



Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava



POČÍTAČOVÁ IDENTIFIKACE OBVODŮ

studijní opora

Libor Gajdošík

Ostrava 2007

Recenze: Vladislav Musil

Název: Počítačová identifikace obvodů
Autor: Libor Gajdošík
Vydání: první, 2006
Počet stran: 149
Vydavatel: VŠB – TUO

Studijní materiály pro studijní obor N-EST(elektronika a sdělovací technika, 2. 3. r. Mgr, ESVT) fakulty FEI

Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Rozvoj lidských zdrojů

Název: E-learningové prvky pro podporu výuky odborných a technických předmětů

Číslo: CZ.O4.01.3/3.2.15.2/0326

Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava

Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Libor Gajdošík

© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-1483-4

POKYNY KE STUDIU

Počítačová identifikace obvodů

Pro předmět 7. semestru oboru Elektronika a sdělovací technika jste obdrželi studijní balík obsahující

- integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu
- CD-ROM s doplňkovými animacemi vybraných částí kapitol
- harmonogram průběhu semestru a rozvrh prezenční části
- rozdělení studentů do skupin k jednotlivým tutorům a kontakty na tutorů
- kontakt na studijní oddělení

Prerekvizity

Pro studium tohoto předmětu se předpokládá absolvování předmětu Teorie obvodů 1, 2, Elektronika 1 a 2.

Cílem předmětu

je seznámení se základními pojmy tolerance a jmenovitá hodnota parametrů, citlivostní koeficient, invariant citlivosti. Po prostudování modulu by měl student být schopen určit potřebné tolerance parametrů pro dosažení požadovaných tolerancí chování jednoduchého elektrického obvodu, rozhodnout který obvodový prvek má největší vliv na požadované chování obvodu, které zapojení je výhodnější pro dosažení požadovaných tolerancí.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do magisterského studia oborů Elektronika a sdělovací technika studijního programu Elektrotechnika a informatika, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splňuje požadované prerekvizity.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:



Čas ke studiu: xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden **čas** potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.



Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat ...
- definovat ...
- vyřešit ...

Okamžitě potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.



VÝKLAD

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.



Shrnutí pojmů 1.1.

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.



Otázky 1.1.

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.



Úlohy k řešení 1.1.

Protože většina teoretických pojmů tohoto předmětu má bezprostřední význam a využití v praxi, jsou Vám nakonec předkládány i praktické úlohy k řešení. V nich je hlavní význam předmětu a schopnost aplikovat čerstvě nabyté znalosti při řešení reálných situací hlavním cílem předmětu.



KLÍČ K ŘEŠENÍ

Výsledky zadaných příkladů i teoretických otázek výše jsou uvedeny v závěru učebnice v Klíči k řešení. Používejte je až po vlastním vyřešení úloh, jen tak si samokontrolou ověříte, že jste obsah kapitoly skutečně úplně zvládli.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přeje autor výukového materiálu

Libor Gajdošík

1. ÚVOD

1.1. Základní pojmy, řady normalizovaných hodnot.



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní pojmy
- popsat vlastnosti řad E, značení hodnot součástek
- vypočítat jmenovitou hodnotu, toleranci,
- používat řady E při řešení obvodů



Výklad

□ Úvod do problematiky.

Předmět Počítačová identifikace obvodů, který jste se rozhodli studovat, se zabývá problematikou návrhu elektrického obvodu z hlediska tolerancí hodnot součástek. Teorie racionálního návrhu obvodu hledá odpovědi na otázky jaký vliv mají změny hodnot součástek, případně změna napájení na chování elektrického obvodu a jak lze tyto vlivy omezit, aby chování elektrického obvodu bylo ještě vyhovující.

Ukazuje se, že taková problematika má značný ekonomický význam zejména při sériové výrobě nějakých elektronických výrobků ať už se jedná o finální výrobky jako třeba zesilovače, radiopřijímače, nebo elektronické součástky jako diskrétní součástky či integrované obvody. U každého elektronického přístroje či zařízení který má být vyráběn sériově je důležitá jeho cena. Ta také závisí na požadavcích na chování tohoto výrobku a na použitých výrobních tolerancích součástek. Součástky s malými výrobními tolerancemi (tedy přesnější) bývají také zpravidla dražší, než ty s tolerancemi širšími. Použití levnějších součástek s širšími tolerancemi nemusí zajistit požadované chování elektrického obvodu.

Avšak na druhé straně důsledné použití všech součástek s úzkými výrobními tolerancemi může zbytečně výrobek prodražit. Teoretický rozbor ukazuje, že ne všechny součástky v obvodu mají stejný vliv na jeho požadované chování. Může se stát, že stačí použít přesnější součástky jen v některých částech navrhovaného obvodu. Může se také stát, že racionálním návrhem se vyhneme nutnosti použít součástku s nastavitelnou hodnotou, nebo nutnost vybírat součástku s vhodnou hodnotou z několika kusů téže jmenovité hodnoty, což může být opět příznivé pro cenu výrobku, protože tím odpadne nutnost zařadit do výrobního procesu další operaci nastavování nějaké hodnoty, nebo výběr součástky (buď ji nastaví případně vybere speciální automat, nebo zaškolená obsluha). Racionální návrh obvodu se také zabývá fyzikálními vlivy (například teplotní změny) na požadované chování elektrického obvodu a také otázkou výtěžnosti tj. podílu vyhovujících a nevyhovujících výrobků. Existuje možnost, že z jistého množství výrobků nebudou některé splňovat požadované chování.

Látka probíraná v tomto učebním textu předpokládá znalosti z teorie lineárních obvodů probíraných v předmětech Teorie obvodů a Elektronika. Pokud čtenář bude cítit nedostatek znalostí může využít literaturu například [1], [2], [3], [4], [5].

Značení veličin je v tomto učebním textu dle ČSN ISO 31 z roku 1994 a dle ČSN IEC 27 z roku 1995.

□ Definice základních pojmů.

Obvodová veličina elektrické napětí nebo elektrický proud v libovolné části elektrického obvodu.

Obvodový parametr hodnota prvku elektrického obvodu tj. kapacita odpor, indukčnost, parametry užívané pro modely nelineárních prvků.(tranzistorů, diod ...).

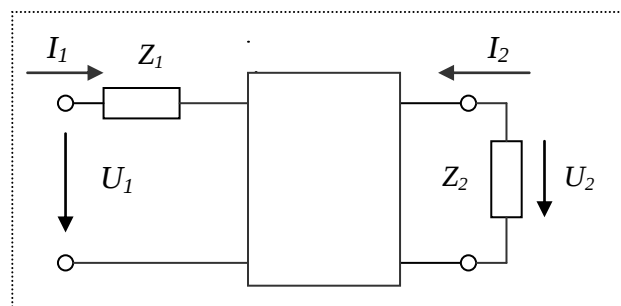
Výstupní veličina sledovaná obvodová veličina, kterou je popsáno požadované chování elektrického obvodu (například výstupní napětí, napěťový přenos, zesílení, útlum, zlomový kmitočet, vstupní a výstupní impedance....). Výstupní veličina je v tomto učebním textu značena y .

Vstupní parametr hodnota jakékoli fyzikální veličiny, na které závisí výstupní veličina. Vstupním parametrem může být tedy obvodový parametr, případně teplota, osvětlení, napájecí napětí a podobně. Vstupní parametr je v tomto učebním textu označen x .

Systémová funkce funkce kterou je popsána závislost výstupní veličiny na vstupních parametrech. Systémovou funkci lze psát jako

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad , \quad (1)$$

kde n je počet vstupních parametrů. V teorii lineárních obvodů často pracujeme se systémovými funkcemi, které se zde nazývají obvodové funkce. Jejich definice jsou například v [5] a zde uvedu jen jejich přehled. Elektrický obvod se uvažuje jako dvojbran, viz obrázek 1. Dvojbran je napájen na vstupu ze zdroje napětí o vnitřní impedanci Z_1 a na výstupu je připojena zátěž o impedanci Z_2 .



Obrázek 1: Obvod jako dvojbran

Napěťový přenos je definován jako

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} \quad . \quad (2)$$

Proudový přenos

$$K_I = \frac{-I_2}{I_1} \quad . \quad (3)$$

Přenosová admitance

$$Y_{21} = \frac{-I_2}{U_1} . \quad (4)$$

Přenosová impedance

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} . \quad (5)$$

Vstupní impedance

$$Z_{in} = \frac{U_1}{I_1} . \quad (6)$$

Výstupní impedance (pro dvojbran napájený na výstupu)

$$Z_{ex} = \frac{U_2}{-I_2} . \quad (7)$$

Hodnoty těchto obvodových funkcí závisí obecně také na impedancích Z_1 a Z_2 . Často se užívají k výpočtům hodnoty (v teorii dvojbranů) těchto obvodových funkcí v extrémních provozních stavech tj. při Z_1 a Z_2 nulových či nekonečně velkých. Tyto provozní stavy však nemusí být prakticky užívány.

Jmenovitá hodnota (předepsaná hodnota) číselná hodnota, která je přiřazena jakékoli veličině nebo parametru podle určitého pravidla. Například vyrobenému odporu či kondenzátoru jsou přiřazeny hodnoty odporu či kapacity dle jisté výrobní řady (E12, E24..) a tyto hodnoty jsou zpravidla vyznačeny na součástce určitým způsobem (číselným kódem, barevným kódem). Jmenovitá hodnota vstupního parametru je v tomto učebním textu značena x_0 . Systémová funkce nabývá své jmenovité hodnoty y_0 po dosazení jmenovitých hodnot x_{0i} vstupních parametrů. Je tedy

$$y_0 = f(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n}) . \quad (8)$$

Odchylka rozdíl mezi skutečnou a jmenovitou hodnotou. Může být vyjádřena buď jako absolutní odchylka, nebo jako relativní odchylka. K popisu odchylek od jmenovitých hodnot lze využít matematického aparátu náhodné veličiny viz literatura [6],[7].

Absolutní odchylka vyjádřena jako rozdíl skutečné a jmenovité hodnoty. Má stejný fyzikální rozměr jako odečítané veličiny. Zapisujeme jako

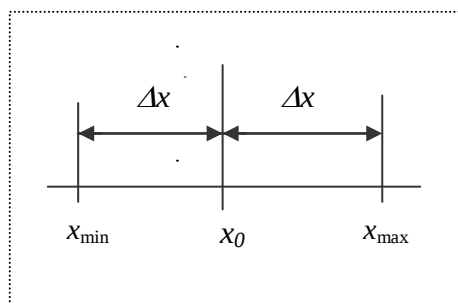
$$\Delta x_i = x_i - x_{0i} , \quad (9)$$

$$\Delta y = y - y_0 . \quad (10)$$

Skutečnou hodnotu například vstupního parametru lze zapsat pomocí absolutní odchylky jako

$$x_i = x_{0i} + \Delta x_i . \quad (11)$$

Na obrázku 2 je znázorněna veličina x a její maximální a minimální hodnoty pomocí absolutních odchylek, které jsou v daném případě souměrné tj. vlevo i vpravo od jmenovité hodnoty x_0 je stejná hodnota Δx .

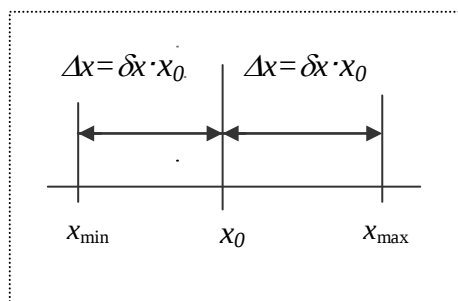


Obrázek 2: Souměrné absolutní odchylky veličiny

Relativní odchylka (poměrná odchylka) vyjádřena jako poměr absolutní odchylky a jmenovité hodnoty. Nemá fyzikální rozměr (případně se říká, že její fyzikální rozměr je roven jedné). Často se také udává v procentech (tj. stonásobek zmíněného poměru). Relativní odchylku zapisujeme jako

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0} \quad (12)$$

Na obrázku 3 je znázorněna veličina x a její maximální a minimální hodnoty pomocí relativních odchylek, které jsou v daném případě souměrné tj. vlevo i vpravo od jmenovité hodnoty je stejná hodnota δx a tedy je i stejná absolutní odchylka Δx .



Obrázek 3: Souměrné relativní odchylky veličiny

Tolerance rozsah přípustné nepřesnosti skutečné a jmenovité hodnoty. Je to tedy maximální přípustná hodnota odchylky zvaná také dovolená odchylka. Toleranci lze vyjádřit buď jako dovolenou absolutní odchylku, nebo jako dovolenou relativní odchylku. Často se tolerance udává v procentech. (Tolerantia = latinsky snášenlivost. Jak se vzájemně snášejí sestavované složky tvořící jeden celek.). Tolerance může být buď souměrná, tj. kladná i záporná tolerance má stejnou hodnotu, nebo nesouměrná tj. kladná a záporná tolerance mají různé hodnoty. Příkladem souměrné tolerance je třeba výrobní tolerance hodnot odporů, příkladem nesouměrné tolerance je třeba výrobní tolerance hodnot elektrolytických kondenzátorů. Tolerance se zapisuje k jmenovité hodnotě jako

$$x = x_0 \pm \delta\% \quad (13)$$

V případě souměrné tolerance v procentech (například hodnota odporu $R=1k\Omega \pm 10\%$), nebo v případě nesouměrné tolerance v procentech jako

$$x = x_0 + \delta_1 - \delta_2 \% \quad , \quad (14)$$

(například hodnota kapacity elektrolytického kondenzátoru $C=10 \mu\text{F} +50 \% -20 \%$. Případně lze toleranci zapsat pomocí dovolené absolutní odchylky jako

$$x = x_0 \pm \Delta x \quad . \quad (15)$$

Například napájecí napětí $U=10 \text{ V} \pm 1 \text{ V}$ nebo $U = (10 \pm 1) \text{ V}$.

Příklad 1.1.

Odpor má jmenovitou hodnotu $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ a toleranci $\delta = \pm 5 \%$. Vypočtěte v jakém rozmezí může ležet jeho skutečná hodnota a absolutní a relativní odchylka



Dovolená absolutní odchylka odporu je

$$\Delta R = \frac{R_0 \cdot \delta}{100} = \frac{10^4 \cdot 5}{100} = 500 \text{ } \Omega \quad . \quad (16)$$

Maximální dovolená hodnota odporu je

$$R_{\max} = R_0 + \Delta R = 10^4 + 500 = 10 \text{ } 500 \text{ } \Omega \quad . \quad (17)$$

Minimální dovolená hodnota odporu je

$$R_{\min} = R_0 - \Delta R = 10^4 - 500 = 9 \text{ } 500 \text{ } \Omega \quad . \quad (18)$$

Skutečná hodnota odporu může ležet v rozmezí hodnot $10 \text{ } 500 \text{ } \Omega$ až $9 \text{ } 500 \text{ } \Omega$. Absolutní odchylka může nabývat hodnot 0 až $+500 \text{ } \Omega$, nebo 0 až $-500 \text{ } \Omega$. Relativní odchylka může nabývat hodnot 0 až $+5 \%$ nebo 0 až -5% .

Příklad 1.2.

Napájecí napětí má jmenovitou hodnotu $U_0 = 10 \text{ V}$. Skutečná hodnota napětí se může měnit nejvýše o 1 V od jmenovité hodnoty. Vypočtěte toleranci tohoto napětí v procentech..



Toleranci v procentech vypočteme ze vztahu

$$\delta = \frac{\Delta U}{U_0} 100 = \frac{1}{10} 100 = 10 \% \quad . \quad (19)$$

Tolerance tohoto napětí je tedy $\pm 10 \%$.

Příklad 1.3.

V katalogu je uvedeno, že diferenciální odpor stabilizační diody R_d se může nabývat hodnot 2 až 5 Ω . Vypočítejte jeho jmenovitou hodnotu a toleranci...



Jmenovitou hodnotu R_{d0} vypočteme jako aritmetický průměr maximální a minimální hodnoty.

$$R_{d0} = \frac{R_{d\max} + R_{d\min}}{2} = \frac{5 + 2}{2} = 3,5 \text{ } \Omega \quad . \quad (20)$$

Toleranci vypočteme jako dovolenou odchylku od této jmenovité hodnoty.

$$\Delta R_d = R_{d\max} - R_{d0} = 5 - 3,5 = 1,5 \text{ } \Omega \quad . \quad (21)$$

Tolerance v procentech bude

$$\delta = \frac{\Delta R_d}{R_{d0}} 100 = \frac{1,5}{3,5} 100 = 42,5 \text{ } \% \quad . \quad (22)$$

Lze tedy hodnotu diferenciálního odporu diody zapsat jako $R_d = 3,5 \text{ } \Omega \pm 42,5 \text{ } \%$.

□ **Řady normalizovaných hodnot.**

Sériově vyráběné součástky se vyrábějí z ekonomických důvodů tak, aby hodnoty jejich parametrů nabývaly jen určitých hodnot zvaných normalizované hodnoty, nebo také vyvolená čísla. Tyto řady se označují písmenem E a číslem n které označuje počet členů řady na které je rozdělen základní interval hodnot 1 až 10. Členy řady tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem q podle vztahu

$$q = \sqrt[n]{10} \quad . \quad (23)$$

Každá řada začíná prvním členem o velikosti 1 nebo dekadickým násobkem jedné. Členy řady jsou dány vztahem

$$R_i = R_0 \cdot q^{i-1} \quad , \quad (24)$$

kde R_0 je první člen posloupnosti a i je pořadové číslo od 1 do $n - 1$. Pro praktické účely se používají vhodně zaokrouhlené členy řady. Řady mají tu výhodnou vlastnost, že sousední dva členy dané řady mají od sebe stálou relativní odchylku. Počet členů dané řady n je pak určena i výrobní tolerance hodnot součástek. Pro výpočet výrobní tolerance řady o n členech se vyjde z toho, že tolerance je určena jen polovinou rozdílu hodnot dvou sousedních členů řady, protože součástce lze přiřadit podle její skutečné hodnoty jmenovitou hodnotu odpovídající i tému členu řady nebo předchozímu či následujícímu. Tedy na základě této úvahy lze vyjádřit toleranci řady o n členech vztahem

$$\delta = \frac{R_{i+1} - R_i}{2R_i} 100 = \frac{(q^i - q^{i-1})R_0}{2R_0 \cdot q^{i-1}} 100 = \frac{q-1}{2} 100 = \frac{\sqrt[n]{10}-1}{2} 100 \quad . \quad (25)$$

Například pro řadu E24 která má $n = 24$ dostaneme $\delta = 5,034$ což se zaokrouhluje na $\delta = 5 \%$. V následující tabulce jsou uvedeny tolerance některých řad užívaných v elektronice.

δ (%)	20	10	5	2	1
řada	E6	E12	E24	E48	E96

Tabulka 1: Výrobní tolerance řad normalizovaných hodnot

Je vidět, že řada vyšší má vždy dvojnásobný počet členů a užší toleranci než řada předchozí. Řady E6 až E96 se užívají pro odpory, řady E6 a E12 pro kondenzátory, řada E6 pro tlumivky. Výrobci nabízí také součástky, zejména odpory, s tolerancemi užšími než odpovídá příslušné řadě jmenovitých hodnot. V tom případě jde o výběr hodnot s některé vyšší řady například odpory jmenovitých hodnot E6 vybraných z řady E24 a tedy tolerancemi 5 %. V následující tabulce jsou uvedeny základní jmenovité hodnoty některých řad. Tyto hodnoty lze využít v příkladech k samostatnému řešení v tomto učebním textu.

