j90^\circ} = 10V$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{R_1 + jX_L} = \frac{10}{6 + j8} = \frac{10}{6 + j8} \cdot \frac{6 - j8}{6 - j8} = \frac{10 \cdot (6 - j8)}{100} = (0,6 - j0,8) = 1e^{-j53,13^\circ} A$$

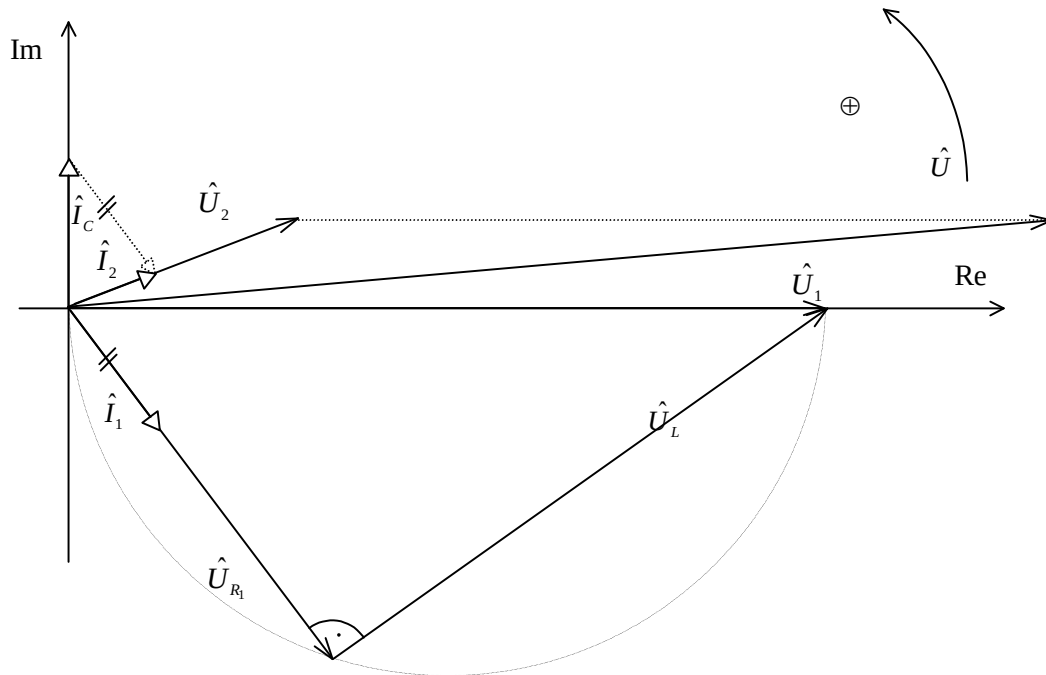
$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \hat{I}_C = 0,6 - j0,8 + j1 = (0,6 + j0,2)A = 0,632e^{j18,43^\circ} A$$

$$\hat{U}_2 = R_2 \hat{I}_2 = 5 \cdot (0,6 + j0,2) = (3 + j1)V = 3,16e^{j18,43^\circ} V$$

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = 10 + 3 + j1 = (13 + j1)V = 13,04e^{j4,40^\circ} V$$

$$\hat{U}_L = jX_L \hat{I}_1 = j8 \cdot 1e^{-j53,13^\circ} = 8e^{j90^\circ} \cdot 1e^{-j53,13^\circ} = 8e^{j36,87^\circ} V$$

$$\hat{U}_{R_1} = R_1 \hat{I}_1 = 6 \cdot 1e^{-j53,13^\circ} = 6e^{-j53,13^\circ} V$$



ad b)

$$\hat{S} = \hat{U} \hat{I}_2^* = (13 + j1) \cdot (0,6 - j0,2) = (8 - j2) \text{ VA}$$

$$P = \operatorname{Re}\{\hat{S}\} = 8 \text{ W}$$

$$Q = \operatorname{Im}\{\hat{S}\} = -2 \text{ var}$$

Výsledný charakter obvodu je kapacitní, jelikož jalový výkon má záporné znaménko.

ad c)

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{8}{2\pi \cdot 10^4} = 127 \text{ } \mu\text{H}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 10} = 1,59 \text{ } \mu\text{F}$$

$$W_{mg \max} = L I_1^2 = 1,27 \cdot 10^{-4} \cdot 1^2 = 1,27 \cdot 10^{-4} \text{ VAs}$$

$$W_{el \max} = C U_1^2 = 1,59 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2 = 1,59 \cdot 10^{-4} \text{ VAs}$$

ad d)

$$\begin{aligned} u_L &= \sqrt{2} \operatorname{Im}\{\hat{U}_L e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Im}\{\hat{U}_L e^{j2\pi f t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Im}\left\{8 e^{j\frac{36,87^\circ}{180^\circ}\pi} e^{j2\pi \cdot 10^4 t}\right\} = \\ &= \sqrt{2} \cdot 8 \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t + \frac{36,87}{180}\pi) \text{ (V)} \end{aligned}$$

$$i_1 = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_1 e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_1 e^{j2\pi f t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ 1 e^{-j \frac{53,13^\circ}{180^\circ} \pi} e^{j2\pi \cdot 10^4 t} \right\} =$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(2\pi \cdot 10^4 \cdot t - \frac{53,13}{180} \pi \right) \quad (\text{A})$$

$$u_C = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{U}_C e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{U}_C e^{j2\pi f t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ 10 e^{j0} e^{j2\pi \cdot 10^4 t} \right\} = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(2\pi \cdot 10^4 \cdot t) \quad (\text{V})$$

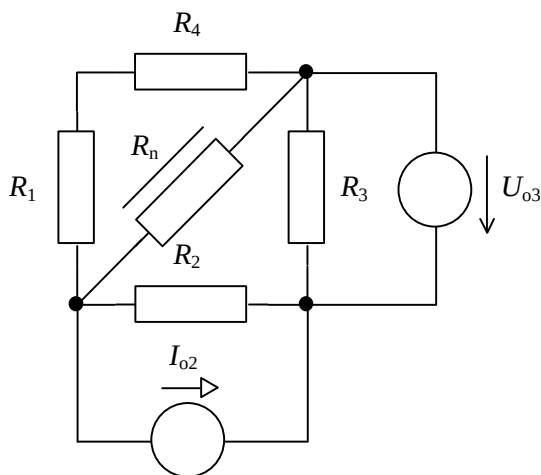
$$i_C = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_C e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{I}_C e^{j2\pi f t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ 1 e^{j \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi} e^{j2\pi \cdot 10^4 t} \right\} = \sqrt{2} \sin \left(2\pi \cdot 10^4 \cdot t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A})$$

Úkol č. 2: Stejnoseměrný obvod obsahuje jeden nelineární prvek, jehož charakteristika je zadána tabulkou, čtyři rezistory, jeden ideální napěťový a proudový zdroj. Hodnoty lineárních prvků jsou zadány číselně.