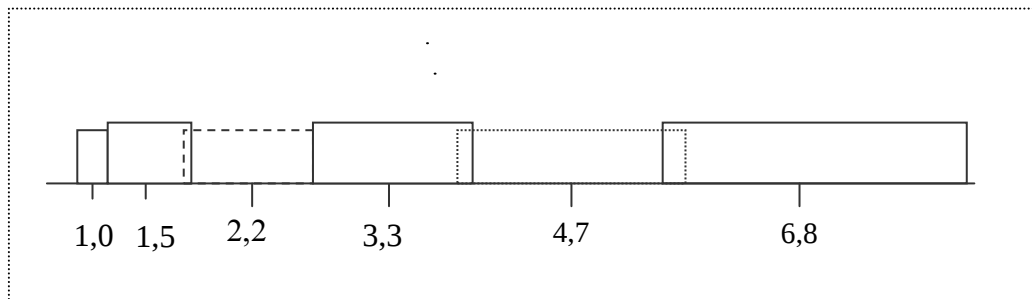
E6	1,0	1,5	2,2	3,3	4,7	6,8						
E12	1,0	1,2	1,5	1,8	2,2	2,7	3,3	3,9	4,7	5,6	6,8	8,2
E24	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,7	3,0
	3,3	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,2	9,1
E48	1,00	1,05	1,10	1,15	1,21	1,27	1,33	1,40	1,47	1,54	1,62	1,69
	1,78	1,87	1,96	2,05	2,15	2,26	2,37	2,49	2,61	2,74	2,87	3,01
	3,16	3,32	3,48	3,65	3,83	4,02	4,22	4,42	4,64	4,87	5,11	5,36
	5,62	5,90	6,16	6,49	6,81	7,15	7,50	7,87	8,25	8,66	9,09	9,53

Tabulka 2: Jmenovité hodnoty některých řad

Užíváním hodnot vyvolených čísel řad E se snižuje různost potřebných vyráběných hodnot součástek a lze zajistit snadněji vzájemnou slučitelnost výrobků různých výrobců. Zaokrouhlením potřebné hodnoty na nejbližší hodnotu z řady E se dosáhne toho, že odchylka požadované hodnoty nebude větší než je tolerance zajištěná danou řadou tj. 20, 10, 5, 2, 1 %. Řady vyvolených čísel E se někdy označují jako procentní řady. Jsou odvozeny z myšlenek na kterých jsou založeny tzv. Renardovy řady, které navrhl r. 1870 francouzský technik Charles Renard (1847-1905) [8].

Teoretické hodnoty řad E jsou zaokrouhleny tak, aby toleranční pole jednotlivých jmenovitých hodnot na sebe navazovala a nebyla přerušena mezerami. Proto se stává, že toleranční pole sousedních jmenovitých hodnot se v některých případech mírně překrývají. Například u řady E6 máme toleranci 20% a tedy krajní hodnoty základních členů řady jsou: 1 – (0,8 až 1,2), 1,5 – (1,2 až 1,8), 2,2 – (1,76 až 2,64), 3,3 – (2,64 až 3,96), 4,7 – (3,76 až 5,64), 6,8 – (5,44 až 8,16). Tedy toleranční pole mezi

hodnotami 1,5 a 2,2 a mezi hodnotami 3,3 a 4,7 a 6,8 se překrývají. Zároveň s rostoucí jmenovitou hodnotou roste šířka tolerančního pole (z hlediska absolutních odchylek). Názorně jsou zakreslena toleranční pole na obrázku 4 pro řadu E6.



Obrázek 4: Toleranční pole hodnot řady E6

□ Značení jmenovitých hodnot.

Jmenovité hodnoty se vyznačují na součástkách buď kódem tvořeným čísly a písmeny, nebo barevným kódem tvořeným posloupností barevných čar či teček. Je to racionální způsob zápisu informace o hodnotě součástky a její toleranci. Zápis je jednoduchý a přináší úsporu místa. Zde probereme kód z písmen a číslic, protože bude používán v tomto učebním textu na některých místech. Kód z písmen a číslic používaný v současné době je dle normy ČSN EN 60062 ed. 2 platné od 1.1. 2006. Písmenné symboly vyjadřují dekadický násobek nebo zlomek základní jednotky. Tohoto symbolu se užívá místo desetinné čárky. Základní jednotkou pro odpory je $1\ \Omega$ a značí se písmenem R, Pro kondenzátory je základní jednotkou 1 farad a značí se písmenem F. Ostatní dekadické násobky a zlomky jsou dle následující tabulky.

kilo	K	10^3	piko	p	10^{-12}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
giga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
tera	T	10^{12}	mili	m	10^{-3}

Tabulka 3: Písmenový kód pro značení násobků a zlomků hodnot

Souměrné tolerance se označují písmeny za lomítkem za jmenovitou hodnotou. Následuje tabulka písmenných kódů pro označení souměrných tolerancí

Kód	M	K	J	H	G	F	D	C	B
δ (%)	± 20	± 10	± 5	± 3	± 2	± 1	$\pm 0,5$	$\pm 0,25$	$\pm 0,1$

Tabulka 4: Písmenový kód pro označení souměrných tolerancí

Příklad 1.4.

Jaké bude označení odporů o jmenovitých hodnotách $0,82 \Omega$, $4,7 \Omega$, 680Ω , $1\,000 \Omega$, $2,2 M\Omega$ a kondenzátorů o hodnotách $1,5 pF$, $22 nF$, $0,1 \mu F$, $100 \mu F$, $1\,000 \mu F$, $1,2 F$? Jak označíme odpor $2\,200 \Omega$ s tolerancí $\pm 10\%$?



Odpory budou mít označení R82, 4R7, 680R, 1K0, 2M2. Kondenzátory budou mít označení 1p5, 22n, 100n (nebo $\mu 1$), 100μ , $1m0$ a 1F2. Odpor $2\,200 \Omega$ s tolerancí $\pm 10\%$ bude mít označení 2K2/K.

□ **Praktické využití vlastností řad normovaných hodnot.**

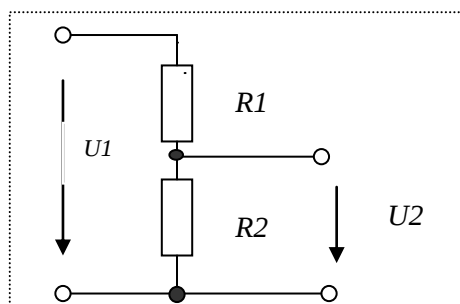
Podíl nebo součin dvou libovolných členů řady je opět členem této řady. Je to proto, že řady jsou geometrické posloupnosti a tedy podíl nebo součin dvou členů je vždy nějakým násobkem kvocientu řady. Další vlastnost je, že podíl dvou libovolných členů, které mají stejný rozdíl svých pořadových čísel, má stejnou hodnotu. Této vlastnosti lze využít při praktickém návrhu odporových či kapacitních napěťových děličů. Podle uvedeného tvrzení tedy platí pro poměr dvou odporů téže řady, že

$$\frac{R_i}{R_k} = \frac{q^{i-1} R_0}{q^{k-1} R_0} = q^{i-k} = m, \quad (26)$$

hodnot kde m je poměr odporů R_i a R_k . Tento poměr závisí na rozdílu pořadových indexů $i-k$ pro danou řadu. Je-li tedy třeba navrhnout v daném zapojení odpory tak, aby jejich poměr byl stálý, vyhoví této podmínce kterákoli dvojice odporů splňující podmínku, že rozdíl $i-k$ je stejný.

Příklad 1.5.

Navrhněte odpory pro napěťový dělič pro poměr napětí $U_1/U_2=4$ dle schématu. Volte odpory z řady E24.



Obrázek 5: Napěťový dělič



Pro poměr napětí vyjdeme ze vztahu pro nezatížený napěťový dělič

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + m \quad . \quad (27)$$

Pro požadovaný poměr napětí vyjde požadovaný poměr odporů m jako

$$m = \frac{U_1}{U_2} - 1 = 4 - 1 = 3 \quad . \quad (28)$$

Tomuto poměru vyhovují například odpory $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ a $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ dle Tabulky 2 tedy s pořadovým číslem $i=12$ a $k=1$. Vyhověly by také například hodnoty $R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega$ a $R_1 = 4,7 \text{ k}\Omega$ nebo $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$ a $R_1 = 9,1 \text{ k}\Omega$, protože mají stejný rozdíl indexů $k-i=11$ nebo-li mezi hodnotami $1,5 \text{ k}\Omega$ a $4,7 \text{ k}\Omega$ leží 11 hodnot.. Vypočteme-li ale poměr m u vyhledaných dvojic odporů, zjistíme, že se poněkud liší od hodnoty 3. To je způsobeno tím, že normalizované řady používají zaokrouhlené hodnoty. Tyto rozdíly však mohou být v řadě praktických aplikací zanedbatelné.

Příklad 1.6.

Navrhněte odpory pro napěťový dělič dle předchozího příkladu pro poměr napětí $U_1/U_2=5$. Volte odpory z řady E24.



Pro požadovaný poměr napětí vyjde požadovaný poměr odporů m jako

$$m = \frac{U_1}{U_2} - 1 = 5 - 1 = 4 \quad . \quad (29)$$

Hodnota 4 se ale v řadě E24 nevyskytuje. Proto zaokrouhlíme hodnotu na nejbližší, která se v řadě vyskytuje tedy $m = 3,9$. Tomuto poměru vyhovují například odpory $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ a $R_1 = 3,9 \text{ k}\Omega$. Dle Tabulky 2 leží mezi těmito hodnotami 13 členů řady. Vyhověly by také například hodnoty $R_2 = 1,2 \text{ k}\Omega$ a $R_1 = 4,7 \text{ k}\Omega$ nebo $R_2 = 5,1 \text{ k}\Omega$ a $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$,



Shrnutí pojmů 1.2.

Vstupní parametr je fyzikální veličina na které závisí výstupní veličina obvodu popsána systémovou funkcí.

Výstupní veličina je sledovaná fyzikální veličina která popisuje chování obvodu,

Systémová funkce je závislost výstupní veličiny na vstupních veličinách (v lineárních obvodech jsou to často vstupní a výstupní impedance, napěťový a proudový přenos a přenosová impedance a admitance).

Jmenovitá hodnota číselná hodnota přiřazená vstupnímu parametru podle určitého pravidla.

Tolerance maximální přípustná hodnota odchylky (absolutní či relativní).

Absolutní odchylka je rozdíl skutečné a jmenovité hodnoty.

Relativní odchylka je podíl absolutní odchylky a jmenovité hodnoty (často se udává v procentech).

Značení jmenovitých hodnot se provádí určitým způsobem dle platné normy zpravidla ve schématech či na součástkách.

Řady E jsou zaokrouhlené členy geometrických posloupností navržených tak, aby členy dané řady měly stálou relativní toleranci v procentech,



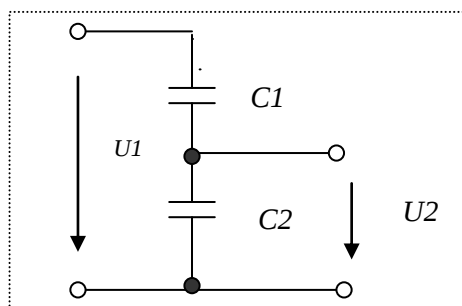
Otázky 1.2.

1. Co znamenají pojmy jmenovitá hodnota a skutečná hodnota?
2. Co znamená pojem výrobní tolerance?
3. Jak vypočítáme jmenovitou hodnotu a toleranci je-li dáno rozmezí hodnot, kterých může daná veličina nabývat?
4. Proč se používají řady E normalizovaných hodnot?
5. Jak se označují jmenovité hodnoty odporů a kondenzátorů?
6. Co znamenají pojmy vstupní a výstupní veličina, systémová funkce?



Úlohy k řešení 1.2.

1. Odvoďte vztahy, pro návrh napěťového děliče složeného ze dvou kapacit C_1 a C_2 dle schématu.



Obrázek 6: Kapacitní napěťový dělič

2. Dokažte, že součin dvou libovolných členů geometrické řady je opět členem této řady.
3. Obvod složený ze sériového spojení odporu R a kondenzátoru C má časovou konstantu $\tau = RC$, určenou hodnotami $R = 1 \text{ k}\Omega$ a $C = 100 \text{ nF}$. najděte nové hodnoty R pro $C = 150 \text{ nF}$, aby byla zachována hodnota časové konstanty. Využijte vlastností řady E.
4. Pokuste se najít další obvody u nichž lze využít při návrhu vlastností řad E.



Průvodce studiem

Odkazy na literaturu uváděné v učebním textu slouží spíše jako inspirace pro rozšiřování znalostí pro zvědavé, případně pro ty, kteří cítí potřebu něco prostudovat důkladněji (odvození nějakých vztahů apod.). Pojmy v této kapitole tvoří základ k dalšímu studiu teorie citlivosti a tolerancí, které pokračuje ve 3. kapitole. Následující kapitola 2 je spíše informativní. Její obsah má sloužit k ujasnění si úlohy základních zákonů při výpočtech a měření, které mnozí jen rutinně využíváme a k uvědomění si vlastností reálných pasivních součástek a způsobu jak modelovat parazitní parametry při řešení elektrického obvodu. Znalosti z 2. kapitoly jsou využívány v 5. kapitole při řešení obvodů.

2. ROZDÍLNOST CHOVÁNÍ REÁLNÉHO A IDEÁLNÍHO OBVODU

2.1. Meze platnosti základních zákonů.



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojem obvod se soustředěnými parametry
- popsat jevy plynoucí z omezení platnosti základních zákonů
- vyřešit případy kdy může dojít k omezení platnosti základních zákonů



Výklad

□ Přístup který používá teorie obvodů.

Základ metod které používá teorie obvodů k řešení vycházejí z předpokladu, že všechny elektromagnetické interakce se odehrávají na svorkách součástek zapojených do obvodu. Mezi vodiči spojujícími součástky nedochází k žádným elektromagnetickým jevům (vzájemné vazby, vyzařování vln). Předpokládá se tedy, že se jedná o takzvané obvody se **soustředěnými prvky** (význam bude objasněn v odstavci Druhý Kirchhoffův zákon) a že platí pro tyto obvody první a druhý Kirchhoffův zákon. Pokud předpokládáme, že platí i Ohmův zákon, jde o lineární elektrický obvod. V případě, že se nejedná o obvod se soustředěnými prvky a nejsou splněny podmínky platnosti prvního a druhého Kirchhoffova zákona, je nutno použít pro řešení takového případu aparát teorie elektromagnetického pole tj. Maxwellovy rovnice. Aparát teorie elektrických obvodů je pouze speciálním případem Maxwellových rovnic tj. pro případ takzvaného stacionárního (stejnoseměrný proud) a kvazistacionárního (nízké technické kmitočty) elektromagnetického pole.

□ Ohmův zákon.

S Ohmovým zákonem a oběma Kirchhoffovými zákony se setkáváme při řešení elektrických obvodů. Při praktické činnosti například při měření veličin na vyšších kmitočtech se někdy výsledky rozcházejí s očekáváním a vnášejí tak rozdíly mezi teorií a praxí. Je dobré si uvědomit, jak je to s platností základních zákonů. Začneme tedy Ohmovým zákonem.

Ohmův zákon říká, že přiložíme-li napětí na konce kovového vodiče, pak proud protékající vodičem při konstantní teplotě vodiče je přímo úměrný velikosti přiloženého napětí. Konstanta úměrnosti se nazývá elektrický odpor. Formálně lze toto tvrzení zapsat vztahem

$$I = \frac{U}{R}, \quad (30)$$

kde I je proud protékající vodičem, U je napětí na koncích vodiče, R je elektrický odpor vodiče. V uvedeném tvrzení je obsaženo něco, co omezuje platnost Ohmova zákona. Tak tvrzení se týká především jen kovových vodičů. Bylo zjištěno, že pro jiné materiály už nemusí platit přímá úměrnost, tedy lineární závislost mezi proudem a napětím. Pak se zde mluví o fyzikálních podmínkách tedy o konstantní teplotě vodiče. Je známo, že elektrický odpor kovových vodičů roste s rostoucí teplotou.

Pokud by se vodič během měření ohřival protékajícím proudem, tak závislost mezi proudem a napětím opět nebude lineární. Lze tedy říci, že platnost Ohmova zákona je vázána na vlastnosti materiálu a fyzikální podmínky. Zákon lze použít v případech kdy platí lineární závislost mezi napětím a protékajícím proudem s dostatečnou přesností. Při výpočtech založených na teorii lineárních elektrických obvodů se předpokládá, že pro všechny obvodové prvky platí Ohmův zákon.

Při výpočtech elektrických obvodů v nejrozmanitějších aplikacích se používá pro výpočet elektrického odporu vztah

$$R = \frac{U}{I} \quad . \quad (31)$$

Tento vzorec má sice formální podobu stejnou jako Ohmův zákon, má ale zcela jiný fyzikální význam. Zde jde totiž o definici tj, zavedení pojmu elektrický odpor. Vztah říká, že fyzikální veličina elektrický odpor je definována jako podíl dvou fyzikálních veličin jako podíl elektrického napětí a elektrického proudu. Tato definice není vázána na materiál ani fyzikální podmínky. Tedy vztah lze využít i v nelineárních obvodech. Smysl definice objasní lépe příklad.

Příklad 2.1.

Je známo, že závislost proudu na napětí u polovodičové diody v propustném směru je nelineární. Měřením bylo zjištěno, že při napětí $U = 0,7 \text{ V}$ protéká proud $I = 10 \text{ mA}$. Vypočtete velikost elektrického odporu diody.



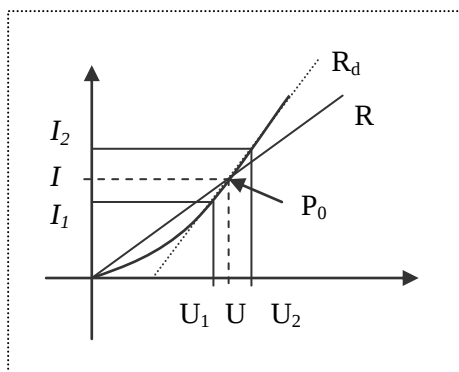
$$R = \frac{U}{I} = \frac{0,7}{1 \cdot 10^{-2}} = 70 \text{ } \Omega \quad . \quad (32)$$

Odpor diody je tedy $70 \text{ } \Omega$. Číselná hodnota je ale vázána na konkrétní hodnotu napětí a proudu protože závislost proudu na napětí u diody je nelineární.

Poznámka: Vypočtená hodnota odporu R je takzvaný statický odpor. U nelineárních obvodových prvků (tj. takových kde závislost protékajícího proudu prvkem na napětí na jeho svorkách je nelineární) se definuje v teorii obvodů takzvaný diferenciální odpor R_d . Platí

$$R_d = \left(\frac{dU}{dI} \right)_{P_0} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1} \quad , \quad (33)$$

kde P_0 je takzvaný klidový pracovní bod. R_d je tedy určen hodnotou derivace v klidovém pracovním bodě. Při určování R_d z experimentálních hodnot nahrazujeme diferenciály diferencemi tedy dvěma blízkými hodnotami U a I . Geometrický význam statického odporu R a diferenciálního odporu R_d je na obrázku 7. Silnou čarou je nakreslena nelineární charakteristika součástky. Klidový pracovní bod je označen P_0 . Přímka odpovídající statickému odporu je označena R a má význam spojnice mezi počátkem a klidovým pracovním bodem. Přímka odpovídající diferenciálnímu odporu je označena R_d a má význam tečny v pracovním bodě (pokud pro výpočet uvažujeme diferenciály) případně sečny (pokud počítáme s diferencemi napětí a proudů).



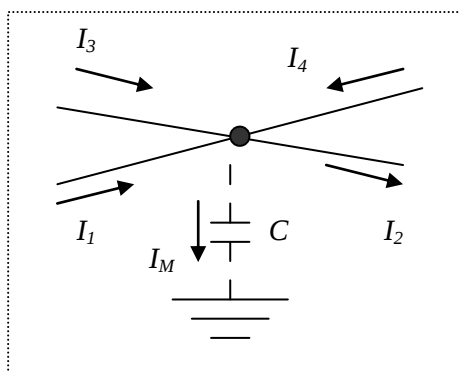
Obrázek 7: Geometrický význam statického a diferenciálního odporu

□ Kirchhoffovy zákony, první Kirchhoffův zákon.

Omezení platnosti Kirchhoffových zákonů je principiální. Plyne to z teorie elektromagnetického pole. Tato teorie používá poměrně náročný matematický aparát – diferenciální rovnice - pro přesný popis elektromagnetických jevů. Kirchhoffovy zákony jsou jen zjednodušením tohoto popisu a mají tedy jen omezenou platnost. Přesný matematický popis omezení platnosti Kirchhoffových zákonů je proveden v [4]. V tomto učebním textu je jen názorný výklad. První Kirchhoffův zákon souvisí se zachováním elektrického náboje, druhý Kirchhoffův zákon souvisí se zachováním energie.

První Kirchhoffův zákon říká, že algebraický součet proudů přitékajících do uzlu je nulový. Proudům které přitékají do uzlu přiřadíme znaménko mínus, proudům které vytékají přiřadíme znaménko plus. Zákon vyjadřuje kontinuitu elektrického náboje. Náboj který v daném okamžiku do uzlu přiteče je roven náboji, který v daném okamžiku z uzlu vyteče. V uzlu se žádný náboj nehromadí. První Kirchhoffův zákon počítá jen s vedením elektrického proudu ve vodičích (tedy s takzvaným vodivým proudem), a předpokládá že mimo vodiče žádný proud neteče. Předpoklad je pravdivý jen pokud můžeme zanedbat proud, který teče z uvažovaného uzlu kapacitou kterou má proti okolí například proti zemi viz obr.8.

Tento kapacitní proud se označuje jako Maxwellův proud nebo také jako posuvný proud. Kapacita uzlu proti okolí bývá v praxi malá řádově jednotky pF. Aby Maxwellův proud dosáhl velikosti která ovlivňuje významně hodnoty proudů ve vodičích do uzlu připojených tak se bude jednat zřejmě o oblast vysokých kmitočtů kde je reaktance takové kapacity uzlu dostatečně malá. Přesně je Maxwellův proud definován pomocí časové změny elektrického pole [9] a nepotřebuje ke svému šíření látkové prostředí (může tedy existovat i ve vakuu) na rozdíl od proudu vodivého.



Obrázek 8: Omezení platnosti prvního Kirchhoffova zákona.

Příklad 2.2.

Do uzlu jsou zapojeny impedance o velikosti $1\,000\,\Omega$. Kapacitu uzlu proti kovové kostře přístroje odhadujeme na $C = 1\,\text{pF}$. Vypočtěte kmitočet při kterém dosáhne kapacitní reaktance uzlu proti kostře hodnotu $10\,\text{k}\Omega$?



$$f = \frac{1}{2\pi \cdot C \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^4} = 1,59 \cdot 10^7 \text{ Hz} \quad . \quad (34)$$

Ze vztahu pro kapacitní reaktanci X_C dostaneme vztah pro kmitočet f

Hodnotu $10\,\text{k}\Omega$ dosáhne kapacitní reaktance uzlu proti kostře až při kmitočtu téměř $16\,\text{MHz}$.

□ Druhý Kirchhoffův zákon.

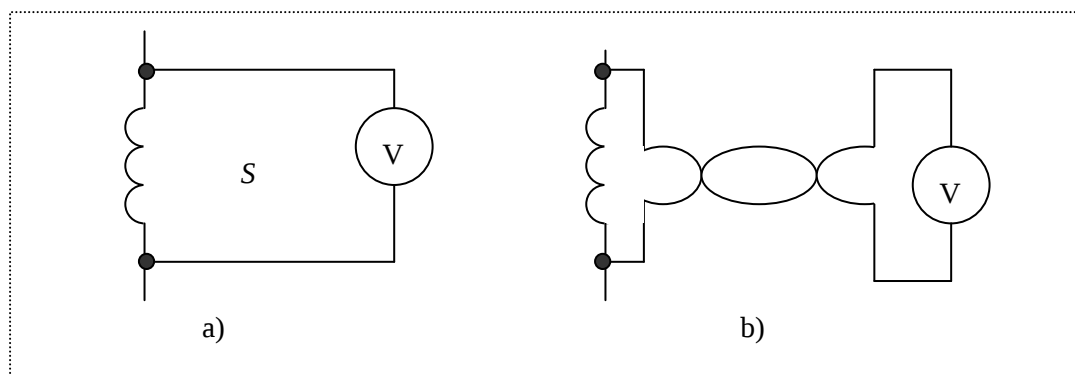
Druhý Kirchhoffův zákon říká, že algebraický součet všech větrových napětí větví tvořících danou orientovanou smyčku je roven nule. Větrovému napětí přiřadíme kladné znaménko pokud je orientace větrového napětí shodná s orientací smyčky, v opačném případě přiřadíme napětí záporné znaménko. Druhý Kirchhoffův zákon je vyjádřením zákona zachování energie v elektrickém obvodu. Elektrické napětí je definováno jako práce kterou vykoná elektrické pole při přemístění elektrického náboje, dělená tímto nábojem. Druhý Kirchhoffův zákon v podstatě vyjadřuje, že práce kterou dodá zdroj do elektrického obvodu je rovna práci vykonané v jednotlivých větvích obvodu. Práce ale obecně závisí i na tvaru dráhy po níž se koná. Kirchhoffův zákon ale předpokládá nezávislost na tvaru této dráhy. Proto jeho platnost je omezena jen na speciální případy, kdy elektrické napětí nepochází také od časových změn magnetického toku.

Pojem větrové napětí se vyjadřuje jako algebraický rozdíl potenciálů uzlů obvodu tvořících příslušnou větev. Napětí vyjadřované jako rozdíl potenciálů lze použít pro obvody stejnosměrného proudu. V obvodech střídavého proudu se mohou vyskytovat i časově proměnná magnetická pole která mohou

na základě Faradayova indukčního zákona ovlivnit měřené hodnoty větvových napětí. Tato pole mohou pocházet od indukčností zapojených do zkoumaného obvodu, nebo od cizích magnetických polí. Měřicí přístroj (voltmetr, multimetr, osciloskop) připojený do obvodu měří větvové napětí, ale přírodní vodiče k přístroji a měřená větev tvoří smyčku s plochou S a na svorkách měřicího přístroje se indukuje napětí U , pokud plochou S prochází časově proměnný magnetický tok Φ dle vztahu

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} \quad . \quad (35)$$

Znaménko mínus zde vyjadřuje Lenzovo pravidlo. Toto indukované napětí se pak sčítá s původním větvovým napětím a měřicí přístroj ukazuje výslednou hodnotu. Indukované napětí závisí na velikosti plochy smyčky S . Čím bude menší plocha S tím menší magnetický tok Φ jí může procházet a tedy i indukované napětí bude menší. Zmenšení plochy S lze realizovat například použitím stíněných měřicích vodičů (sondy k osciloskopu), nebo alespoň zkroucením dvou měřicích vodičů. Na obrázku 9a) je měření napětí na indukčnosti, které je ovlivněno přítomností rozptylového magnetického toku této indukčnosti, případně i toku cizích polí plochou S . Na obrázku 9b) je tato plocha zmenšena zkroucením přírodních vodičů k voltmetru.



Obrázek 9: Vliv proměnného magnetického toku na měřené napětí.

Druhý Kirchhoffův zákon mlčky předpokládá, že parametry prvků jako odpor, indukčnost, kapacita, jsou ve větvích soustředěny jen v jednom bodě, že nejsou závislé na geometrických rozměrech prvků. Předpokládá se, že vodiče spojující tyto prvky mají nulový odpor, indukčnost a kapacitu a rozložení časově proměnných napětí a proudů podél těchto vodičů nezávisí na délce vodičů. To je splněno když spojovací vodiče mají nulovou délku, tedy tvoří jen bod. Rozložení napětí a proudů podél vodičů nezávisí na vzdálenosti když délka vodičů je mnohem kratší než $\lambda/4$, kde λ je vlnová délka odpovídající kmitočtu zmíněného napětí či proudu. V této souvislosti se zavádí pojem **obvod se soustředěnými parametry**. Je to tedy obvod, jehož parametry jako odpor, indukčnost, kapacita, a rozložení napětí a proudů v obvodu nezávisí na geometrických rozměrech obvodu.

Protikladem k pojmu obvod se soustředěnými parametry je pojem **obvod s rozloženými parametry**. To je obvod jehož parametry a rozložení napětí a proudů závisí na jeho geometrických rozměrech. Na objasnění pojmů dva příklady. Mějme měděný vodič, dlouhý třeba několik metrů. Vodičem protéká stejnosměrný elektrický proud a na jeho koncích (vodič může být třeba stočený) měříme elektrické napětí. V tomto případě považujeme celý vodič za obvod se soustředěným parametrem a to elektrickým odporem R . V případě, že označíme na vodiči nějaké kratší úseky než je jeho délka (třeba několik cm) a budeme měřit napětí na

těchto úsecích vzhledem k počátku vodiče, pak tato napětí budou závislá na zvolené délce úseků a vzdálenosti od počátku vodiče. V tomto případě půjde o obvod s rozloženým parametrem – elektrickým odporem. Ten je rozložen podél celé délky vodiče. Druhý příklad. Mějme dva rovnoběžné vzájemně izolované vodiče konečné délky l na koncích rozpojené. Připojíme na jejich jeden konec zdroj napětí sinusového průběhu s kmitočtem f takovým, že platí $l = n \cdot \lambda$ kde n je přirozené číslo 1, 2, 3, ..., a $\lambda = c/f$, c je rychlost šíření elektromagnetické vlny v daném prostředí. Měříme-li velikost napětí mezi vodiči a budeme-li postupovat při měření podél délky vedení, zjistíme, že velikost napětí závisí na vzdálenosti od zdroje pro daný kmitočet. Napětí má periodicky se střídající maxima, minima a nulové hodnoty, které se vyskytují v určitých vzdálenostech po délce vedení. Tato soustava dvou vodičů je tedy obvod s rozloženými parametry. V tomto případě rozložené parametry jsou kapacita a indukčnost, případně odpor (pokud uvažujeme nenulovou hodnotu) a jsou rozloženy podél délky vedení.

Příklad 2.3.

Vypočítejte vlnovou délku λ odpovídající zdroji napětí o kmitočtu 50 Hz a 100 MHz ve vzdušném prostředí.



Ve vzduchu lze považovat rychlost šíření elektromagnetické vlny $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. Pak pro kmitočet 50 Hz vychází vlnová délka dle vztahu

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ m} \quad . \quad (36)$$

Vlnová délka pro kmitočet 50 Hz je tedy 6 000 km. Dosazením do stejného vztahu vyjde pro kmitočet 100 MHz vyjde $\lambda = 3 \text{ m}$. Z výsledků je vidět, že s rozložením velikosti napětí a proudů je třeba prakticky uvažovat na vyšších kmitočtech.

Příklad 2.4.

Z teorie telekomunikačního vedení je známo, že dvoudrátové vedení délky $\lambda/4$ na konci rozpojené se chová jako zkrat, tj. jeho vstupní impedance $Z_{\text{in}} = 0$. Totéž vedení na konci zkratované se jeví jako rozpojený obvod tj. jeho vstupní impedance $Z_{\text{in}} = \infty$. Vypočítejte potřebnou délku takového vedení pro kmitočet $f = 10 \text{ MHz}$. Vedení je tvořeno dvěma vodiči s izolací PVC o elektrické permitivitě $\epsilon_r = 3,5$.



Nejprve vypočteme rychlost šíření elektromagnetické vlny v daném prostředí. Z teorie elektromagnetického pole je známo, že platí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}} \quad . \quad (37)$$

V izolaci PVC lze předpokládat, že relativní permeabilita $\mu_r = 1$. Pak po dosazení dostaneme pro rychlost šíření

$$c = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3,5}} = 1,6 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad . \quad (38)$$

Vypočteme vlnovou délku odpovídající kmitočtu $f = 10 \text{ Mhz}$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1,6 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^7} = 16 \text{ m} \quad . \quad (39)$$

Potřebná délka vedení je tedy $l = \lambda/4 = 4 \text{ m}$.



Shrnutí pojmů 2.1.

Platnost Ohmova zákona je omezena na případy kde je elektrický odpor materiálu R kladná konstanta a tedy mezi elektrickým napětím a proudem je přímá úměrnost.

Platnost prvního Kirchhoffova zákona je omezena na případy stejnosměrného proudu a pro střídavý proud takového kmitočtu, kdy lze ještě zanedbat Maxwellův proud tekoucí mimo vodiče v obvodu.

Platnost druhého Kirchhoffova zákona je omezena na obvody se soustředěnými parametry a na případy kdy napětí při měření není ovlivňováno časově proměnnými magnetickými poli.

Obvod se soustředěnými parametry je obvod, ve kterém parametry R , L , C a velikosti napětí a proudů jsou nezávislé na geometrických rozměrech obvodu.



Otázky 2.1.

- 1 Vysvětlíte podmínky platnosti Ohmova zákona.
- 2 Vysvětlíte rozdíl mezi Ohmovým zákonem a definicí elektrického odporu.
- 3 Za jakých podmínek lze použít první Kirchhoffův zákon?
- 4 Za jakých podmínek lze použít druhý Kirchhoffův zákon?



Úlohy 2.1.

1. Kondenzátorem o kapacitě $C = 7 \text{ nF}$ s papírovým dielektrikem tloušťky $0,1 \text{ mm}$ který má elektrody o šířce $a = 2 \text{ cm}$ a délce $l = 1 \text{ m}$ protéká v obvodu střídavý proud $I = 10 \text{ mA}$. Přívodní vodič má průměr $d = 0,5 \text{ mm}$. Vypočtete hustotu proudu ve vodiči a hustotu Maxwellova proudu v kondenzátoru.
2. Cívkou v obvodu střídavého proudu o kmitočtu 50 Hz protéká proud $I = 0,1 \text{ A}$. Cívka má indukčnost 100 mH . Jak velké napětí může ukázat voltmetr připojený k cívce vodiči které tvoří smyčku jejíž plochou prochází rozptylový magnetický tok $\Phi_{\max} = 0,001 \text{ V.s}$. Jak se změní napětí v případě, že plocha smyčky se zmenší na 10 procent původní plochy?
3. Ukažte jak závisí indukované napětí v měřicí smyčce z příkladu 2 na kmitočtu.
4. Z teorie telekomunikačního vedení je známo, že vedení délky lichých celých násobků $\lambda/4$ se chová jako impedanční transformátor o vstupní impedanci $Z_{\text{in}} = (Z_c)^2 / Z_2$. Kde Z_2 je zakončovací impedance a Z_c je charakteristická impedance vedení. Jaká bude vstupní impedance takového vedení o $Z_c = 50 \Omega$ je-li zakončeno odporem 100Ω ? Jaké jsou důsledky pokud by tvořily takové vedení vodiče spojující jednotlivé prvky elektrického obvodu?
5. Předpokládá se, že vodiče spojující prvky v ideálním elektrickém obvodu mají nulový odpor, indukčnost a kapacitu a mají nekonečně malý rozměr jsou tedy bod. Mohly by mít při nulovém odporu, indukčnosti a kapacitě i nenulovou délku?



Průvodce studiem

I když tato kapitola slouží spíše jen k oživení a ujasnění a není zde mnoho matematiky, je dobré si před studiem následující kapitoly dát přestávku a nechat si informace „projít hlavou“. Informace z další kapitoly uvádějí do souvislosti praktické vlastnosti pasivních součástek s teorií. Je dobré si kapitolu přečíst pro získání představ o parazitních parametrech a způsobech modelování těchto parametrů. Tyto poznatky využijete v 5. kapitole při simulaci chování elektrických obvodů počítačovým programem.

2.2. Modely chování pasivních součástek.



Čas ke studiu: 4 hodiny



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vysvětlit pojem hlavní a parazitní parametry
- popsat vliv parazitních parametrů na chování součástek
- sestavit model součástky s parazitními parametry



Výklad

□ Hlavní a parazitní parametry, obvodový model.

Při řešení elektrického obvodu uvažujeme zpravidla tzv. ideální obvodové prvky na místech odpovídajících skutečným součástkám. Tyto ideální pasivní prvky jsou definovány pouze jediným parametrem odpor elektrickým odporem, cívka elektrickou indukčností a kondenzátor elektrickou kapacitou. Z praxe ale plyne zkušenost, že u každé pasivní součástky jsou přítomny jak odpor, indukčnost tak i kapacita. Jeden z těchto parametrů má dominantní vliv na chování součástky a nazývá se **hlavní parametr**. Součástka zvaná rezistor má hlavní parametr elektrický odpor R . Součástka zvaná kondenzátor má hlavní parametr elektrickou kapacitu C . Součástka zvaná cívka nebo také tlumivka má hlavní parametr indukčnost L .

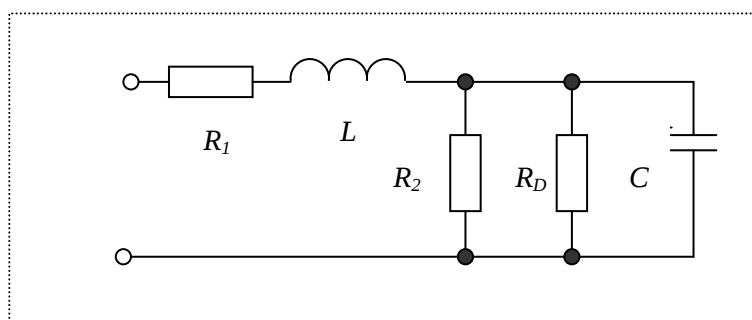
Vliv zbývajících parametrů součástky se může projevit za určitých podmínek. Zbývající parametry se nazývají **parazitní parametry**. Tuto skutečnost vystihuje rčení „každý ohm má svůj pikofarad a svůj mikrohenry“. Tedy rezistor má svou kapacitu a indukčnost, kondenzátor má svůj elektrický odpor a indukčnost, cívka má svůj elektrický odpor a kapacitu jakožto parazitní parametry.