- Lineární část obvodu nahraďte ekvivalentním zdrojem.
- Grafickou metodou nalezněte pracovní bod a stanovte ztrátový výkon na nelineárním prvku.
- Charakteristiku nelineárního prvku v pracovním bodě zlinearizujte, stanovte parametry a za těchto podmínek určete ztrátový výkon na nelineárním prvku.
- Z hlediska ztrátového výkonu zhodnoťte řešení v bodě a) a b)

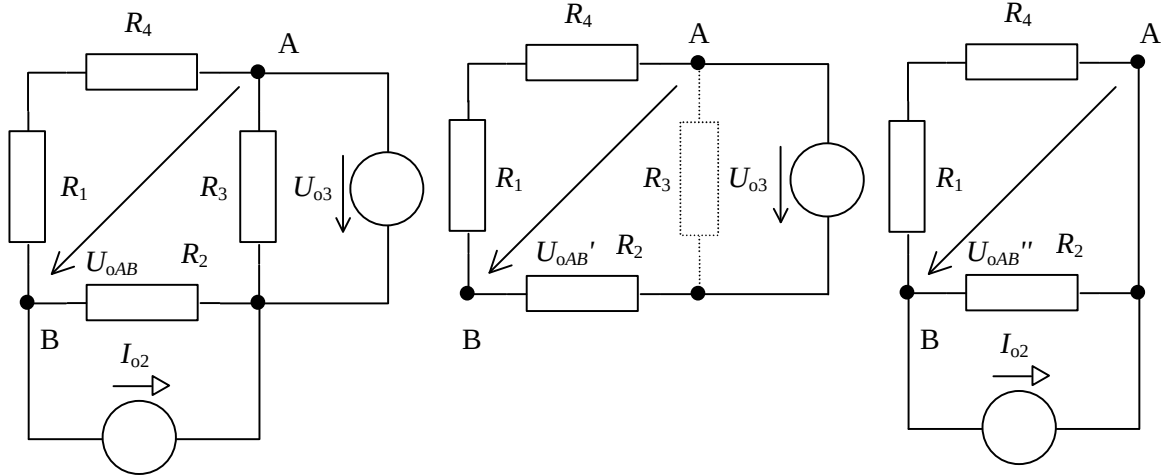
V zadaném schématu zapojení stejnosměrného obvodu s jedním nelineárním prvkem, jehož charakteristika je zadána tabulkou, postupujte podle bodů zadání úkolu č. 2. Zadané hodnoty jsou $U_{03} = 4,2 \text{ V}$, $I_{02} = 1,4 \text{ A}$, $R_1 = 1 \, \Omega$, $R_2 = 2 \, \Omega$, $R_3 = 3 \, \Omega$, $R_4 = 4 \, \Omega$.

$I \text{ (A)}$	$U \text{ (V)}$
0	0
0,5	0,5
1,0	1,1
1,5	2,0
2,0	3,0
2,5	4,3
3,0	5,6



Výsledky:

ad a)



$$U_{\text{oAB}}' = U_{\text{o3}} \frac{R_1 + R_4}{R_2 + R_1 + R_4} = 4,2 \frac{1+4}{2+1+4} = 3 \text{ V}$$

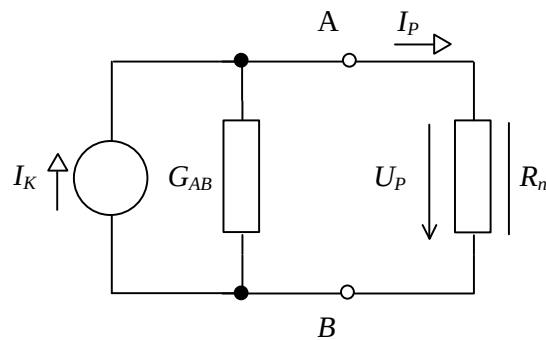
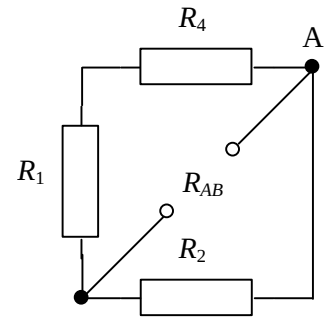
$$U_{\text{oAB}}'' = R_2 I_{\text{o2}} \frac{R_1 + R_4}{R_2 + R_1 + R_4} = 2 \cdot 1,4 \cdot \frac{1+4}{2+1+4} = 2 \text{ V}$$

$$U_{\text{oAB}} = U_{\text{oAB}}' + U_{\text{oAB}}'' = 3 + 2 = 5 \text{ V}$$

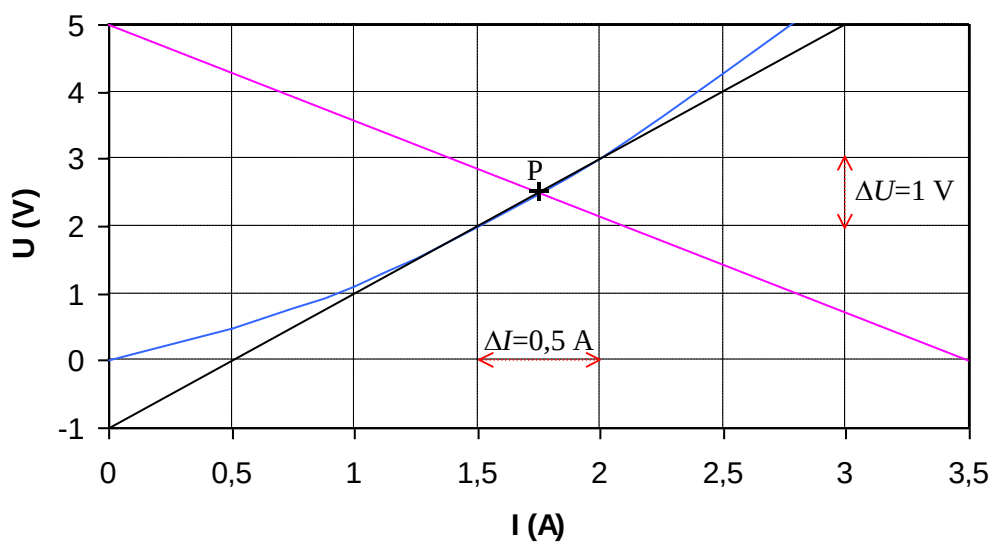
$$R_{\text{AB}} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_4)}{R_2 + R_1 + R_4} = \frac{2 \cdot (1+4)}{2+1+4} = \frac{10}{7} \Omega$$

$$G_{\text{AB}} = \frac{1}{R_{\text{AB}}} = \frac{7}{10} \text{ S}$$

$$I_K = \frac{U_{\text{oAB}}}{R_{\text{AB}}} = \frac{5}{\frac{10}{7}} = 3,5 \text{ A}$$



ad b)