Skutečné chování součástky vystihuje její **obvodový model**. Je to schéma složené z ideálních obvodových prvků, které může být různě složité i v případě stejné součástky. Cílem obvodového modelu je vystihnout chování součástky které vyhovuje pro daný účel. Je zbytečné používat složitý model v případě kdy se mnohé parazitní parametry neuplatní. Je nepřijatelné používat jednoduchý model když se uplatní některé parazitní parametry. Přáním techniků je mít možnost používat součástky, které se co nejvíce podobají ideálním prvkům, snahou výrobců je co nejvíce snižovat parazitní parametry součástek užitím vhodných materiálů a technologií.

Nabízí se otázka zda lze součástek ideálních parametrů dosáhnout vhodnou technologií a materiály nebo existuje nějaké principiální omezení které dosažení tohoto stavu znemožní. V [9] je proveden rozbor, z něhož plyne, že takové omezení je principiální. Nyní budou uvedeny případy pro rezistor, cívku a kondenzátor.

□ Obvodový model kondenzátoru.

Hlavním parametrem kondenzátoru je elektrická kapacita. Kondenzátor je soustava kovových elektrod většinou ve tvaru desek nebo pásků, mezi kterými je umístěno zpravidla dielektrikum. Tj. látka s velmi velkým izolačním odporem. Obvodový model nebo-li náhradní schéma kondenzátoru je na obrázku 10.

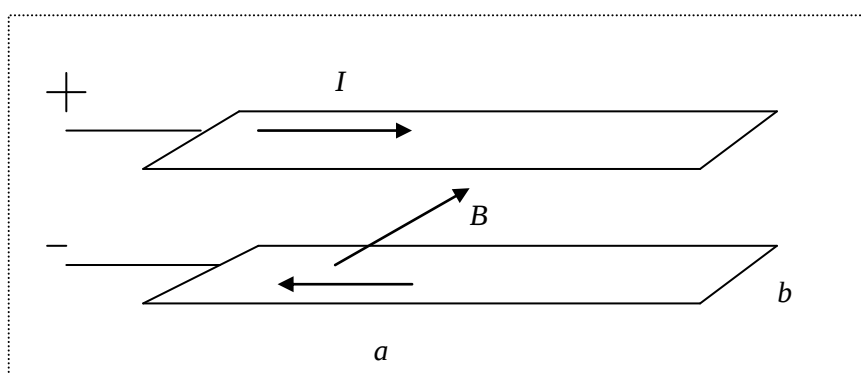


Obrázek10: Obvodový model kondenzátoru

R_1 je odpor přívodů, L je celková indukčnost, R_2 je izolační odpor dielektrika (zvaný též svodový odpor), R_D je dielektrický odpor dielektrika. Indukčnost L zahrnuje indukčnost přívodů a indukčnost elektrod.

□ Rozbor prvků modelu.

Indukčnost elektrod se může projevit při časově proměnném elektrickém napětí kdy v elektrodách teče proud vyvolaný změnou náboje v čase a vytváří tak magnetické pole. Na obrázku 11 je znázorněno základní uspořádání elektrod deskového kondenzátoru.

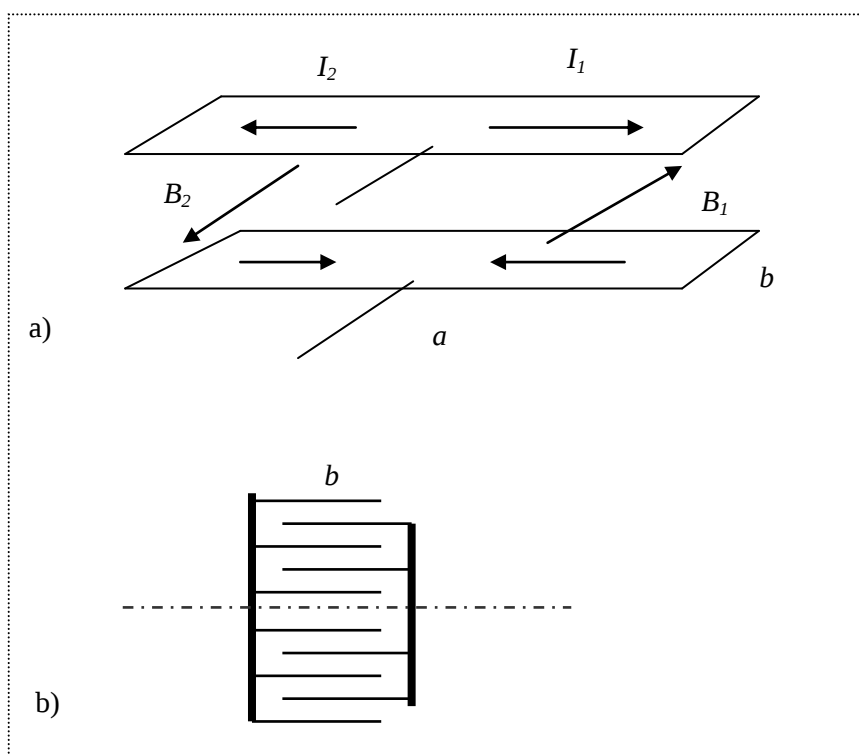


Obrázek 11:Základní uspořádání elektrod kondenzátoru

Na obrázku je také označena orientace elektrického proudu I který protéká elektrodami v daném okamžiku a orientace indukce magnetického pole B . Elektrody tvoří také vedení na konci rozpojené,

takže při kmitočtu, kdy délka a odpovídá $\lambda/4$ nastane sériová rezonance a kondenzátor se z hlediska svorek kterými je připojen k obvodu jeví jako zkrat.

Indukčnost elektrod lze snížit konstrukčním opatřením. Tyto kondenzátory se označují za „bezindukční“. Jedna možnost je umístit přívody k elektrodám přesně uprostřed délky a , pak proud tekoucí přívodem se rozdělí na dvě poloviny jejichž směry jsou opačné a tedy vytváření opačně orientovaná magnetická pole, která se navzájem ruší, což je na obr. 12a). Toto řešení, ale přináší technické problémy při výrobě. Jiné, častěji používané řešení je naznačeno na obr. 12b). Páskové elektrody jsou umístěny tak, aby přes šířku b poněkud přesahovaly. Po svinutí pásků s dielektrikem a izolací do svitku jsou přesahující konce na obou stranách zkratovány ponořením do roztaveného kovu. Tím se vlastně zkrátí délka elektrod na velikost b při nezměněné kapacitě a zvýší se tak rezonanční kmitočet.



Obrázek 12: Uspořádání kondenzátoru se sníženou indukčností

Ted' ještě stručně ke ztrátovým odporům dielektrika. R_2 je izolační odpor dielektrika. Žádný materiál není dokonalým izolantem. Dielektrický odpor R_D vyjadřuje dielektrické ztráty, které vznikají v důsledku polarizace molekul dielektrika a jejich natáčení v časově proměnném elektrickém poli. Tímto pohybem molekul vzniká tzv. dielektrické teplo. Velikost dielektrického tepla roste s rostoucím kmitočtem a s rostoucím ztrátovým úhlem dielektrika. Tedy velikost odporu pro R_D pro dané dielektrikum závisí na kmitočtu.

□ Vlastnosti obvodového modelu kondenzátoru.

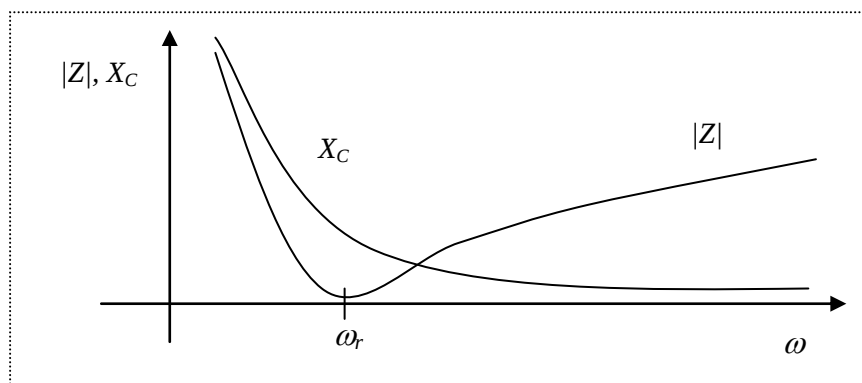
Dle schématu uvedeného na obrázku 10. vypočteme komplexní impedanci obvodového modelu kondenzátoru. Dostaneme

$$Z = R_1 + j\omega L + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1 + R + R_1(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} + j \frac{\omega L - \omega CR^2 + \omega^3 L(CR)^2}{1 + (\omega RC)^2}, \quad (40)$$

kde R je paralelní kombinace odporů R_2 a R_D . Z podmínky že imaginární část komplexní impedance je nulová dostaneme rezonanční kmitočet modelu kondenzátoru

$$\omega_r = \sqrt{\frac{CR^2 - L}{LC^2 R^2}}. \quad (41)$$

Kmitočtová závislost komplexní impedance Z vykazuje tedy sériovou rezonanci na kmitočtu ω_r . Na obrázku 13 je znázorněna kmitočtová závislost velikosti komplexní impedance $|Z|$ a pro srovnání i kmitočtová závislost kapacitní reaktance X_C kapacity C .



Obrázek 13: Kmitočtová závislost velikosti komplexní impedance $|Z|$ modelu kondenzátoru a kapacitní reaktance X_C .

Příklad 2.5.

Vypočtěte rezonanční kmitočet kondenzátoru s prvky modelu o velikostech $R_1 = 1 \text{ m}\Omega$, $L = 10 \text{ nH}$, $R = 10 \text{ M}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$. Vypočtěte velikost komplexní impedance v rezonanci a porovnejte s hodnotou kapacitní reaktance při tomtéž kmitočtu.



$$\omega_r = \sqrt{\frac{CR^2 - L}{LC^2R^2}} = \sqrt{\frac{10^{-6} \cdot (10^{-3})^2 - 10^{-8}}{10^{-8}(10^{-6} \cdot 10^{-3})^2}} = 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad f_r = 1,59 \text{ MHz} . \quad (42)$$

Rezonanční kmitočet kondenzátoru pro sériovou rezonanci je 1,59 MHz. Protože při tomto kmitočtu je imaginární složka impedance nulová, v rezonanci má komplexní impedance hodnotu dle vztahu

$$Z = \frac{R_1 + R + R_1(\omega_r RC)^2}{1 + (\omega_r RC)^2} = \frac{10^{-3} + 10^7 + 10^{-3}(10^7 \cdot 10^7 \cdot 10^{-6})^2}{1 + (10^7 \cdot 10^7 \cdot 10^{-6})^2} = 10^{-3} \Omega . \quad (43)$$

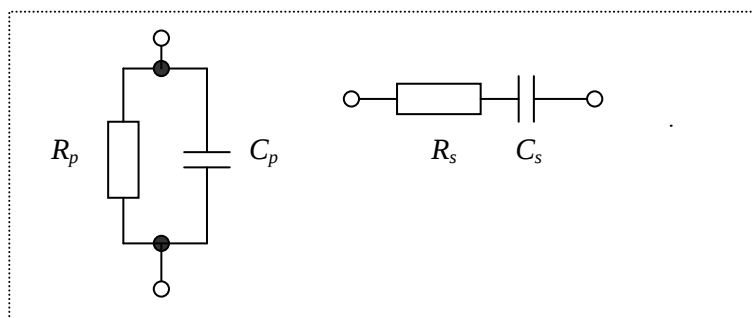
Hodnota kapacitní reaktance při kmitočtu 1,59 MHz je

$$X_C = \frac{1}{\omega_r C} = \frac{1}{10^7 \cdot 10^{-6}} = 0,1 \Omega . \quad (44)$$

Hodnota kapacitní reaktance při kmitočtu 1,59 MHz je velmi malá jen 0,1 Ω , ale hodnota komplexní impedance díky sériové rezonanci je 100 krát nižší.

□ Zjednodušený obvodový model kondenzátoru.

Protože praktické hodnoty odporu přívodů R_l a indukčnosti L jsou velmi malé a rezonanční kmitočet poměrně vysoký, často se pro nižší kmitočty než je rezonanční užívá tzv. paralelní nebo sériový model kondenzátoru dle obrázku 14. Ten obsahuje jen kapacitu a ztrátový odpor, který vyjadřuje celkové ztráty kondenzátoru. Odpor R je obecně závislý na kmitočtu.



Obrázek 14: Zjednodušené obvodové modely kondenzátoru

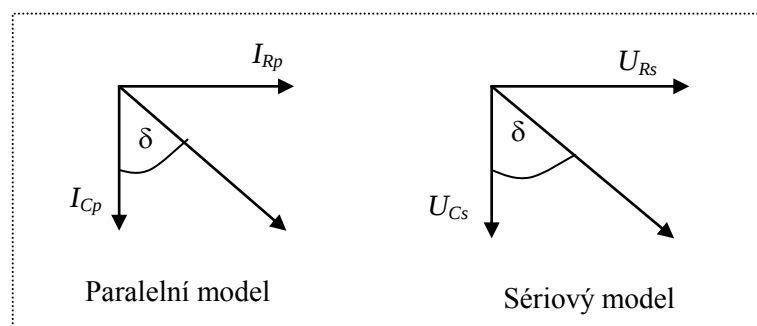
Při výpočtech elektrických obvodů může být výhodnější provádět výpočty s paralelním nebo sériovým modelem. Například pro analýzu obvodu metodou uzlových napětí je výhodnější paralelní model, pro metodu smyčkových proudů je výhodnější sériový model. Proto jsou užitečné převodní vztahy pro

přepočet hodnot prvků z jednoho schématu do druhého. Odvození převodních vztahů vychází z požadavku rovnosti komplexních impedancí (nebo admitancí) obou zapojení. Je třeba si uvědomit, že převodní vztahy jsou kmitočtově závislé (i kdyby ztrátový odpor kmitočtově závislý nebyl) a tedy že vypočtená ekvivalentní náhrada platí jen pro jeden kmitočet. Protože z fyzikálního hlediska je přirozenější paralelní model, uvedu jen vztahy pro přepočet na sériový model. Při odvození se vyjde z rovnosti komplexních impedancí.

$$R_s = \frac{R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2} \quad C_s = \frac{1 + (\omega C_p R_p)^2}{\omega^2 R_p^2 C_p} \quad (45)$$

Odporu R_s se také říká ekvivalentní sériový odpor a označuje se zkratkou ESR. Tento parametr bývá uváděn výrobcí u zpravidla u filtračních kondenzátorů (elektrolytických) a kondenzátorů pro impulsní provoz. Čím větší je hodnota ekvivalentního sériového odporu tím jsou větší ztráty přeměněné v teplo a roste zvlnění filtrovaného napětí v aplikacích (například u zdrojů na výstupu). Hodnota R_s závisí na podmínkách provozu daného kondenzátoru (na kmitočtu, časovém průběhu, teplotě...). Výrobci ji zpravidla uvádějí pro kmitočet 100 kHz.

Na základě zjednodušeného modelu kondenzátoru se definuje ztrátový úhel a činitel jakosti. Vychází se z fázorového diagramu proudů u paralelního zapojení, nebo z fázorového diagramu napětí u sériového zapojení. Ztrátový úhel je označen δ na obrázku 15.



Obrázek15: Definice ztrátového úhlu u kondenzátoru

Na základě definice ztrátového úhlu lze odvodit, že platí

$$\tan \delta = \frac{I_{Rp}}{I_{Cp}} = \frac{1}{\omega R_p C_p} \quad \tan \delta = \frac{U_{Rs}}{U_{Cs}} = \frac{R_s I}{\frac{1}{\omega C_s} i} = \omega C_s R_s \quad (46)$$

pro malé úhly (v radiánech) platí $\delta \approx \tan \delta$.

Ztrátový úhel lze vyjádřit také pomocí činitele jakosti Q . Ten je definován jako podíl jakového a činného výkonu v obvodu. V případě paralelního modelu bude činitel jakosti

$$Q = \frac{P_Q}{P} = \frac{\omega C_p U^2}{\frac{1}{R_p} U^2} = \omega C_p R_p \quad . \quad (47)$$

Pro sériový model vychází činitel jakosti jako

$$Q = \frac{P_Q}{P} = \frac{\frac{1}{\omega C_s} I^2}{R_s I^2} = \frac{1}{\omega C_s R_s} \quad . \quad (48)$$

Ze vztahů pro činitele jakosti a ze vztahů pro ztrátové úhly plyne, že mezi činitelem jakosti a ztrátovým úhlem platí

$$Q = \frac{1}{\tan \delta} \quad . \quad (49)$$

Příklad 2.6.

Paralelní model kondenzátoru má prvky kapacity $C_p = 1 \text{ nF}$ a ztrátový odpor $R_p = 10 \text{ M}\Omega$, při kmitočtu $f = 1\,000 \text{ Hz}$. Vypočítejte prvky ekvivalentního sériového modelu, činitel jakosti a ztrátový úhel.



Dosazením do převodních vztahů dostaneme prvky sériového modelu

$$R_s = \frac{R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2} = \frac{10^7}{1 + (2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^7)^2} = 2\,534 \, \Omega \quad , \quad (50)$$

$$C_s = \frac{1 + (\omega C_p R_p)^2}{\omega^2 R_p^2 C_p} = \frac{1 + (2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^7)^2}{(2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^7)^2 \cdot 10^{-9}} = 1,00025 \text{ nF} \quad . \quad (51)$$

Pro činitel jakosti a ztrátový úhel dostaneme z prvků paralelního modelu hodnoty

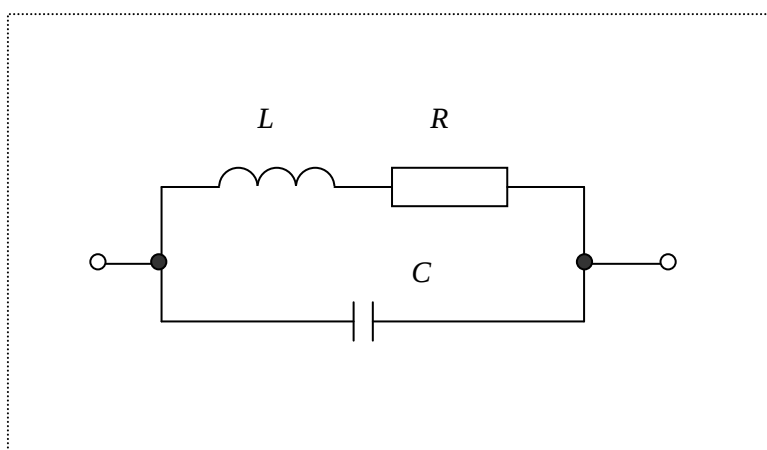
$$Q = \omega R_p C_p = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^7 \cdot 10^{-9} = 62,8$$

$$\tan \delta = \frac{1}{Q} = 1,59 \cdot 10^{-2} \quad (52)$$

Poznámka: Kondenzátory se **vzduchovým dielektrikem** se používají jako proměnné, ladící (do 500 pF) v oblasti rádiových kmitočtů, **kondenzátory slídové** (do 10 nF) se používají pro malé ztráty hlavně v oblasti vf, kondenzátory s **keramickým dielektrikem** (do 150 nF) lze použít i na vf (záleží na druhu dielektrika, bývají závislé na teplotě) jinak se používají jako vazební a blokové (filtrační), **kondenzátory s dielektrikem z plastu** – styroflex (polystyren), polyetylen, polytetrafluoretylen – (1 nF až 10 µF) použití na nf i vf, impulsní obvody, **kondenzátory elektrolytické** (od 1 µF výše) použití zejména a v oblasti nižších kmitočtů (do 1 MHz) jako filtrační, vazební, rozběhové, předřadné kondenzátory pro zářivky a výbojky, **kondenzátory s papírovým dielektrikem** (metalizovaný papír – odolnost proti následkům průrazu) (1 nF až jednotky µF) používají se pro nízké kmitočty, jako vazební, filtrační, rozběhové, předřadné k zářivkám a výbojkám.

□ Obvodový model cívky.

Hlavním parametrem cívky je elektrická indukčnost. Cívka je tvořena jedním nebo několika sousosými vzájemně se nedotýkajícími závity vodiče. Hmota, kterou závity obepínají se nazývá jádro. To je zpravidla vzduchové nebo z materiálu o velké magnetické permeabilitě. Obvodový model nebo-li náhradní schéma cívky je na obrázku 16.

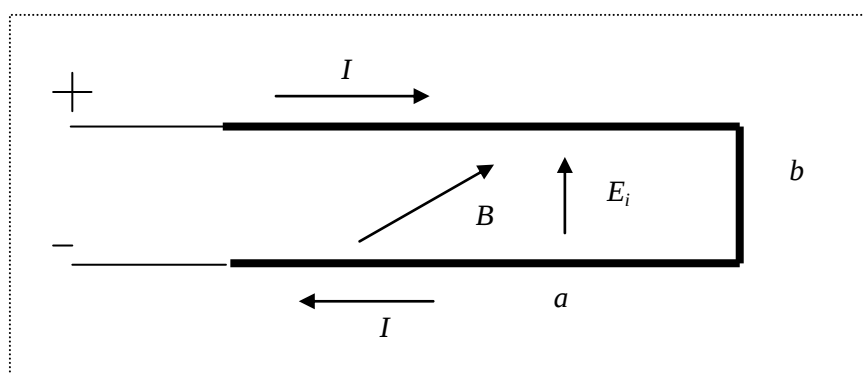


Obrázek 16: Obvodový model cívky

Zde L je indukčnost cívky, R je celkový ztrátový odpor. Dle [10] je součtem všech ztrátových odporů tj. ztrátového odporu vinutí, ztrátového odporu v materiálu jádra a ztrát v případném stínícím krytu cívky. Ztrátový odpor vinutí je součtem elektrického odporu vinutí, elektrického odporu izolace vinutí a dielektrického odporu izolace vinutí. Ztrátový odpor materiálu jádra zahrnuje v sobě hysterezní ztráty, ztráty vířivými proudy a zbytkové ztráty (označované jako magnetické doznívání). Celkový ztrátový odpor závisí na kmitočtu, protože na kmitočtu jsou závislé hysterezní ztráty, ztráty vířivými proudy a zdánlivé zvětšení elektrického odporu vodiče při vyšších kmitočtech. Kapacita C je celková elektrická kapacita cívky.

□ Rozbor prvků modelu.

Elektrická kapacita C existuje principiálně u každé cívky, její příčinou je dle [9] elektrické pole mezi závitů cívky které se vytvoří v časově proměnném magnetickém poli v důsledku Faradayova indukčního zákona a zákona indukce elektrického náboje na povrchu vodiče. Kapacita cívky se může projevit při časově proměnném magnetickém poli Na obrázku 17 je znázorněna cívka tvořena jedním závitěm vodiče. Na obrázku je označena orientace elektrického proudu I , který protéká cívku připojené na zdroj napětí. Proud odpovídá magnetická indukce B . Je naznačeno elektrické pole E_i který se indukuje mezi vodiči na základě časových změn indukce magnetického pole B . Závit tvoří ale také vedení délky $\lambda/4$ na konci zkratované, takže při kmitočtu, kdy délka a odpovídá $\lambda/4$ nastane paralelní rezonance a cívka se jeví jako paralelní rezonanční obvod (tohoto jevu lze využít ke konstrukci vf rezonančních obvodů [11]). Při vyšších kmitočtech se cívka může chovat jako anténa a vyzařovat energii (takzvaná rámová anténa).



Obrázek 17: Principiální uspořádání jednozávitové cívky

Kapacitu cívky lze snížit konstrukčním opatřením. Princip je založen na omezení délky souběhu blízkých vodičů. Užívá se například rozdělení vinutí do prostorově oddělených sekcí, křížové vinutí, hrázové vinutí. Tímto opatřením se ale zvětšuje magnetické rozptylové pole cívky.

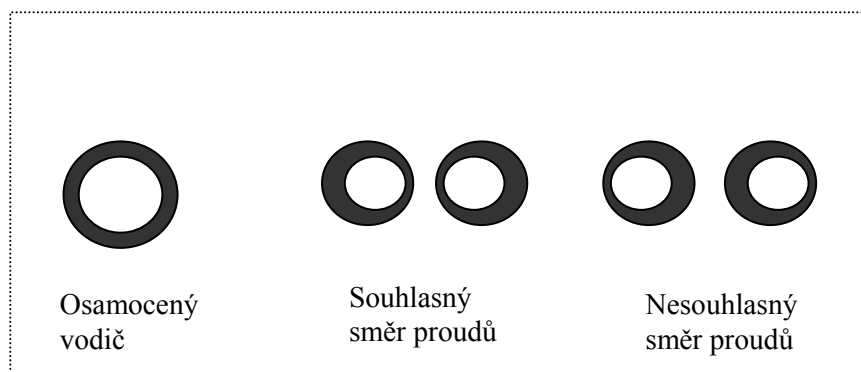
Indukčnost cívky se snižuje pokud dojde k přesycení feromagnetického materiálu jádra, což může nastat buď velikostí protékajícího proudu, nebo v důsledku vířivých proudů, případně účinkem stínícího krytu cívky. Stínící kryt chrání cívku před vlivem cizích elektrických a magnetických polí. Přítomnost stínícího krytu snižuje indukčnost, protože tvoří závit nakrátko. S klesající vzdáleností stínícího krytu od cívky roste jeho vliv na indukčnost. Proto musí být umístěn ve vhodné vzdálenosti (asi 5 násobek průměru cívky). Stínění z elektricky vodivého materiálu (Al, Cu) chrání cívku před účinky vnějších elektrických (Faradayova klec) a časově proměnných magnetických polí (indukce proudů v krytu s opačným magnetickým účinkem než bylo pole které se má odstínit – Faradayův indukční zákon). Tento druh krytu se nazývá elektromagnetické stínění. Pro odstínění časově neproměnných magnetických polí se tento druh krytu doplňuje tzv. magnetickým stíněním. To tvoří několik vzájemně izolovaných vrstev materiálu o velké permeabilitě tvořících závit nakrátko. Tloušťka vrstev musí být menší než je hloubka vniku magnetického pole, protože jinak by klesla

magnetická permeabilita materiálu stínění. Materiály magnetického stínění mají většinou velký elektrický odpor a samy nestačí na odstínění časově proměnných polí elektrických a magnetických.

Ztrátový odpor R má několik složek. Složky již byly vyjmenovány a podrobněji budou rozebrány některé z nich. Ztrátový odpor vinutí je součtem elektrického odporu vinutí, elektrického odporu izolace vinutí a dielektrického odporu izolace vinutí. Elektrický odpor izolace a dielektrický odpor izolace vinutí jsou pojmy které již byly zmíněny u vlastnostech dielektrika kondenzátoru. Elektrický odpor vinutí je tvořen elektrickým odporem vodiče ve smyslu Ohmova zákona, což platí pro stejnosměrný proud a oblast nízkých kmitočtů.

Při vyšších kmitočtech se jeví elektrický odpor vodiče zdánlivě vyšší vlivem elektrického povrchového jevu zvaného také skinefekt. Při tomto jevu dojde k nerovnoměrnému rozložení elektrického proudu po průřezu vodiče. Na okrajích vodiče je vyšší proudová hustota než v jeho ose, takže proud teče zdánlivě tenčím vodičem. Zdánlivý elektrický odpor vodiče roste s druhou odmocninou kmitočtu.

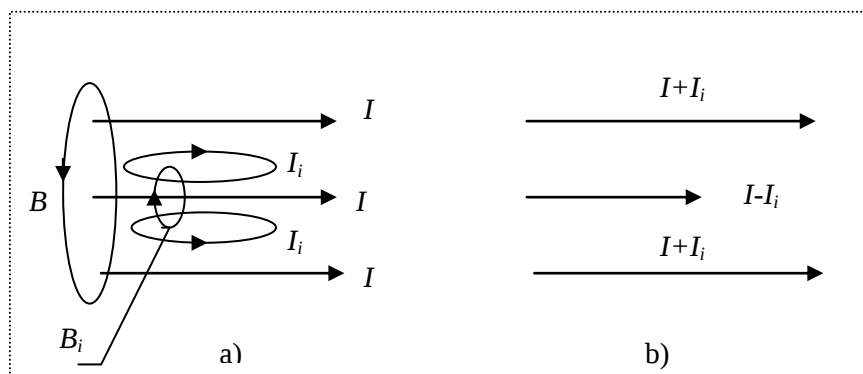
Elektrický povrchový jev je také úměrný magnetické permeabilitě materiálu vodiče, zdánlivě snižuje vlastní indukčnost vodiče a je ovlivněn přítomností jiných magnetických polí (například od sousedních vodičů vinutí)[12]. Na obrázku 18 je příklad rozložení proudu na průřezu vodičů vlivem elektrického povrchového jevu.



Obrázek 18: Rozložení proudu na průřezu vodičů vlivem elektrického povrchového jevu

Aby se snížil zdánlivě zvýšený elektrický odpor vodiče, používá se pro vinutí cívek buď vysokofrekvenční lanko což je účinné pro kmitočty od 10 kHz do 5 MHz. Nad 5 MHz opět ztráty narůstají a vyhovuje lépe postříbřený plný vodič.

Příčinou nerovnoměrného rozložení proudu ve vodiči jsou vířivé proudy I_i , které vznikají v důsledku Faradayova indukčního zákona při časově proměnném magnetickém toku ve vodiči. Na obrázku 19 a) je podélný řez vodičem. Ve vodiči je proud rozložen rovnoměrně a vytváří magnetické pole o indukci B . Jsou zde naznačeny i vířivé proudy I_i , které vznikají v důsledku časově proměnného magnetického toku, protože proud I je časově proměnný a tedy i magnetická indukce B je časově proměnná (indukované elektrické pole má uzavřené siločáry elektrického pole, proto indukované vířivé proudy tvoří smyčky). Dle Lenzova pravidla mají vířivé proudy takovou orientaci, aby svým magnetickým polem B_i působily proti změně která je vyvolala. Na obrázku 19 b) je výsledné rozložení proudu ve vodiči. Na okrajích vodiče teče větší proud než v jeho ose.



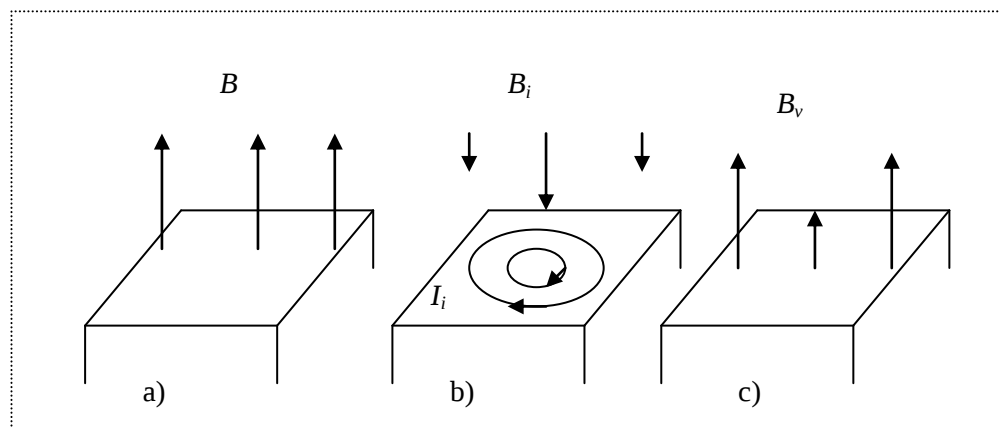
Obrázek 19: Vznik nerovnoměrného rozložení proudu ve vodiči

Ztrátový odpor materiálu jádra, jak již bylo řečeno, zahrnuje v sobě hysterezní ztráty, ztráty vířivými proudy a zbytkové ztráty. Vířivé proudy v materiálu jádra jsou příčinou magnetického povrchového jevu jehož vlivem dojde k poklesu magnetické permeability jádra a tedy snížení hodnoty indukčnosti.

Magnetický povrchový jev je nerovnoměrné rozložení hodnoty magnetické indukce na průřezu jádra. Časově proměnným magnetickým tokem v jádru vzniká v důsledku Faradayova indukčního zákona elektrické pole se soustřednými uzavřenými siločarami. Podél těchto siločar vznikají elektrické proudy o velikosti závislé na elektrickém odporu jádra. Těmto proudům přísluší magnetické pole B_i které je nejsilnější uprostřed jádra (zde působí příspěvky od všech proudů) a nejslabší na jeho okrajích. Protože původní rovnoměrné pole B (B je magnetická indukce tj. hustota magnetického toku na jednotku plochy) viz obr 20 a) a pole od vířivých proudů mají opačnou orientaci viz obr 20 b) je výsledné pole B_v nejslabší uprostřed jádra a nejsilnější na jeho okrajích viz obr 20 c). Na okrajích jádra pak může dojít k přesycení a k poklesu permeability a tedy poklesu indukčnosti.

Nerovnoměrnost rozložení výsledného pole roste s kmitočtem a permeabilitou jádra. Velikost vířivých proudů je přímo úměrná velikosti smyčky po které se mohou uzavírat a nepřímo úměrná elektrickému odporu jádra a lze ji omezit konstrukčním opatřením (izolované trafoplechy) a výběrem materiálů s velkým elektrickým odporem (ferity, Fe prach + plastická hmota).

Magnetický povrchový jev může být ovlivněn i přítomností cizích magnetických polí [12] pokud se mohou uzavírat vířivé proudy a ty se uzavírat mohou pokud jsou materiály vodivě spojeny. Proto jsou zmíněná opatření pro omezení vlivu vířivých proudů účinná – vířivé proudy v jednom trafoplechu neovlivňují vířivé proudy v druhém.



Obrázek 20: Vznik vířivých proudů a nerovnoměrné rozložení magnetické indukce v jádru

□ Vlastnosti obvodového modelu cívky.

Pro komplexní admitanci modelu cívky dle obrázku 16 dostaneme

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{\omega^3 L^2 C - \omega C R^2 - \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (53)$$

Paralelní rezonance nastane když imaginární část komplexní admitance bude rovna nule a z této podmínky vyjde pro rezonanční kmitočet vztah

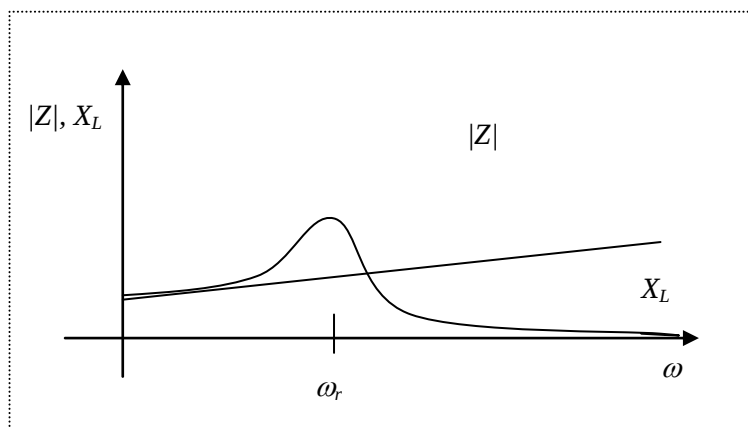
$$\omega_r = \sqrt{\frac{L - CR^2}{CL^2}} \quad (54)$$

Rezananční kmitočet existuje pokud je výraz pod odmocninou kladný, což vede k podmínce

$$R < \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (55)$$

Podmínka prakticky splněna bývá protože indukčnost je u cívek řádu μH až stovky H , kapacita u cívek nejvýš stovky pF , takže kritický odpor vyjde řádově minimálně stovky Ω .

Kmitočtová závislost velikosti komplexní impedance $|Z|$ cívky a pro srovnání kmitočtová závislost induktivní reaktance X_L je na obrázku 21.



Obrázek 21: Kmitočtová závislost komplexní impedance $|Z|$ modelu cívky a komplexní induktivní reaktance X_L

Příklad 2.7.

Vypočítejte rezonanční kmitočet pro vzduchovou cívku jejíž prvky obvodového modelu jsou $L = 1$ mH, $R = 5\Omega$, $C = 10$ pF. Hodnotu komplexní impedance v rezonanci a porovnejte ji s hodnotou induktivní reaktance při tomto kmitočtu.



Dosazením do vztahu pro rezonanční kmitočet vyjde

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L - CR^2}{CL^2}} = \sqrt{\frac{10^{-3} - 10^{-11} \cdot 5^2}{10^{-11} \cdot (10^{-3})^2}} = 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (56)$$

Rezonanční kmitočet paralelní rezonance cívky je $f_r = 1,59$ MHz. V rezonanci je nulová imaginární část komplexní admitance a tedy hodnotu komplexní impedance v rezonanci dostaneme jako převrácenou hodnotu reálné části komplexní admitance při tomto kmitočtu.

$$|Z| = \frac{R^2 + (\omega_r L)^2}{R} = \frac{5^2 + (10^7 \cdot 10^{-3})^2}{5} = 2 \cdot 10^7 \Omega . \quad (57)$$

Induktivní reaktance indukčnosti L na kmitočtu ω_r je

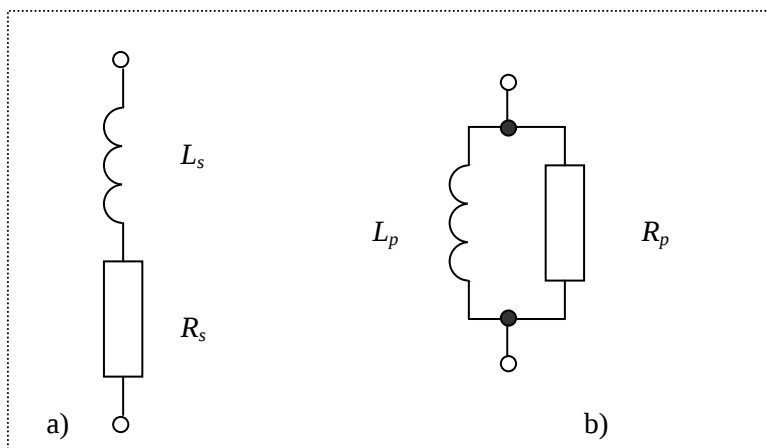
$$X_L = \omega_r L = 10^7 \cdot 10^{-3} = 10^4 \Omega . \quad (58)$$

Z výsledků je vidět značný rozdíl v hodnotách $|Z|$ a X_L . Hodnota $|Z|$ je 2000 krát větší než X_L . To je dáno tím, že jde o paralelní rezonanční obvod se značným činitelem jakosti v rezonanci.

□ Zjednodušený obvodový model cívky.