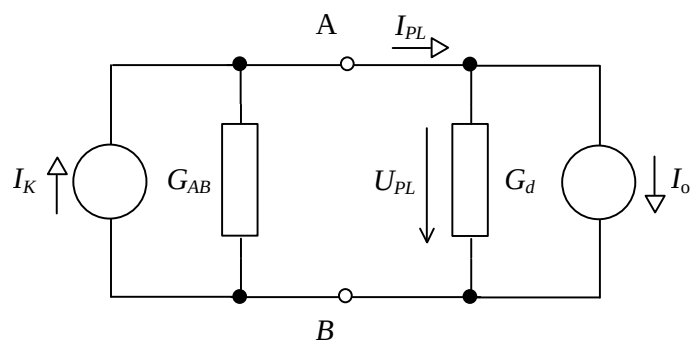


$$U_p = 2,5 \text{ V}$$

$$I_p = 1,75 \text{ A}$$

$$P_Z = U_p \cdot I_p = 2,5 \cdot 1,75 = 4,375 \text{ W}$$

ad c)



$$\Delta U = 3 - 2 = 1 \text{ V} \quad U_o = -1 \text{ V}$$

$$\Delta I = 2 - 1,5 = 0,5 \text{ A} \quad I_o = 0,5 \text{ A}$$

$$G_d = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ S}$$

$$U_{PL} = \frac{I_K - I_o}{G_{AB} + G_d} = \frac{3,5 - 0,5}{0,7 + 0,5} = \frac{3}{1,2} = 2,5 \text{ V}$$

$$I_{PL} = G_d \cdot U_{PL} + I_o = 2,5 \cdot 0,5 + 0,5 = 1,75 \text{ A}$$

$$P_{ZL} = U_{PL} \cdot I_{PL} = 2,5 \cdot 1,75 = 4,375 \text{ W}$$

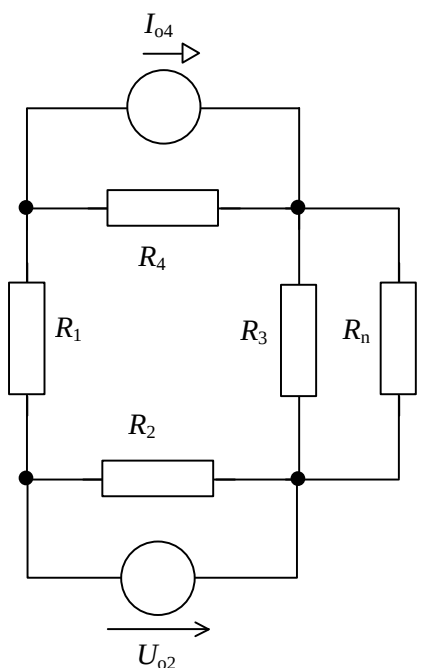
ad d)

Nelineární prvek se chová jako spotřebič.

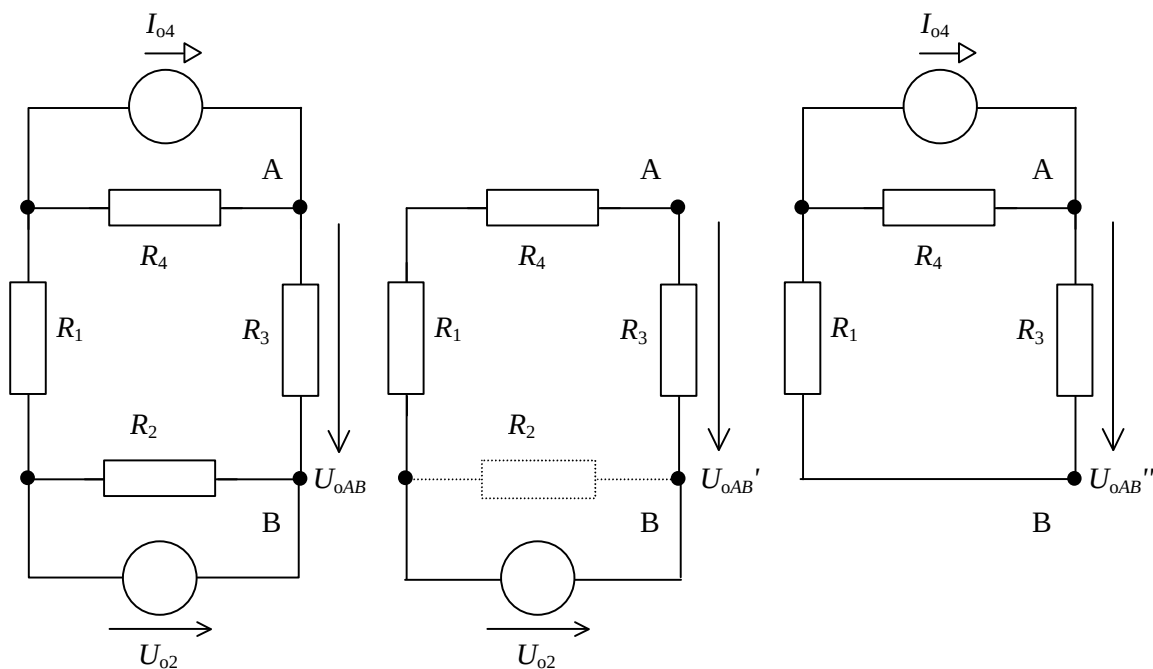
Příklad 1.2.

V zadaném schématu zapojení stejnosměrného obvodu s jedním nelineárním prvkem, jehož charakteristika je zadána tabulkou, postupujte podle bodů zadání úkolu č. 2. Zadané hodnoty jsou $U_{02} = 12 \text{ V}$, $I_{04} = 1 \text{ A}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$.

$I \text{ (A)}$	$U \text{ (V)}$
0	0
0,25	1,5
0,50	2,5
0,75	3,3
1,00	4,0
1,25	4,4
1,50	4,7
1,75	5,0
2,00	5,2



Výsledky:



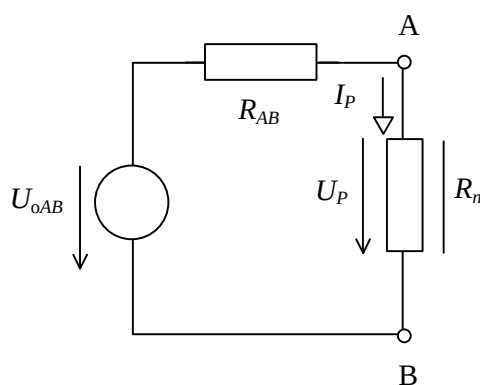
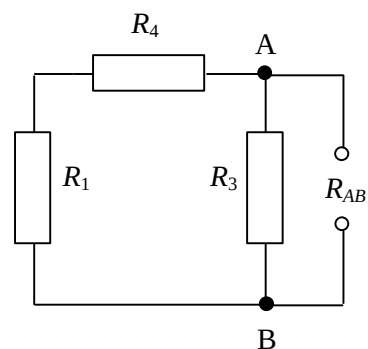
$$U_{AB}' = U_{02} \frac{R_3}{R_3 + R_1 + R_4} = 12 \frac{3}{3+1+4} = 4,5 \text{ V}$$

$$U_{AB}'' = R_3 I_{04} \frac{R_4}{R_3 + R_1 + R_4} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3+1+4} = 1,5 \text{ V}$$