Protože elektrická kapacita cívek bývá malá a rezonanční kmitočet poměrně vysoký, lze pro oblast kmitočtů nižších než je rezonanční kmitočet lze pro cívku lze použít zjednodušený obvodový model,

sestavený z celkového ztrátového odporu (závislého na kmitočtu) a indukčnosti. Užívá se buď sériový nebo paralelní model dle obrázku 22.

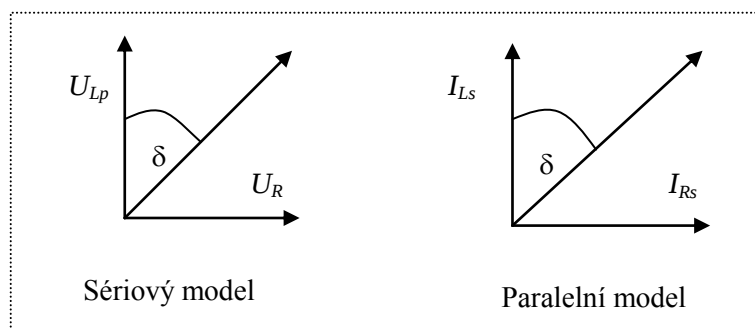


Obrázek 22 Zjednodušené obvodové modely cívky

Modely lze ekvivalentně vzájemně převádět. Převod platí vždy jen pro daný kmitočet, který byl použit pro přepočet hodnot prvků. Při řešení obvodu se většinou z důvodu snadnosti řešení dává přednost jednomu nebo druhému modelu. Například pro metodu smyčkových proudů je snadnější sériový model, pro metodu uzlových napětí je výhodnější paralelní model. Většinou bývá z fyzikálního hlediska přirozenější sériový model, proto budou uvedeny vztahy pro přepočet sériového modelu na paralelní. Vztahy lze odvodit nejsnáze z podmínky rovnosti komplexních admitancí sériového a paralelního modelu.

$$R_p = \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{R_s} \quad L_p = \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{\omega^2 L_s} \quad . \quad (59)$$

Na základě zjednodušeného modelu cívky se definuje ztrátový úhel a činitel jakosti. Vychází se z fázorového diagramu proudů u paralelního zapojení, nebo z fázorového diagramu napětí u sériového zapojení. Ztrátový úhel je označen δ na obrázku 23.



Obrázek 23: Definice ztrátového úhlu u cívky

Ztrátový úhel δ a činitel jakosti Q je definován obdobně jako u zjednodušeného modelu kondenzátoru. V případě sériového modelu bude ztrátový úhel

$$\tan \delta = \frac{U_R}{U_L} = \frac{R_s I}{\omega L_s I} = \frac{R_s}{\omega L_s} \quad . \quad (60)$$

Pro paralelní model vychází ztrátový úhel jako

$$\tan \delta = \frac{I_R}{I_L} = \frac{\frac{1}{R_p} U}{\frac{1}{\omega L_p} U} = \frac{\omega L_p}{R_p} \quad . \quad (61)$$

Mezi činitelem jakosti a ztrátovým úhlem platí stejně jako v případě kondenzátoru vztah

$$Q = \frac{1}{\tan \delta} \quad . \quad (62)$$

Příklad 2.8.

Prvky zjednodušeného sériového modelu cívky jsou $L_s = 100 \text{ mH}$, $R_s = 20 \Omega$. Vypočtěte činitel jakosti, ztrátový úhel a prvky ekvivalentního paralelního modelu pro kmitočet $f = 1 \text{ kHz}$.



Ztrátový úhel vypočteme ze vztahu

$$\tan \delta = \frac{R_s}{\omega L_s} = \frac{20}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-1}} = 0,0318 \quad . \quad (63)$$

Činitel jakosti bude

$$Q = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{1}{0,0318} = 31,4 \quad . \quad (64)$$

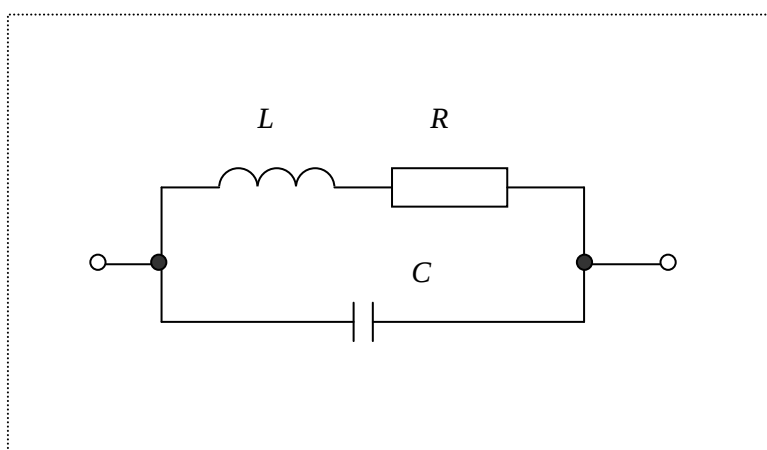
Prvky paralelního modelu budou

$$R_p = \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{R_s} = \frac{20^2 + (2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,1)^2}{20} = 19\,739 \, \Omega \quad , \quad (65)$$

$$L_p = \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{\omega^2 L_s} = \frac{20^2 + (2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,1)^2}{(2\pi \cdot 10^3)^2 \cdot 0,1} = 0,1001 \, H \quad . \quad (66)$$

□ Obvodový model odporu.

Hlavním parametrem odporu je elektrický odpor. Odpor je v principu tvořen hmotou uspořádanou do vhodného tvaru, například válce. Přiložením elektrického napětí na čela válce protéká materiálem elektrický proud o velikosti určené elektrickým odporem. Obvodový model nebo-li náhradní schéma odporu dle [13] je na obrázku 24.

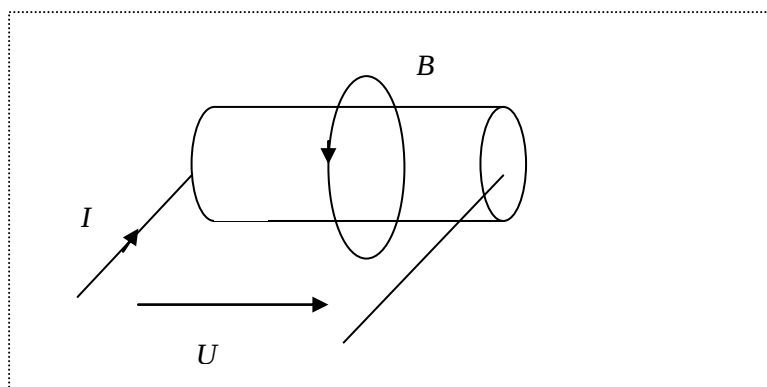


Obrázek 24: Obvodový model odporu

Zde R je elektrický odpor, L je celková indukčnost, C je celková elektrická kapacita.

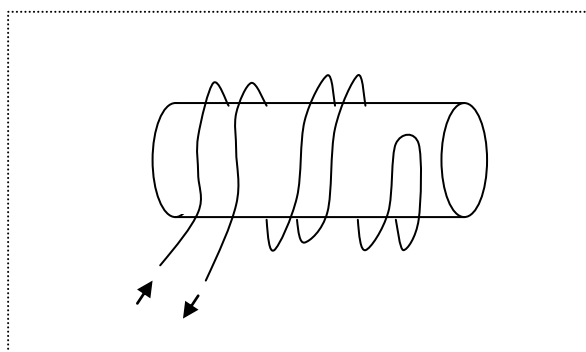
□ Rozbor prvků modelu.

Indukčnost L zahrnuje v sobě indukčnost přívodů součástky a vlastní indukčnost součástky, což je indukčnost příslušná v naší představě válci odporové hmoty, kterou protéká elektrický proud a ten vytváří magnetické pole. Kapacita C zahrnuje jednak kapacitu přívodů součástky (dva vodiče mezi nimiž je elektrické napětí) a kapacitu mezi čely válce odporové hmoty. Tedy i kdyby byly přívody k součástce nulové tak vždy existuje kapacita mezi čely a vlastní indukčnost odporového vodiče. Viz obrázek 25.



Obrázek 25: Principiální uspořádání odporu

Existují různá konstrukční opatření užívaná ke snižování indukčnosti a případně kapacity odporů realizovaných jako navinuté cívky z odporových vodičů (způsoby vinutí bifilární, sériově bifilární, Ayrton-Perry, Chaperon) podrobnosti jsou například v [14]. Na obrázku 26 je uveden princip bifilárního vinutí 20. Smyčka z izolovaného odporového vodiče je navinuta na válec. Šipkami je označena orientace proudu protékajícího vodičem. Magnetická pole obou vodičů smyčky jsou orientována opačně takže celkové magnetické pole uvnitř válce je nulové. Mezi vodiči ovšem magnetické pole je. Vodiče tvoří vedení délky $\lambda/4$ zakončené zkratem. A pro takový kmitočet nastane paralelní rezonance.



Obrázek 26: Princip snižování indukčnosti u drátových odporů

□ Vlastnosti obvodového modelu rezistoru.

Schéma na obrázku 24 je formálně stejné jako schéma modelu cívky na obrázku 16. Jde v principu o paralelní rezonanční obvod. Tedy nastává zde opět možnost paralelní rezonance na kmitočtu ω_r dle vztahu

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L - CR^2}{CL^2}} \quad . \quad (67)$$

Paralelní rezonance nastává pokud je splněna podmínka

$$R < \sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \quad (68)$$

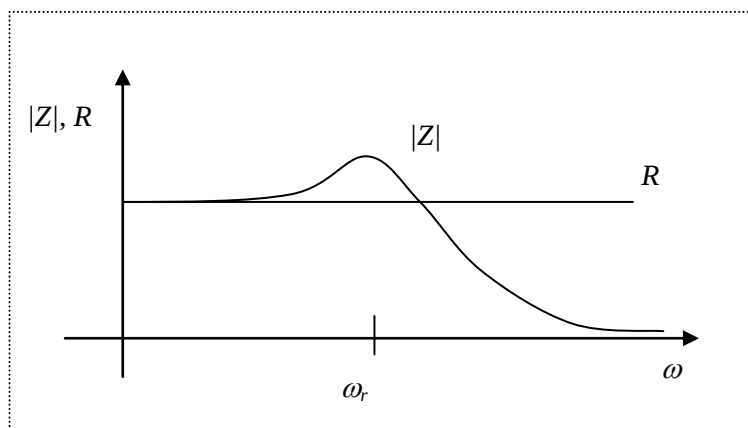
Hodnoty R jsou řádově $\text{m}\Omega$ až $\text{M}\Omega$. Hodnoty indukčností L jsou řádově μH , hodnoty kapacit C jsou řádově pF . Z podmínky pro rezonanci vychází tedy hodnota odporu R

$$R < \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{10^{-12}}} = 1000 \quad \Omega = R_k \quad . \quad (69)$$

Tedy rezonance může nastat jen u odporů menších než $1 \text{ k}\Omega$. Komplexní impedanci obvodového modelu za obrázku 24 lze vyjádřit vztahem

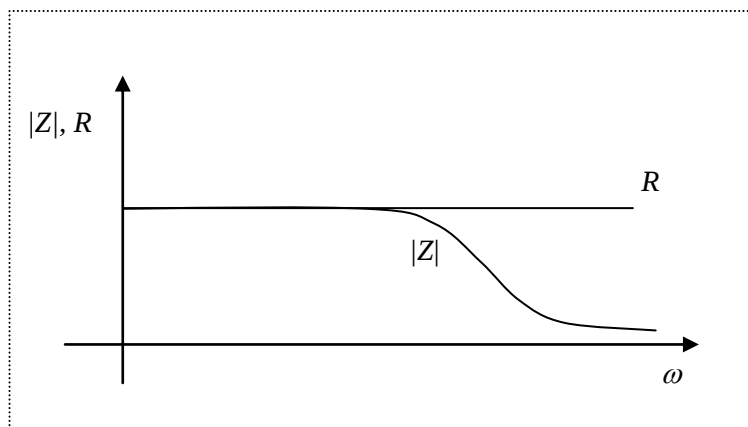
$$Z = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \quad . \quad (70)$$

Kmitočtová závislost velikosti komplexní impedance pro rezistory u nichž dochází k paralelní rezonanci je na obrázku 27



Obrázek 27: Kmitočtová závislost velikosti komplexní impedance rezistorů malých hodnot odporů

Pro hodnoty odporů větší než jsou jednotky k Ω rezonance nenastává. Příklad takové kmitočtové závislosti je na obrázku 28.



Obrázek 28: Kmitočtová závislost velikosti komplexní impedance rezistorů velkých hodnot odporů

Příklad 2.9.

Vypočítejte rezonanční kmitočet pro rezistor, který má tyto prvky obvodového modelu: $L = 1 \mu\text{H}$, $R = 500 \Omega$, $C = 1 \text{ pF}$. Hodnotu komplexní impedance v rezonanci porovnejte s hodnotou elektrického odporu R .



Dosažením do vztahu pro rezonanční kmitočet vyjde

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L - CR^2}{CL^2}} = \sqrt{\frac{10^{-6} - 10^{-12} \cdot 500^2}{10^{-12} \cdot (10^{-6})^2}} = 8,66 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad f_r = 1,38 \cdot 10^8 \text{ Hz} \quad (71)$$

Rezonanční kmitočet rezistoru je 138 MHz. Velikost komplexní impedance při rezonanci vypočteme z převrácené hodnoty reálné části komplexní admitance protože imaginární část je v rezonanci nulová (vztah je již uveden u modelu cívky)

$$|Z| = \frac{R^2 + (\omega_r L)^2}{R} = \frac{500^2 + (8,66 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6})^2}{500} = 2 \cdot 10^3 \Omega \quad (72)$$

Velikost komplexní impedance rezistoru v rezonanci je $2\,000 \Omega$, což je 4 krát větší hodnota než jmenovitá hodnota odporu.

□ Zjednodušený obvodový model rezistoru.

V obvodovém modelu rezistoru lze pro kmitočty nižší než je rezonanční a pro případy kdy rezistory mají výraznější indukčnost (realizované z odporových vodičů) zanedbat indukčnost. Pak se obvodový model zjednoduší na sériové nebo paralelní spojení R , L . Takové modely jsou již uvedeny v odstavci Zjednodušený model indukčnosti. V platnosti pro zjednodušený obvodový model rezistoru zůstávají i odvozené vztahy pro ztrátový úhel, činitel jakosti a přepočet prvků sériového modelu na paralelní, které jsou uvedeny tamtéž.

Poznámka: Existují i obvodové modely ostatních obvodových součástek například tranzistorů, diod, optoelektronických součástek. Tyto modely jsou však složitější než uvedené modely základních součástek a jsou mimo rozsah tohoto učebního textu.



Shrnutí pojmů 2.2.

Hlavní parametr je parametr charakteristický pro chování součástky.

Parazitní parametr se projevuje v chování součástky jen za určitých podmínek.

Obvodový model je schéma složené z ideálních obvodových prvků, které charakterizuje chování součástky pro daný účel a podmínky.

Hodnoty prvků obvodového modelu mohou být obecně závislé na jiných fyzikálních veličinách zejména na kmitočtu (ztráty u kondenzátoru, cívky).

Ekvivalentní převod prvků zjednodušeného sériového a paralelního modelu zachovává elektrické vlastnosti obvodu pro daný kmitočet.



Otázky 2.2.

- 1 Vysvětlete pojmy hlavní a parazitní parametr.
- 2 Vysvětlete pojem obvodový model součástky.
- 3 Vysvětlete zda lze parazitní parametry v principu zcela potlačit?
- 4 Vysvětlete jak se projevují parazitní parametry u rezistoru, kondenzátoru a cívky.
- 5 Popište způsoby jak je možno snížit vliv parazitních parametrů u kondenzátoru a cívky.



Úlohy 2.2.

1. Kondenzátor má kapacitu $C = 10 \mu\text{F}$ a svodový odpor $R = 100 \text{ k}\Omega$. Vypočítejte jeho ztrátový úhel, a činitel jakosti pro kmitočet 50 Hz a 500 Hz. A vypočítejte prvky ekvivalentního modelu pro tyto kmitočty.
2. Cívka má indukčnost 1 H a elektrický odpor vinutí je 80Ω . Ostatní ztrátové odpory zanedbáme. Vypočítejte ztrátový úhel a činitel jakosti pro kmitočet 50 Hz a 500 Hz a vypočítejte prvky ekvivalentního modelu pro tyto kmitočty
3. Rezistor zhotovený z odporového drátu má elektrický odpor $1 \text{ k}\Omega$ a indukčnost 1 mH. Vypočítejte ztrátový úhel a činitel jakosti pro kmitočet 50 Hz a 1 000 Hz a prvky ekvivalentního modelu pro tyto kmitočty.
4. Kondenzátor má kapacitu 100 pF a ztrátový úhel na kmitočtu 10 MHz je $\tan \delta = 0,05$. Vypočítejte prvky paralelního modelu.
5. Cívka má indukčnost 100 μH a na kmitočtu 20 MHz má jakost $Q = 15$. Vypočítejte prvky sériového modelu.



Odměna a odpočinek

Tak, teď je potřeba si opět odpočinout. V následující kapitole u bude méně fyzikálních jevů a více matematiky. Tak je potřeba před jejím studiem nabrat sílu. Bohužel bez matematiky ty citlivosti a tolerance nejdou. A bez nich nelze efektivně posoudit vliv součástí v obvodu. Než se dostanete k tomu zajímavějšímu a praktičtějšímu, je třeba projít i přes to méně přitažlivé, což Vám ale umožní lépe porozumět tomu co se vlastně děje při té praktičtější činnosti.

3. ANALYTICKÉ METODY VÝPOČTU TOLERANCÍ

3.1. Citlivostní koeficienty.



Čas ke studiu: 5 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat citlivostní koeficienty
- popsat použití citlivostních koeficientů
- vyřešit tolerance v daném obvodu s použitím citlivostních koeficientů



Výklad

□ Definice citlivostních koeficientů.

Základy k teorii citlivosti položil americký matematik H.W. Bode. Zavedl pojem citlivost jako poměrnou změnu v daném bodě systémové funkce a zvolil její označení písmenem S (sensitivity = citlivost) viz. [15]. Máme tedy systémovou funkci f jako funkci více proměnných x_i , která popisuje výstupní veličinu y .

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{a_s p^s + a_{s-1} p^{s-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_r p^r + b_{r-1} p^{r-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{(p - p_s)(p - p_{s-1}) \dots (p - p_0)}{(p - p_r)(p - p_{r-1}) \dots (p - p_0)}, \quad (73)$$

kde koeficienty a_i a b_i jsou reálná čísla závislá na x_i , a p je komplexní kmitočet, za něj dosazujeme zpravidla $p = j\omega$, a r, s jsou přirozená čísla. Systémová funkce je zde napsána jednak jako funkce více proměnných, jednak ve tvaru podílu dvou mnohočlenů a pak jako podíl součinů kořenových činitelů p_i , na které jsou rozloženy mnohočlen jmenovatele a čitatele. V oblasti lineárních obvodů systémové funkce y často bývají obvodové funkce (vstupní impedance, výstupní impedance, přenos napětí, přenos proudu, přenosová impedance, přenosová admitance) a x_i jsou parametry obvodu tj. R, L, C .