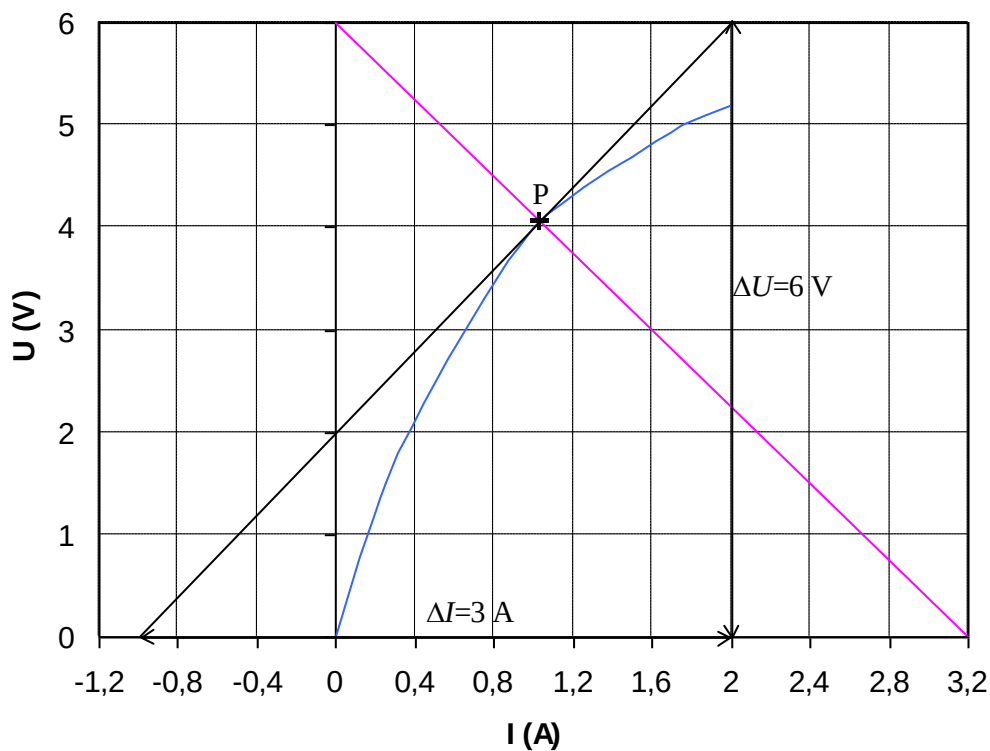
$$U_{AB} = U_{AB}' + U_{AB}'' = 4,5 + 1,5 = 6 \text{ V}$$

$$R_{AB} = \frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_3 + R_1 + R_4} = \frac{3 \cdot (1+4)}{3+1+4} = 1,875 \Omega$$

$$I_K = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{6}{1,875} = 3,2 \text{ A}$$



ad b)

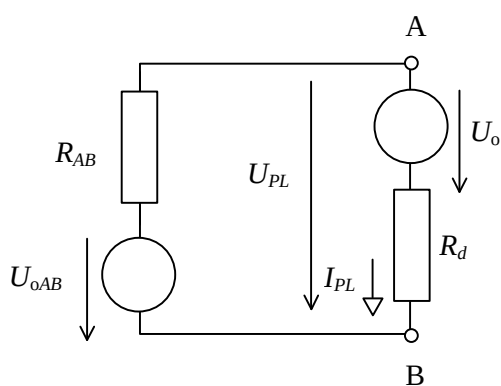


$$U_p = 4,08 \text{ V}$$

$$I_p = 1,025 \text{ A}$$

$$P_Z = U_p \cdot I_p = 4,08 \cdot 1,025 = 4,18 \text{ W}$$

ad c)



$$\Delta U = 6 \text{ V} \quad U_o = 2 \text{ V}$$

$$\Delta I = 3 \text{ A} \quad I_o = -1 \text{ A}$$

$$R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{6}{3} = 2 \, \Omega$$

$$I_{PL} = \frac{U_{oAB} - U_o}{R_{AB} + R_d} = \frac{6 - 2}{1,875 + 2} = 1,03 \text{ A}$$

$$U_{PL} = R_d \cdot I_{PL} + U_o = 2 \cdot 1,03 + 2 = 4,06 \text{ V}$$

$$P_{ZL} = U_{PL} \cdot I_{PL} = 4,06 \cdot 1,03 = 4,18 \text{ W}$$

ad d)

Nelineární prvek se chová jako spotřebič.

Úkol č. 3: Pro sériové nebo paralelní zapojení dvou pasivních prvků - rezistoru a induktoru nebo kapacitoru a ideálního zdroje proudu (v sériovém obvodu) nebo napětí v (paralelním obvodu) střídavých neharmonických průběhů napište rovnice pro:

a) okamžité hodnoty odezvy rezistoru, induktoru (kapacitoru), zdroje a jejich efektivní hodnoty

b) okamžité hodnoty výkonů jednotlivých prvků a jejich integrální hodnoty

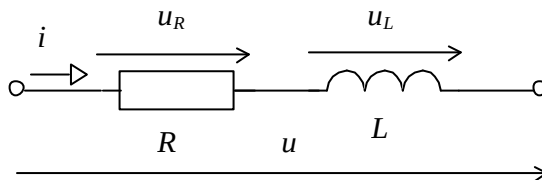
Pro zadané číselné hodnoty parametrů pasivních prvků a okamžitých hodnot veličiny zdroje – jsou součtem 1. a k -té harmonické ($v = v_1 + v_k$) určete číselné hodnoty:

c) efektivních hodnot všech veličin

d) integrálních hodnot výkonu a jeho složek, imitace a jejich složek

Příklad 1.3.

V zadaném schématu zapojení střídavého obvodu postupujte podle bodů zadání úkolu č. 3.



Výsledky:

ad a)

$$u = u_R + u_L = Ri + Li'$$

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = (RI)^2 + (LI')^2$$

ad b)

$$p = ui = (u_R + u_L)i = p_R + p_L$$

$$P^2 = U^2 I^2 = (U_R^2 + U_L^2) I^2 = P_R^2 + P_L^2$$

Doplnění zadání: $R = 2 \, \Omega$; $L = \omega^{-1} \text{ H}$

$$i = \sqrt{2} \cdot (4 \sin \omega \cdot t + 3 \sin 2\omega \cdot t) \quad (\text{A})$$

Řešení:

ad c)

$$i' = \frac{di}{dt} = \sqrt{2} \cdot (\omega \cdot 4 \cos \omega \cdot t + 2 \cdot \omega \cdot 3 \cos 2 \cdot \omega \cdot t) \quad (\text{As}^{-1})$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ A}$$

$$I' = \sqrt{(I_1')^2 + (I_2')^2} = \omega \cdot \sqrt{4^2 + 6^2} = \omega \cdot \sqrt{52} \quad (\text{As}^{-1})$$

$$U_R = RI = 2 \cdot 5 = 10 \text{ V}$$

$$U_L = LI' = \omega^{-1} \cdot \omega \cdot \sqrt{52} = \sqrt{52} \text{ V}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{100 + 52} = \sqrt{152} \text{ V}$$

ad d)

$$P = UI = 5 \cdot \sqrt{152} \text{ VA}$$

$$P_R = U_R I = 10 \cdot 5 = 50 \text{ W}$$

$$P_L = U_L I = 5 \cdot \sqrt{52} \text{ var}$$

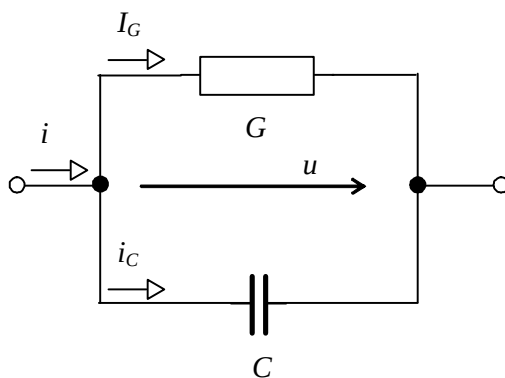
$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{152}}{5} \Omega$$

$$Z_R = \frac{U_R}{I} = \frac{10}{5} = 2 \Omega$$

$$Z_L = \frac{U_L}{I} = \frac{\sqrt{52}}{5} \Omega$$

Příklad 1.4.

V zadaném schématu zapojení střídavého obvodu postupujte podle bodů zadání úkolu č. 3.

**Výsledky:**

ad a)

$$i = i_G + i_C = Gu + Cu'$$

$$I^2 = I_G^2 + I_C^2 = (GU)^2 + (CU')^2$$

ad b)

$$p = iu = (i_G + i_C)u = p_G + p_C$$

$$P^2 = I^2 U^2 = (I_G^2 + I_C^2)U^2 = P_G^2 + P_C^2$$

Doplnění zadání: $G = 2 \text{ S}$; $C = \omega^{-1} \text{ F}$

$$u = \sqrt{2} \cdot (4 \sin \omega \cdot t + 3 \sin 2\omega \cdot t) \quad (\text{V})$$

Řešení:

ad c)

$$u' = \frac{du}{dt} = \sqrt{2} \cdot (\omega \cdot 4 \cos \omega \cdot t + 2 \cdot \omega \cdot 3 \cos 2 \cdot \omega \cdot t) \quad (\text{Vs}^{-1})$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ V}$$

$$U' = \sqrt{(U_1')^2 + (U_2')^2} = \omega \cdot \sqrt{4^2 + 6^2} = \omega \cdot \sqrt{52} \quad (\text{Vs}^{-1})$$

$$I_G = GU = 2 \cdot 5 = 10 \text{ A}$$

$$I_C = CU' = \omega^{-1} \cdot \omega \cdot \sqrt{52} = \sqrt{52} \text{ A}$$

$$I = \sqrt{I_G^2 + I_C^2} = \sqrt{100 + 52} = \sqrt{152} \text{ A}$$

ad d)

$$P = IU = 5 \cdot \sqrt{152} \text{ VA}$$

$$P_G = I_G U = 10 \cdot 5 = 50 \text{ W}$$

$$P_C = I_C U = 5 \cdot \sqrt{52} \text{ var}$$

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{\sqrt{152}}{5} \text{ S}$$

$$Y_G = \frac{I_G}{U} = \frac{10}{5} = 2 \text{ S}$$

$$Y_C = \frac{I_C}{U} = \frac{\sqrt{52}}{5} \text{ S}$$

Zpracoval: Petr Orság a Karel Chrobáček

15. PŘÍKLADY ŘEŠENÍ PROJEKTU

V dané kostře obvodu tvořeného šesti větvemi a čtyřmi uzly charakterizujte jednotlivé větve tak, aby jedna z nich byla tvořena:

- ideálním zdrojem napětí,
- ideálním zdrojem proudu,
- skutečným zdrojem napětí,
- skutečným zdrojem proudu

a dvě větve rezistory. Student si sám volí číselné hodnoty parametrů.

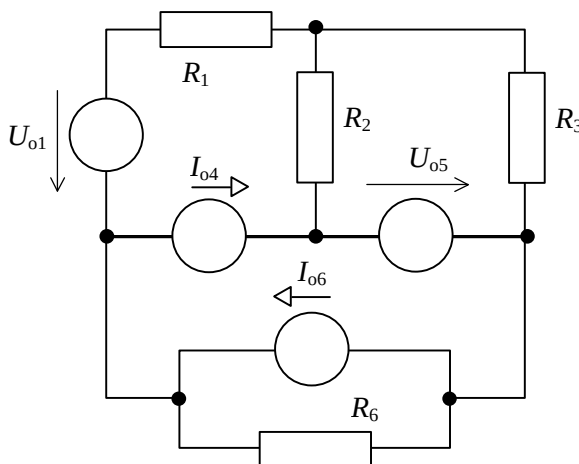
Specifikace problémů:

- a) vytvořte soubor větví stromu, nezávislých větví, nezávislých řezů a nezávislých smyček,
- b) orientujte každý nezávislý řez počítací šipkou, sestavte soustavu obvodových rovnic a vyřešte je,
- c) orientujte každou nezávislou smyčku počítací šipkou, sestavte soustavu obvodových rovnic a vyřešte je,
- d) ověřte, zda vypočtené hodnoty vyhovují Kirchhoffovým zákonům,
- e) určete hodnoty výkonu každého zdroje a rozhodněte, zda dodává nebo odebírá energii,
- f) ověřte, zda vypočtené hodnoty výkonů vyhovují Tellegenově větě.
- g) celková odborná úroveň řešení projektu (je podmíněna nenulovým hodnocením alespoň čtyř z dílčích problémů a, b, c, d, e, f, grafickou úrovní zpracování a požadovanou formou zápisu číselných výpočtů: obecný výraz, dosazení do něj, výsledek, jednotka).

Každý dílčí úkol je hodnocen 0 nebo 1 bodem. Bodové hodnocení semestrálního projektu N je součtem bodových ohodnocení dílčích úkolů a hodnoty sčítance termínu odevzdání A , jenž před 15. prosincem má hodnotu 3 body, jinak 0 bodu, potom $N = (a + b + c + d + e + f + g + A)$.

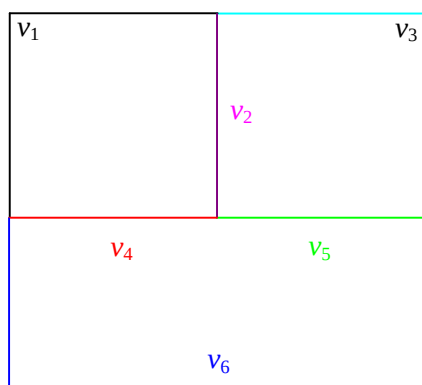
Příklad 1.5.