Změnu, nebo-li přírůstek systémové funkce v okolí pevného bodu (ten je dán jmenovitými hodnotami vstupních parametrů x_{0i}) lze vyjádřit totálním diferenciálem systémové funkce. Pokud jsou splněny předpoklady o diferencovatelnosti funkce lze psát přírůstek systémové funkce jako

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_{01}} dx_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_{02}} dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \right)_{x_{0n}} dx_n, \quad (74)$$

kde výrazy $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_{0i}}$ označují hodnoty parciálních derivací systémové funkce y v bodech x_{0i} .

Koeficienty absolutní citlivosti jsou definovány jako hodnoty parciálních derivací systémové funkce. Označíme je symbolem T_x^y , kde x označuje vstupní parametr, y označuje systémovou funkci. Pak lze rovnici pro celkový přírůstek systémové funkce psát jako

$$dy = T_{x_1}^y \cdot dx_1 + T_{x_2}^y \cdot dx_2 + \dots + T_{x_n}^y dx_n , \quad (75)$$

diferenciální změny dx_i vstupních parametrů nahrazujeme při praktických výpočtech absolutními odchylkami Δx_i od jmenovitých hodnot x_{0i} a totální diferenciál dy nahrazujeme Δy . Tím se dopouštíme matematické nepřesnosti, ale pokud odchylky Δx_i nejsou příliš velké a systémová funkce nevykazuje v daných bodech příliš ostré změny, tak taková náhrada nezpůsobí velkou chybu. Pro praktické výpočty a většinu systémových funkcí v elektronice platí, že Δx_i by nemělo přesáhnout 20 % od jmenovité hodnoty vstupního parametru. Pak lze vztah pro výpočet absolutní změny systémové funkce psát jako

$$\Delta y = T_{x_1}^y \cdot \Delta x_1 + T_{x_2}^y \cdot \Delta x_2 + \dots + T_{x_n}^y \Delta x_n = \sum_{i=1}^n T_{x_i}^y \Delta x_i . \quad (76)$$

Dosadíme-li za vstupní parametry x_i jejich jmenovité hodnoty, dostaneme jmenovitou hodnotu systémové funkce y_0 . Tedy máme formálně $y_0 = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$. Vydělíme-li hodnotou y_0 celou rovnici pro absolutní změnu systémové funkce dostaneme rovnici pro relativní změnu systémové funkce.

$$\frac{\Delta y}{y_0} = T_{x_1}^y \cdot \frac{\Delta x_1}{y_0} + T_{x_2}^y \cdot \frac{\Delta x_2}{y_0} + \dots + T_{x_n}^y \frac{\Delta x_n}{y_0} . \quad (77)$$

Rovnici upravíme tak, že na pravé straně každý člen součinu násobíme výrazem x_{0i}/x_{0i} . Touto úpravou se hodnota pravé strany nezmění.

$$\frac{\Delta y}{y_0} = T_{x_1}^y \cdot \frac{\Delta x_1}{y_0} \frac{x_{01}}{x_{01}} + T_{x_2}^y \cdot \frac{\Delta x_2}{y_0} \frac{x_{02}}{x_{02}} + \dots + T_{x_n}^y \frac{\Delta x_n}{y_0} \frac{x_{0n}}{x_{0n}} . \quad (78)$$

Přeskupíme členy v součinech a dostaneme tak rovnici

$$\frac{\Delta y}{y_0} = T_{x_1}^y \cdot \frac{x_{01}}{y_0} \frac{\Delta x_1}{x_{01}} + T_{x_2}^y \cdot \frac{x_{02}}{y_0} \frac{\Delta x_2}{x_{02}} + \dots + T_{x_n}^y \frac{x_{0n}}{y_0} \frac{\Delta x_n}{x_{0n}} . \quad (79)$$

Označíme δy relativní změnu hodnoty systémové funkce a δx_i relativní změnu vstupního parametru a dostaneme tak rovnici

$$\delta y = T_{x_1}^y \cdot \frac{x_{01}}{y_0} \delta x_1 + T_{x_2}^y \cdot \frac{x_{02}}{y_0} \delta x_2 + \dots + T_{x_n}^y \frac{x_{0n}}{y_0} \delta x_n . \quad (80)$$

Zavedeme označení pro koeficienty na pravé straně rovnice jako

$$S_{x_i}^y = T_{xi}^y \cdot \frac{x_{0i}}{y_0} = \frac{x_{0i}}{y_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_{0i}}, \quad (81)$$

a tyto koeficienty S_x^y budeme nazývat **koeficienty relativní citlivosti** systémové funkce y na parametr x . Pak lze psát rovnici pro relativní změnu systémové funkce jako

$$\delta y = S_{x_1}^y \cdot \delta x_1 + S_{x_2}^y \cdot \delta x_2 + \dots + S_{x_n}^y \cdot \delta x_n = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^y \cdot \delta x_i. \quad (82)$$

Koeficient relativní citlivosti se nazývá někdy také jako Bodeho citlivost, nebo klasická citlivost. (Dnes užívaná definice koeficientu relativní citlivosti je převrácená hodnota původně Bodem zavedeného koeficientu).

Kromě koeficientů absolutní a relativní citlivosti se užívají v některých případech **koeficienty semirelativní citlivosti** definované jako

$$P_{x_i}^y = \frac{1}{y_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_{0i}} \quad Q_{x_i}^y = x_{0i} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_{0i}}. \quad (83)$$

Koeficient Q_x^y se nazývá také někdy citlivost v nule (nebo v pólu). Koeficient Q_x^y zavedli r. 1956 I. Horowitz a J.G. Truxal. Je třeba si uvědomit, že všechny citlivostní koeficienty jsou buď čísla (obecně komplexní čísla), to je ve smyslu definic tak jak byly zavedeny, protože se do výrazů dosazují konkrétní jmenovité hodnoty vstupních parametrů, nebo to mohou být funkce (obecně komplexní funkce), pokud do vztahů nejsou dosazovány konkrétní jmenovité hodnoty. Komplexní čísla či komplexní funkce jsou to proto, že obvod obsahuje obecně prvky R , L , C a může být připojen ke zdroji sinusového časového průběhu. V obvodu tedy počítáme s reaktancemi a impedancemi a komplexním kmitočtem p . V případě, že citlivostní koeficienty jsou považovány za funkce tak se počítají ze vztahů

$$T_{x_i}^y = \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad S_{x_i}^y = \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad P_{x_i}^y = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad Q_{x_i}^y = x_i \frac{\partial y}{\partial x_i}. \quad (84)$$

Citlivostní koeficienty lze mezi sebou vzájemně převádět. Pro převod plynou vztahy

$$S_{x_i}^y = \frac{x_i}{y} T_{x_i}^y \quad S_{x_i}^y = x_i P_{x_i}^y \quad Q_{x_i}^y = x_i T_{x_i}^y. \quad (85)$$

Při výpočtech s obecnými výrazy se také někdy uvádí zápis relativního a semirelativních citlivostních koeficientů ve tvaru

$$S_{x_i}^y = \frac{\partial(\ln y)}{\partial(\ln x_i)} = \frac{\frac{\partial y}{y}}{\frac{\partial x_i}{x_i}} \quad P_{x_i}^y = \frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial y}{y}}{\frac{\partial x_i}{x_i}} \quad Q_{x_i}^y = \frac{\partial y}{\partial(\ln x_i)} = \frac{\partial y}{\frac{\partial x_i}{x_i}} \quad . \quad (86)$$

Takové vztahy zdůrazňují, že koeficient relativní citlivosti je definován jako podíl relativní změny výstupní veličiny a relativní změny vstupního parametru, a semirelativní koeficienty jsou definovány jako podíl relativní změny výstupní veličiny a absolutní změny vstupního parametru, případně jako podíl absolutní změny výstupní veličiny a relativní změny vstupního parametru.

Příklad 3.1.

Vypočtěte koeficient relativní citlivosti impedance sériového spojení odporu $R = 100 \, \Omega$ a kapacity $C = 10 \, \mu\text{F}$ na parametr R jako komplexní funkci komplexního kmitočtu p , případně úhlového kmitočtu ω a jako komplexní číslo pro kmitočet $f = 1000 \, \text{Hz}$.



Impedance sériového spojení odporu a kapacity je

$$Z = R + \frac{1}{pC} \quad . \quad (87)$$

Koeficient relativní citlivosti vypočteme z definičního vztahu. Za komplexní kmitočet p dosadíme $p = j\omega$

$$S_R^Z = \frac{R}{Z} \frac{\partial Z}{\partial R} = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} 1 = \frac{pCR}{1 + pCR} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} \quad . \quad (88)$$

Pro $R = 100 \, \Omega$, $C = 10 \, \mu\text{F}$ a kmitočet $p = j\omega$ bude koeficient relativní citlivosti komplexní funkcí reálné proměnné ω .

$$S_R^Z = \frac{j\omega \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}}{1 + j\omega \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}} = \frac{j\omega \cdot 10^{-3}}{1 + j\omega \cdot 10^{-3}} \quad . \quad (89)$$

Pro hodnotu $f = 1\,000$ Hz bude koeficient relativní citlivosti komplexní číslo

$$\begin{aligned} S_R^Z &= \frac{j2\pi f \cdot 10^{-3}}{1 + j2\pi f \cdot 10^{-3}} = \frac{j2\pi}{1 + j2\pi} = \frac{j2\pi}{1 + j2\pi} \frac{1 - j2\pi}{1 - j2\pi} = \\ &= \frac{(2\pi)^2 + j2\pi}{1 + (2\pi)^2} = 0,975 + j0,155 \quad . \end{aligned} \quad (90)$$

□ Použití citlivostních koeficientů.

Systémové funkce bývají v elektronice mnohdy složité a výpočty citlivostních koeficientů pracné. Proto kromě koeficientu relativní citlivosti jsou definovány ještě další koeficienty, aby pracnost výpočtů mohla být snížena.

Koeficient absolutní citlivosti T_x^y a koeficienty semirelativní citlivosti Q_x^y se používají zejména v případech kdy systémová funkce je mnohočlen nebo jejich podíl. To je případ přenosových funkcí (napětový nebo proudový přenos) zejména u kmitočtových filtrů. Máme tedy systémovou funkci ve tvaru

$$y = \frac{a_s \cdot p^s + a_{s-1} \cdot p^{s-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_r \cdot p^r + b_{r-1} \cdot p^{r-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0} \quad . \quad (91)$$

Kde a_i a b_i jsou reálné koeficienty které závisí pouze na vstupních parametrech x_i , s a r jsou přirozená čísla $s \neq r$ a p je komplexní kmitočet (zde uvažujeme $p = j\omega$). Zajímají nás změny y na změnách x . Ale z matematického rozboru plyne, že kmitočtová závislost $y = f(p)$ závisí jednoznačně na velikostech koeficientů a_i a b_i . Jejich hodnoty ale závisí právě na vstupních parametrech x . Stačí tedy počítat citlivosti koeficientů a_i a b_i na parametrech x . V takových případech používáme koeficient absolutní citlivosti. Postup má výhodu, protože citlivosti jsou pouze reálná čísla a výrazy zpravidla jednodušší než připočítání se systémovou funkcí. Při použití koeficientů absolutní citlivosti počítáme výrazy typu

$$T_{x_i}^{a_1} = \frac{\partial a_1}{\partial x_i} \quad \dots \quad T_{x_i}^{a_s} = \frac{\partial a_s}{\partial x_i} \quad T_{x_i}^{b_1} = \frac{\partial b_1}{\partial x_i} \quad \dots \quad T_{x_i}^{b_r} = \frac{\partial b_r}{\partial x_i} \quad . \quad (92)$$

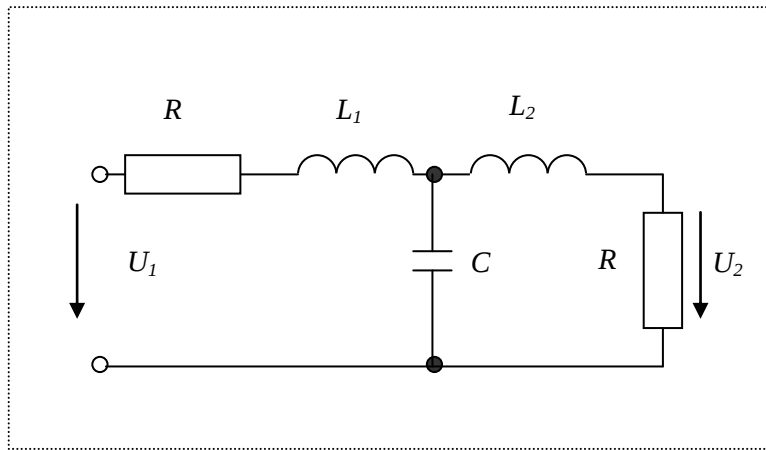
Pak absolutní změny koeficientů a_i a b_i jsou dle vztahů

$$\begin{aligned} \Delta a_0 &= T_{x_1}^{a_0} \cdot \Delta x_1 + T_{x_2}^{a_0} \cdot \Delta x_2 + \dots + T_{x_n}^{a_0} \Delta x_n \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \Delta a_r &= T_{x_1}^{a_r} \cdot \Delta x_1 + T_{x_2}^{a_r} \cdot \Delta x_2 + \dots + T_{x_n}^{a_r} \Delta x_n \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \Delta b_0 &= T_{x_1}^{b_0} \cdot \Delta x_1 + T_{x_2}^{b_0} \cdot \Delta x_2 + \dots + T_{x_n}^{b_0} \Delta x_n \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \Delta b_s &= T_{x_1}^{b_s} \cdot \Delta x_1 + T_{x_2}^{b_s} \cdot \Delta x_2 + \dots + T_{x_n}^{b_s} \Delta x_n \quad . \end{aligned} \quad (93)$$

Protože absolutní změny koeficientů jsou dány soustavou lineárních rovnic je výhodné a přehledné použít pro zápis matice. Matice soustavy je pak matice citlivostí.

Příklad 3.2.

Vypočtěte koeficienty absolutních citlivostí pro koeficienty napětového přenosu a zapište výslednou soustavu rovnic pomocí matice. Na obrázku 29 je schéma filtru dolní propusti s hodnotami $L_1 = L_2 = 1\text{ H}$, $R = 1\Omega$, $C = 1\text{ F}$.



Obrázek 29: dolní propust



Pro napětový přenos platí vztah

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{b_3 \cdot p^3 + b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \quad , \quad (94)$$

kde pro koeficienty platí

$$b_3 = \frac{L_1 L_2 C}{R} \quad b_2 = (L_1 + L_2)C \quad b_1 = \frac{L_1 + L_2 + 2R^2}{R} \quad b_0 = 2 \quad . \quad (95)$$

Vypočteme koeficienty absolutních citlivostí. Například pro koeficient b_3 vychází

$$T_R^{b_3} = \frac{\partial b_3}{\partial R} = -\frac{L_1 L_2 C}{R^2} \quad T_C^{b_3} = \frac{L_1 L_2}{R} \quad T_{L_1}^{b_3} = \frac{L_2 C}{R} \quad T_{L_2}^{b_3} = \frac{L_1 C}{R} \quad . \quad (96)$$

Obdobně se postupuje i při výpočtu ostatních koeficientů. Výslednou soustavu rovnic pro absolutní změny koeficientů b_i zapíšeme v maticovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} \Delta b_3 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L_1 L_2 C}{R^2} & \frac{L_1 L_2}{R} & \frac{L_2 C}{R} & \frac{L_1 C}{R} \\ 0 & L_1 + L_2 & 0 & 0 \\ 2 - \frac{L_1 L_2}{R^2} & 0 & \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta R \\ \Delta C \\ \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \end{pmatrix} . \quad (97)$$

Po číselném dosazení dostaneme matici citlivostí

$$(T) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (98)$$

Z číselných hodnot plyne, že nejvíce je ovlivňován koeficient b_3 a nejméně je ovlivňován koeficient b_1 .

Semirelativní citlivostní koeficienty mají význam v teorii filtrů. Používají se na sledování změn polohy nul a pólů systémových funkcí a vlivu těchto změn na změnu kmitočtových závislostí přenosových charakteristik filtrů. Mnohočleny v systémové funkci lze zapsat také ve tvaru součinu kořenů mnohočlenů. Dostaneme tak

$$y = \frac{(p - p_n)(p - p_{n-1}) \cdots (p - p_1)(p - p_0)}{(p - p_m)(p - p_{m-1}) \cdots (p - p_1)(p - p_0)} . \quad (99)$$

Hodnota p pro kterou je výraz v čitateli nulový se nazývá **nula** systémové funkce y , hodnota p pro kterou je výraz ve jmenovateli nulový se nazývá **pól** systémové funkce y . Pokud bychom počítali číselné hodnoty koeficientů relativních citlivostí pro hodnoty kmitočtů v nulách nebo pólech, dostali měli by tyto koeficienty buď nulovou, nebo nekonečně velkou hodnotu. Pokud se pro výpočet použije koeficient semirelativní citlivosti Q , tak se tento problém odstraní, protože se nepočítá s jmenovitou hodnotou y_0 , která je právě nulová, nebo nekonečně velká. V teorii filtrů jsou citlivosti v nulách a pólech zajímavé proto, že zde dochází zpravidla k největším změnám kmitočtové charakteristiky vlivem změn parametrů x .

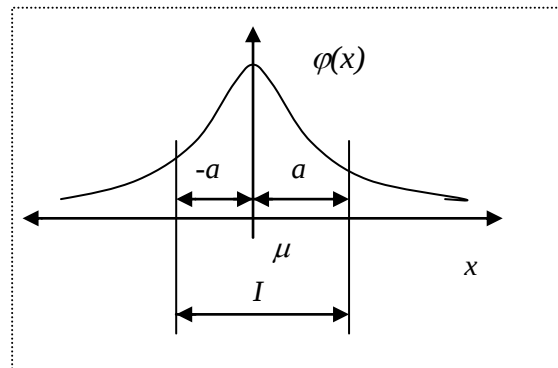
Koeficienty relativní citlivosti S_x^y se používají při výpočtu tolerancí výstupní veličiny, návrhu tolerancí vstupních parametrů, optimalizaci citlivosti elektrického obvodu, hledání nejcitlivějších prvků tj. prvků s největším vlivem na změny výstupní veličiny. Tento učební text bude dále zaměřen na využití koeficientů relativní citlivosti, protože to má praktický význam.

□ Metodika výpočtu tolerancí.

Skutečné hodnoty vstupních parametrů x_i a výstupních veličin y_i lze považovat za náhodné veličiny, které jsou rozptýlené kolem svých středních hodnot. Tyto střední hodnoty ztotožňujeme s jmenovitými hodnotami vstupních parametrů a výstupních veličin. Absolutní odchylky vstupních parametrů Δx_i a výstupních veličin Δy lze také považovat za náhodné veličiny. Jim přiřazujeme střední kvadratickou odchylku σ_x a σ_y . Pak i relativním odchylkám vstupních parametrů a výstupních veličin přiřazujeme relativní střední kvadratické odchylky δ_x a δ_y . Tedy i výrobním tolerancím lze přiřadit význam středních kvadratických odchylek, protože výrobní tolerance jsou pouze mezními případy absolutních či relativních odchylek. Základní poučení o pojmech z oblasti matematické statistiky použité v této kapitole lze najít v [6], [7].