V zadaném schématu zapojení stejnosměrného obvodu postupujte podle bodů zadání projektu. Zadané hodnoty jsou: $U_{01} = 1 \text{ V}$, $U_{05} = 5 \text{ V}$, $I_{04} = 4 \text{ A}$, $I_{06} = 6 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_6 = 1 \Omega$.

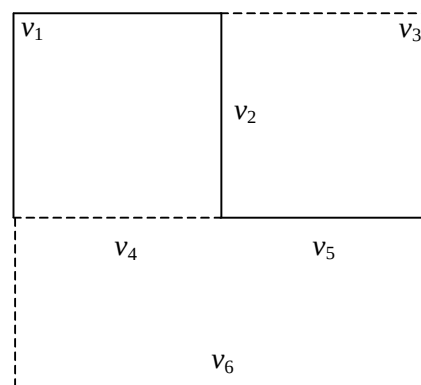


Výsledky:

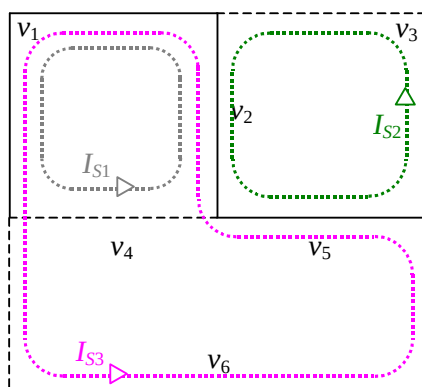
ad a)



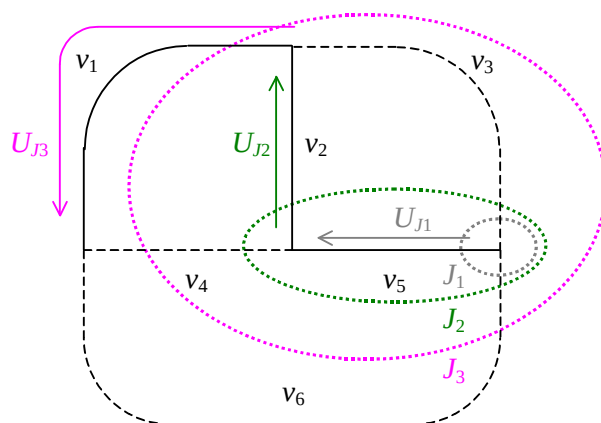
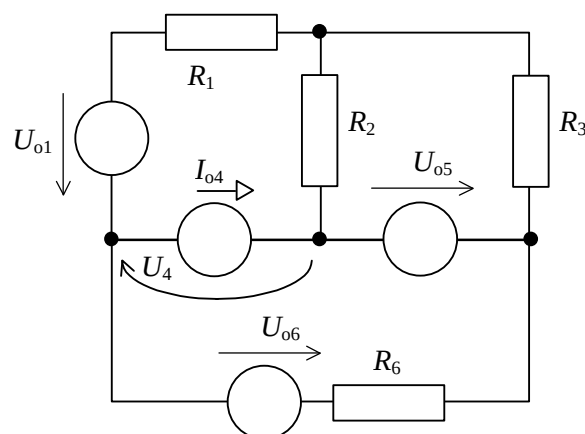
větve kostry zadaného obvodu



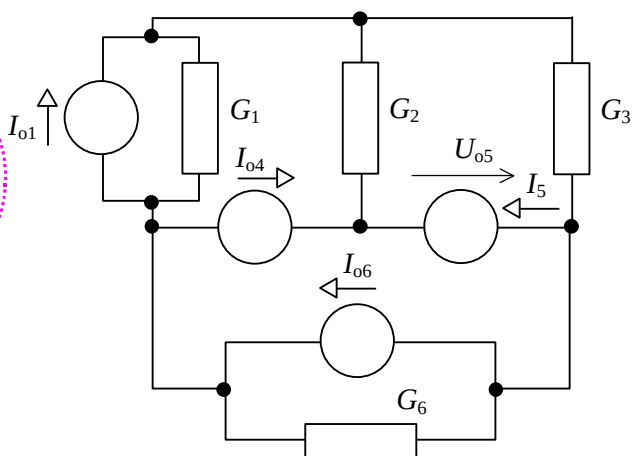
strom obvodu — nezávislé větve obvodu ---



nezávislé smyčky upraveného obvodu



nezávislé řezy upraveného obvodu

Větve stromu: v_1, v_2, v_5 Nezávislé větve: v_3, v_4, v_6

Nezávislé řezy: $J_1 \in \langle v_3, v_5, v_6 \rangle$

$$J_2 \in \langle v_2, v_3, v_4, v_6 \rangle$$

$$J_3 \in \langle v_1, v_4, v_6 \rangle$$

Nezávislé smyčky: $S_1 \in \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$

$$S_2 \in \langle v_2, v_3, v_5 \rangle$$

$$S_3 \in \langle v_1, v_2, v_5, v_6 \rangle$$

ad b)

Parametry náhradního zdroje proudu:

$$G_1 = R_1^{-1} = 1^{-1} = 1 \text{ S}$$

$$I_{o1} = G_1 U_{o1} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ V}$$

Obvodové rovnice:

$$\text{řez } J_1: I_5 + I_{o6} + G_6 (U_{J1} + U_{J2} + U_{J3}) + G_3 (U_{J1} + U_{J2}) = 0$$

$$\text{řez } J_2: I_{o6} + G_6 (U_{J1} + U_{J2} + U_{J3}) + G_3 (U_{J1} + U_{J2}) + G_2 U_{J2} - I_{o4} = 0$$

$$\text{řez } J_3: -I_{o1} + G_1 U_{J3} + I_{o6} + G_6 (U_{J1} + U_{J2} + U_{J3}) - I_{o4} = 0.$$

Maticový zápis obvodových rovnic s ohledem na rovnost $U_{J1} = -U_{o5} = -5 \text{ V}$:

$$\begin{bmatrix} G_3 + G_6 & G_3 + G_6 & G_6 \\ G_3 + G_6 & G_2 + G_3 + G_6 & G_6 \\ G_6 & G_6 & G_1 + G_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -U_{o5} \\ U_{J2} \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_5 - I_{o6} \\ I_{o4} - I_{o6} \\ I_{o1} + I_{o4} - I_{o6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ U_{J2} \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_5 - 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Řešení rovnic: $U_{J2} = 2,4 \text{ V}$, $U_{J3} = 0,8 \text{ V}$, $I_5 = -1,6 \text{ A}$

ad c)

Parametry náhradního zdroje napětí:

$$R_6 = 1 \Omega$$

$$U_{o6} = R_6 I_{o6} = 1 \cdot 6 = 6 \text{ V}$$

Obvodové rovnice:

smyčka S_1 : $-U_4 + R_2 (I_{S1} - I_{S2} + I_{S3}) + R_1 (I_{S1} + I_{S3}) + U_{o1} = 0$

smyčka S_2 : $R_3 I_{S2} + R_2 (I_{S2} - I_{S1} - I_{S3}) + U_{o5} = 0$

smyčka S_3 : $U_{o6} + R_6 I_{S3} - U_{o5} + R_2 (I_{S3} + I_{S1} - I_{S2}) + R_1 (I_{S3} + I_{S1}) + U_{o1} = 0$.

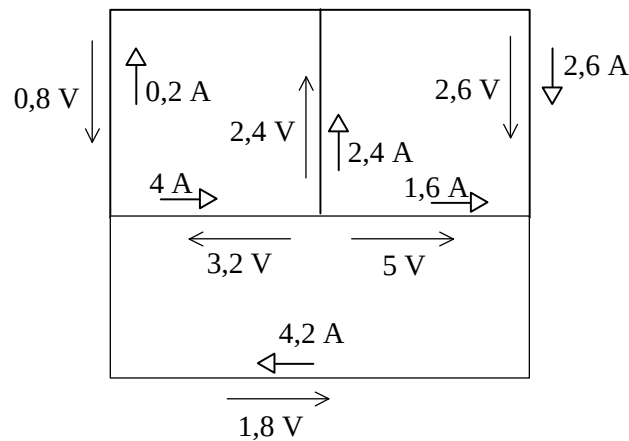
Maticový zápis obvodových rovnic s ohledem na rovnost $I_{S1} = I_{o4} = 4 \text{ A}$:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & R_1 + R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_2 \\ R_1 + R_2 & -R_2 & R_1 + R_2 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{o4} \\ I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_4 - U_{o1} \\ -U_{o5} \\ -U_{o6} + U_{o5} - U_{o1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ I_{S2} \\ I_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_4 - 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Řešení rovnic: $I_{S2} = -2,6 \text{ A}$, $I_{S3} = -4,2 \text{ A}$, $U_4 = 3,2 \text{ V}$

ad d)



ad e)

$$P_{o1} = -U_{o1} \cdot I_1 = 1 \cdot 0,2 = -0,2 \text{ W}$$

dodává energii

$$P_{o4} = -U_4 \cdot I_{o4} = -3,2 \cdot 4 = -12,8 \text{ W}$$

dodává energii

$$P_{o5} = U_{o5} \cdot I_5 = 5 \cdot 1,6 = 8 \text{ W}$$

odebírá energii

$$P_{o6} = -U_6 \cdot I_{o6} = -1,8 \cdot 6 = -10,8 \text{ W}$$

dodává energii

$$P_{R_1} = U_{R_1} \cdot I_1 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = U_2 \cdot I_2 = 2,4 \cdot 2,4 = 5,76 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = U_3 \cdot I_3 = 2,6 \cdot 2,6 = 6,76 \text{ W}$$

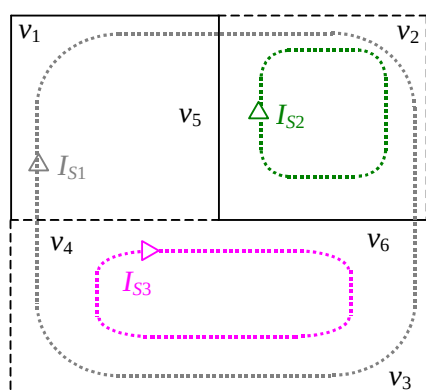
$$P_{R_6} = U_6 \cdot I_{R_6} = 1,8 \cdot 1,8 = 3,24 \text{ W}$$

$$\sum_K P_K = 0 \text{ W}$$

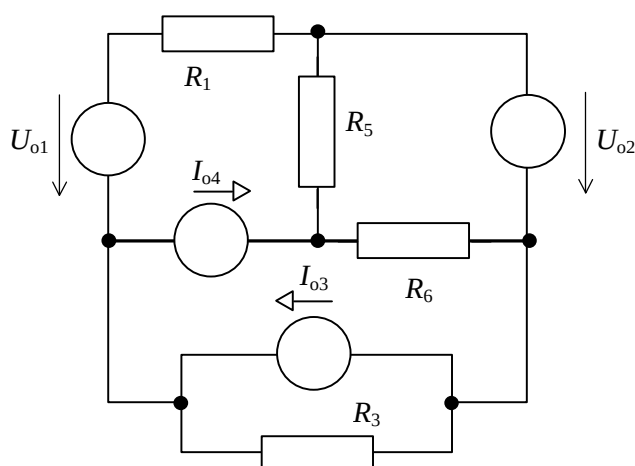
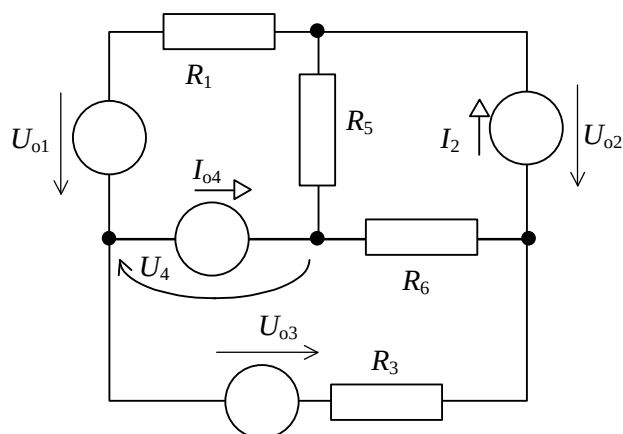
Tellegenova věta

Příklad 1.6.

V zadaném schématu zapojení stejnosměrného obvodu postupujte podle bodů zadání projektu.
Zadané hodnoty jsou: $U_{o1} = 1 \text{ V}$, $U_{o2} = 2 \text{ V}$, $I_{o3} = 3 \text{ A}$, $I_{o4} = 4 \text{ A}$, $R_1 = R_3 = R_5 = R_6 = 1 \Omega$.

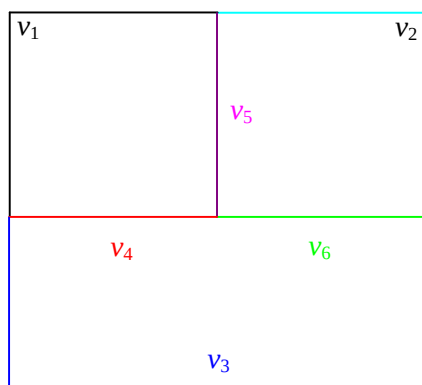


nezávislé smyčky upraveného obvodu

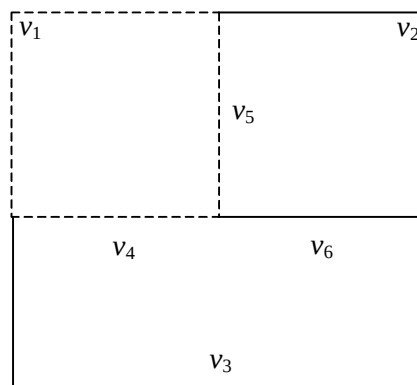


Výsledky:

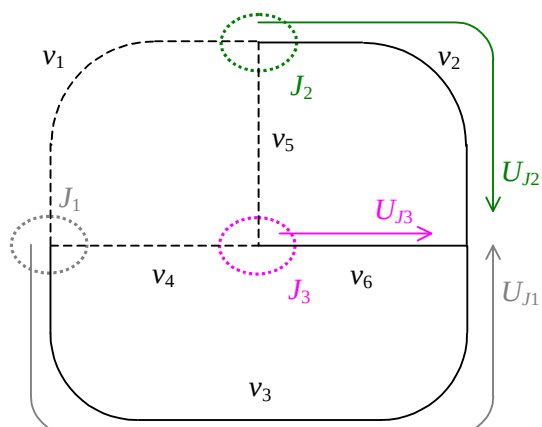
ad a)



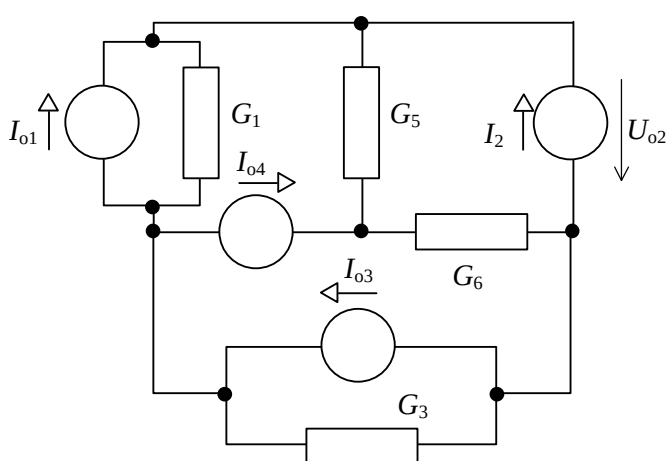
větvě kostry zadaného obvodu



strom obvodu — nezávislé větve obvodu ---



nezávislé řezy upraveného obvodu

Větvě stromu: v_2, v_3, v_6 Nezávislé větve: v_1, v_4, v_5 Nezávislé řezy: $J_1 \in \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$ $J_2 \in \langle v_1, v_2, v_5 \rangle$ $J_3 \in \langle v_4, v_5, v_6 \rangle$ Nezávislé smyčky: $S_1 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ $S_2 \in \langle v_2, v_5, v_6 \rangle$ $S_3 \in \langle v_3, v_4, v_6 \rangle$

ad b)

$$U_{J2} = U_{02} = 2 \text{ V}$$

Parametry náhradního zdroje proudu:

$$G_1 = R_1^{-1} = 1^{-1} = 1 \text{ S}$$

$$I_{o1} = G_1 U_{o1} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ V}$$

Obvodové rovnice:

$$\text{řez } J_1: -I_{o3} + G_3 U_{J1} + I_{o4} + I_{o1} + G_1 (U_{J1} - U_{J2}) = 0$$

$$\text{řez } J_2: -I_2 - G_1 (U_{J1} - U_{J2}) + G_5 (U_{J2} - U_{J3}) = 0$$

$$\text{řez } J_3: G_6 U_{J3} - I_{o4} - G_5 (U_{J2} - U_{J3}) = 0$$

Maticový zápis obvodových rovnic s ohledem na rovnost $U_{J2} = U_{o2} = 2 \text{ V}$:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_1 & -0 \\ -G_1 & G_1 + G_5 & -G_5 \\ -0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{J1} \\ U_{o2} \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{o1} + I_{o3} - I_{o4} \\ I_{o1} + I_2 \\ I_{o4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{J1} \\ 2 \\ U_{J3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ I_2 + 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Řešení rovnic: $U_{J1} = 0 \text{ V}$, $U_{J3} = 3 \text{ V}$, $I_2 = 0 \text{ A}$

ad c)

Parametry náhradního zdroje napětí:

$$R_3 = 1 \Omega$$

$$U_{o3} = R_3 I_{o3} = 1 \cdot 3 = 3 \text{ V}$$

Obvodové rovnice:

$$\text{smyčka } S_1: -U_{o1} + R_1 I_{S1} + U_{o2} + R_3 (I_{S1} + I_{S3}) - U_{o3} = 0$$

$$\text{smyčka } S_2: R_5 I_{S2} + U_{o2} + R_6 (I_{S2} - I_{S3}) = 0$$

$$\text{smyčka } S_3: -U_4 + R_6 (I_{S3} - I_{S2}) + R_3 (I_{S3} + I_{S1}) - U_{o3} = 0$$

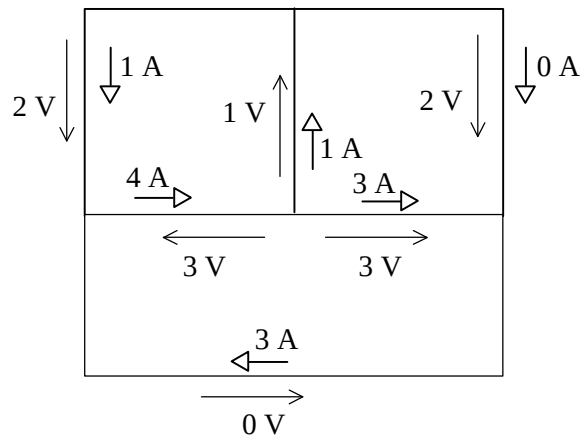
Maticový zápis obvodových rovnic s ohledem na rovnost $I_{S3} = I_{o4} = 4 \text{ A}$:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & 0 & R_3 \\ 0 & R_5 + R_6 & -R_6 \\ R_3 & -R_6 & R_3 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ I_{o4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{o1} - U_{o2} + U_{o3} \\ -U_{o2} \\ U_{o3} + U_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ U_4 + 3 \end{bmatrix}$$

Řešení rovnic: $I_{S1} = -1\text{ A}$, $I_{S2} = 1\text{ A}$, $U_4 = 3\text{ V}$

ad d)



ad e)

$$P_{o1} = U_{o1} \cdot I_1 = 1 \cdot 1 = 1\text{ W}$$

odebírání energie

$$P_{o2} = U_{o2} \cdot I_2 = 2 \cdot 0 = 0\text{ W}$$

stav naprázdno

$$P_{o3} = -U_3 \cdot I_{o3} = -0 \cdot 3 = 0\text{ W}$$

stav nakrátko

$$P_{o4} = -U_4 \cdot I_{o4} = -4 \cdot 3 = -12\text{ W}$$

dodává energii

$$P_{R1} = U_{R1} \cdot I_1 = 1 \cdot 1 = 1\text{ W}$$

$$P_{R3} = U_3 \cdot I_{R3} = 0 \cdot 0 = 0\text{ W}$$

$$P_{R5} = U_5 \cdot I_5 = 1 \cdot 1 = 1\text{ W}$$

$$P_{R6} = U_6 \cdot I_6 = 3 \cdot 3 = 9\text{ W}$$

$$\sum_K P_K = 0\text{ W}$$

Tellegenova věta

Zpracoval: Petr Orsák a Karel Chrobáček