Skutečné hodnoty náhodné veličiny, které jsou blízké ke střední hodnotě, se vyskytují zřejmě častěji, tedy s větší četností a tedy i větší pravděpodobností, než hodnoty vzdálenější od středních hodnot. Lze tedy říci, že skutečná hodnota vstupního parametru či výstupní veličiny, která přísluší toleranci bude mít asi menší pravděpodobnost výskytu, než skutečná hodnota, která leží blíže jmenovité hodnoty. O statistickém rozložení skutečných hodnot vstupních parametrů a výstupních veličin kolem jmenovitých hodnot se předpokládá, že jde o normální tedy Gaussovo rozložení.

Skutečná hodnota vstupního parametru či výstupní veličiny tedy leží s jistou pravděpodobností v rozpětí hodnot určeném tolerancí kolem jmenovité hodnoty. Toto rozpětí hodnot je totožné s intervalem spolehlivosti. **Interval spolehlivosti** nebo-li **konfidenční interval** je definován jako interval, ve kterém leží hodnota náhodné veličiny s jistou danou pravděpodobností zvanou též **spolehlivost**. Na obrázku 30 je interval spolehlivosti I v případě hustoty pravděpodobnosti $\varphi(x)$ normálního rozdělení se střední hodnotou μ a tolerancí $\pm a$.



obrázek 30: Interval spolehlivosti I

Jedná se o symetrický interval spolehlivosti rozložený kolem střední hodnoty μ . Výrobní tolerance v procentech se vlastně udává jako $\delta = (a/\mu) \cdot 100$. Pro případ normálního rozdělení platí, že pravděpodobnost se kterou leží hodnota x v intervalu spolehlivosti lze vyjádřit v závislosti na poměru střední kvadratické odchylky σ normálního rozdělení a hodnoty a . Platí, že pro $a = \sigma$ je pravděpodobnost 68,26 %, pro $a = 2\sigma$ je to 95,5 %, pro $a = 3\sigma$ je to 99,73 %. Pravděpodobnosti jsou rovny ploše pod křivkou $\varphi(x)$ normovaného normálního rozdělení v konfidenčním intervalu I . Výrobní tolerance součástek se zpravidla udává pro pravděpodobnost 99,73 %. To znamená, že s pravděpodobností jen 0,27 % bude součástka svou skutečnou hodnotou mimo toleranci. Máme tedy v elektrickém obvodu vstupní parametry $x_i = x_{0i} \pm \delta_i \%$, a ty prostřednictvím systémové funkce

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vytvářejí výstupní veličinu $y = y_0 \pm \delta \%$.

Podle Gaussova zákona o sčítání středních kvadratických odchylek platí pro **nejpravděpodobnější hodnotu tolerance výstupní veličiny** vztah

$$\delta = \sqrt{\left(S_{x_1}^y \cdot \delta_{x_1}\right)^2 + \left(S_{x_2}^y \cdot \delta_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(S_{x_n}^y \cdot \delta_{x_n}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(S_{x_i}^y \cdot \delta_{x_i}\right)^2} \quad (100)$$

Střední kvadratické odchylky (a tedy i relativní střední kvadratické odchylky) se sčítají podle svých kvadratických hodnot, přitom ale jsou ještě násobeny citlivostním koeficientem, který vytváří „váhu“ příslušné odchylky. Parametr s větším vlivem na chování obvodu se tedy podílí větší měrou na celkové toleranci výstupní veličiny.

Použití koeficientů relativních citlivostí a relativních tolerancí je zde výhodné, protože v elektrickém obvodu jako vstupní parametry máme fyzikální veličiny s různým fyzikálním rozměrem (odpor, kapacita, indukčnost, napětí....) a sčítání absolutních tolerancí takových veličin je nekorektní.

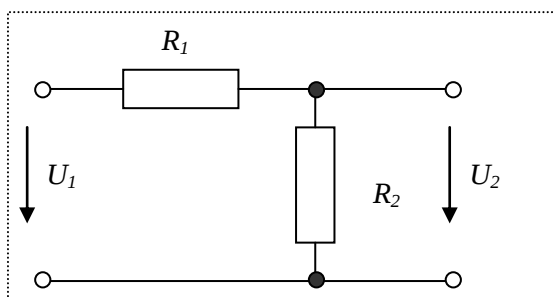
Uvedený vzorec platí za předpokladu, že δ_{x_i} jsou statisticky nezávislé, to znamená, že skutečná hodnota jednoho vstupního parametru neovlivňuje skutečnou hodnotu jiného vstupního parametru. Tento předpoklad nemusí být v obvodu splněn například pokud existuje mezi vstupními parametry nějaká fyzikální vazba (třeba teplotou, osvětlením, magnetickým polem..)

Při výpočtech může vzniknout dojem, že uvedený vzorec dává poněkud optimistické odhady tolerance výstupní veličiny. Je třeba si uvědomit, že jde o nejpravděpodobnější hodnotu. To znamená, že může nastat i situace, kdy skutečné hodnoty vstupních parametrů mají takové hodnoty, které vedou na hodnotu výstupní veličiny, která leží mimo vypočtenou nejpravděpodobnější toleranci. Tento stav se označuje jako **nejhorší případ** avšak může nastat s mnohem menší pravděpodobností. Například pokud počítáme nejpravděpodobnější stav s pravděpodobností 99,7 %, tak nejhorší případ nastane s pravděpodobností $100 - 99,7 = 0,3$ %. Tolerance nejhoršího případu lze počítat ze vztahu

$$\delta = \sum_{i=1}^n |S_{x_i}^y| \cdot |\delta_{x_i}| \quad (101)$$

Příklad 3.3.

Vypočítejte toleranci výstupního napětí U_2 na parametry vstupní napětí U_1 a odpory R_1 a R_2 napěťového děliče na obrázku 26. Jmenovité hodnoty parametrů jsou $U_1 = 1$ V, $R_1 = 1$ k Ω , $R_2 = 2$ k Ω , tolerance parametrů jsou 10 %. Vypočítejte také toleranci výstupního napětí pro nejhorší případ.



Obrázek 31: Odporový napěťový dělič



Pro výstupní napětí U_2 platí vztah

$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad . \quad (102)$$

Vypočteme relativní citlivostní koeficienty

$$S_{U_1}^{U_2} = \frac{U_1}{U_2} \frac{\partial U_2}{\partial U_1} = \frac{U_1(R_1 + R_2)}{U_1 R_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1 \quad , \quad (103)$$

$$S_{R_1}^{U_2} = \frac{R_1}{U_2} \frac{\partial U_2}{\partial R_1} = \frac{R_1(R_1 + R_2)}{U_1 R_2} \frac{-U_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} = -0,333 \quad , \quad (104)$$

$$S_{R_2}^{U_2} = \frac{R_2}{U_2} \frac{\partial U_2}{\partial R_2} = \frac{R_2(R_1 + R_2)}{U_1 R_2} \frac{U_1 R_1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -0,333 \quad . \quad (105)$$

Toleranci napětí U_2 vypočteme dle vztahu

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (S_{x_i}^{U_2} \cdot \delta_{x_i})^2} = \sqrt{(1 \cdot 10)^2 + (-0,333 \cdot 10)^2 + (0,333 \cdot 10)^2} = 11,03 \quad \% \quad . \quad (106)$$

Pro nejhorší případ dostaneme hodnotu

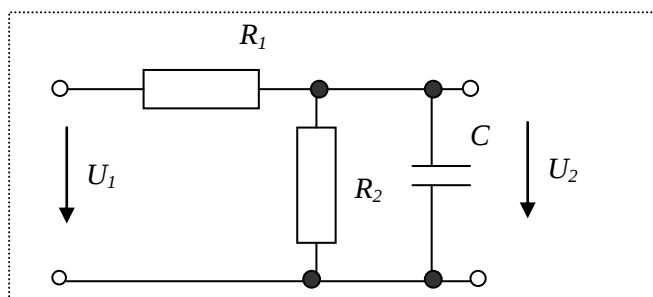
$$\delta = \sum_{i=1}^3 |S_{x_i}^{U_2}| \cdot |\delta_{x_i}| = 1 \cdot 10 + 0,333 \cdot 10 + 0,333 \cdot 10 = 16,6 \quad \% \quad . \quad (107)$$

Nejhorší případ nastane například pro $U_1 = 1,1 \text{ V}$, $R_1 = 1,1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 0,8 \text{ k}\Omega$. Dostaneme $U_2 = 0,558 \text{ V}$, což je hodnota o 16,2 % nižší než jmenovitá hodnota $U_2 = 0,666 \text{ V}$. Ve složitějších obvodech, které obsahují více součástek už nemusí být tak jednoduché stanovit skladbu hodnot parametrů pro nejhorší případ a je tedy výhodnější určit toleranci nejhoršího případu z uvedeného vzorce.

Ted' si ukážeme druhý typ úlohy na výpočet tolerancí. V daném obvodu máme předepsanou toleranci výstupní veličiny a je třeba určit potřebné tolerance vstupních parametrů. Protože výstupní veličina závisí na n vstupních parametrech bude nutno řešit rovnici o n neznámých, a tedy úloha má mnoho řešení. Aby bylo dosaženo jednoznačného řešení, je třeba dodatečně zvolit další podmínky. Je možno postupovat třeba tak, že zvolíme zkusmo tolerance a jejich hodnoty rozdělíme podle velikosti citlivostí a toleranci u nejméně citlivého parametru z rovnice vypočítáme jako řešení. Tolerance musíme volit s ohledem na jejich výrobní hodnotu – výsledek je třeba zaokrouhlit na nejbližší nižší, aby bylo splněno zadání, případně aby byla nějaká rezerva.

Příklad 3.4.

Určete potřebnou výrobní toleranci odporu R_2 pro toleranci časové konstanty τ , která nemá překročit 21 % v zapojení dle obrázku 32. Jmenovité hodnoty a tolerance ostatních prvků $C = 1 \text{ nF} \pm 20 \%$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega \pm 5 \%$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$.



Obrázek 32: Korekční obvod



Časová konstanta τ obvodu pro přenos napětí U_2/U_1 je

$$\tau = \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2} \quad (108)$$

Vypočítáme koeficienty relativních citlivostí τ na parametry C , R_1 , R_2

$$S_C^\tau = 1 \quad S_{R_1}^\tau = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,666 \quad S_{R_2}^\tau = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,333 \quad (109)$$

Všimněte si, že hodnota S_C^τ nezávisí na žádném vstupním parametru. Pro toleranci časové konstanty δ_τ máme rovnici

$$\delta_{\tau}^2 = (S_C^{\tau} \cdot \delta_C)^2 + (S_{R_1}^{\tau} \cdot \delta_{R_1})^2 + (S_{R_2}^{\tau} \cdot \delta_{R_2})^2 \quad . \quad (110)$$

Hledanou toleranci δ_{R_2} vypočítáme jako

$$\delta_{R_2} = \sqrt{\frac{\delta_{\tau}^2 - (S_C^{\tau} \cdot \delta_C)^2 - (S_{R_1}^{\tau} \cdot \delta_{R_1})^2}{(S_{R_2}^{\tau})^2}} = \sqrt{\frac{21^2 - (1 \cdot 20)^2 - (0,666 \cdot 5)^2}{(0,333)^2}} = 16,62 \quad \% \quad . \quad (111)$$

Vypočtenou hodnotu zaokrouhlíme na 10 %, protože tolerance 20 % by nesplnila požadavek.

□ Matice citlivostí.

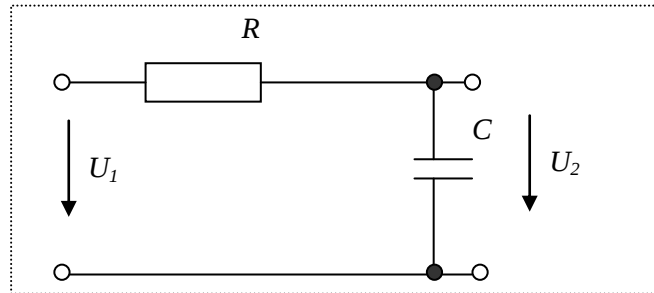
V případě, že sledujeme několik výstupních veličin v tomtéž obvodu, můžeme dostat poměrně velký počet citlivostních koeficientů. V případě, že máme m výstupních veličin a obvod má n vstupních parametrů, dostaneme $m \cdot n$ citlivostních koeficientů. Aby se zlepšila přehlednost sledování citlivostních koeficientů lze užít maticový zápis. Soustavu lineárních rovnic pro závislost relativních změn výstupních veličin na relativních změnách vstupních parametrů lze zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \delta y_1 \\ \vdots \\ \delta y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{x_1}^{y_1} & \dots & S_{x_n}^{y_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{x_1}^{y_m} & \dots & S_{x_n}^{y_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} \quad . \quad (112)$$

Protože rovnice jsou obecně závislé na kmitočtu, může takový maticový zápis být použit buď pro sledování změn jedné výstupní veličiny při několika různých kmitočtech, nebo pro sledování změn několika různých výstupních veličin při jednom kmitočtu.

Příklad 3.5.

Vypočítejte koeficienty relativních citlivostí v obvodu na obrázku 33 pro vstupní impedanci Z a napěťový přenos $K=U_2/U_1$ pro zlomový kmitočet a pro kmitočet $f = 500$ Hz. Výsledky zapište pomocí matic. $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$.



Obrázek 33: RC dolní propust

Pro napěťový přenos K a vstupní impedanci Z máme tyto vztahy

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + pCR} \quad Z = R + \frac{1}{pC} = \frac{1 + pCR}{pC} \quad (113)$$

Vypočítáme relativní citlivostní koeficienty podle jejich definic Dostaneme

$$S_R^K = \frac{R}{K} \frac{\partial K}{\partial R} = -\frac{pRC}{1 + pCR} \quad S_C^K = \frac{C}{K} \frac{\partial K}{\partial C} = -\frac{pCR}{1 + pCR} \quad (114)$$

$$S_R^Z = \frac{R}{Z} \frac{\partial Z}{\partial R} = \frac{pCR}{1 + pCR} \quad S_C^Z = \frac{C}{Z} \frac{\partial Z}{\partial C} = -\frac{1}{1 + pCR} \quad (115)$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme pro kmitočet zlomu tj. $f_c = 1/(2\pi RC) = 1592$ Hz hodnoty

$$\begin{aligned} S_R^K &= -0,5 - j0,5 & S_C^K &= -0,5 - j0,5 \\ S_R^Z &= 0,5 + j0,5 & S_C^Z &= -0,5 - j0,5 \end{aligned} \quad (116)$$

Pro kmitočet $f = 500$ Hz dostaneme hodnoty

$$\begin{aligned} S_R^K &= -0,089 - j0,285 & S_C^K &= -0,089 - j0,285 \\ S_R^Z &= 0,089 + j0,285 & S_C^Z &= -0,91 + j0,285 \end{aligned} \quad (117)$$

Výsledky zapíšeme v maticové formě. Nejprve pro kmitočet $f_c = 1592$ Hz.

$$\begin{pmatrix} \delta_K \\ \delta_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_R^K & S_C^K \\ S_R^Z & S_C^Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_R \\ \delta_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 - j0,5 & -0,5 - j0,5 \\ 0,5 + j0,5 & -0,5 - j0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_R \\ \delta_C \end{pmatrix} \quad (118)$$

Nyní zapíšeme výsledky pro impedanci Z a pro kmitočty $f = 500$ Hz a $f = 1592$ Hz

$$\begin{pmatrix} \delta_Z(500) \\ \delta_Z(1592) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_R^Z & S_C^Z \\ S_R^Z & S_C^Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_R \\ \delta_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,089 + j0,285 & -0,91 + j0,285 \\ 0,5 + j0,5 & -0,5 - j0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_R \\ \delta_C \end{pmatrix} \quad (119)$$



Shrnutí pojmů 3.1.

Absolutní citlivostní koeficient je parciální derivace systémové funkce podle příslušného vstupního parametru. Je to podíl diferenciální změny výstupní veličiny a diferenciální změny příslušného vstupního parametru.

Relativní citlivostní koeficient je to podíl relativní diferenciální změny výstupní veličiny a relativní diferenciální změny vstupního parametru. Relativní změny jsou vztaženy k odpovídajícím jmenovitým hodnotám vstupu a výstupu.

Konfidenční interval rozsah hodnot veličiny do kterého padne skutečná hodnota veličiny s předem danou pravděpodobností.

Nejpravděpodobnější hodnota tolerance je tolerance výstupní veličiny kterou lze očekávat s největší pravděpodobností při daných hodnotách tolerancí vstupních parametrů. Viz Gaussův vztah.

Nejhorší případ je hodnota tolerance výstupní veličiny, která může nastat při nejméně příznivých skutečných hodnotách vstupních parametrů.



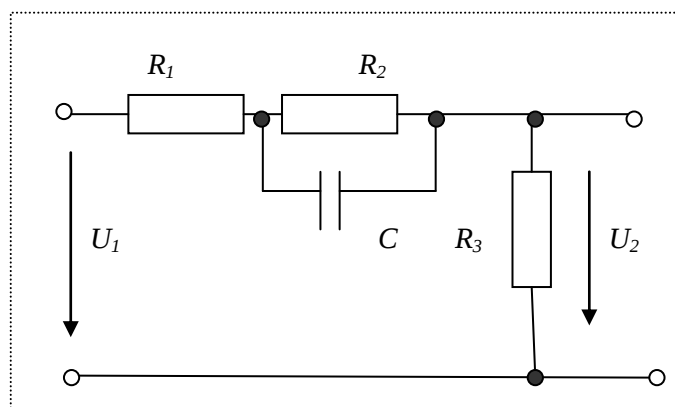
Otázky 3.1.

- 1 Kdy používáme koeficienty absolutní, relativní a semirelativní citlivosti?
- 2 Proč je výhodné v elektronice používat relativní citlivostní koeficienty?
- 3 Kdy je citlivostní koeficient funkcí a kdy číslem?
- 4 Jak vypočítáme nejpravděpodobnější toleranci výstupní veličiny?
- 5 Jak vypočítáme potřebnou toleranci vstupního parametru?
- 6 Co znamená nejhorší případ a jak se vypočítá jemu odpovídající tolerance výstupní veličiny?



Úlohy 3.1.

1. Pro vyvážený Wheatstoneův můstek složený ze 4 odporů zjistěte pro jaké hodnoty odporů bude zapojení nejcitlivější na změnu hodnot odporů. Předpokládejte, že výstup můstku je nezatížený
2. Pro kmitočtový korektor na obrázku 34 odvoďte vztahy pro časové konstanty pro napěťový přenos U_2/U_1 . Vypočítejte relativní citlivostní koeficienty pro časové konstanty. Jmenovité hodnoty vstupních parametrů jsou $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 62 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 33 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ nF}$. Vypočítejte toleranci časových konstant když tolerance kapacity je 20 % a odporů 10 %.



Obrázek 34: Kmitočtový korektor

3. Pro kmitočtový korektor z příkladu 2 vypočítejte pro nulový a nekonečně velký kmitočet hodnoty napěťového přenosu a vypočítejte hodnoty tolerancí těchto přenosů.
4. Pro zapojení z příkladu 2 a uvedené jmenovité hodnoty určete potřebné tolerance vstupních parametrů pokud tolerance výstupních veličin tj. časové konstanty nemají přesáhnout 12 % a tolerance limitních hodnot napěťových přenosů z příkladu 3 nemají přesáhnout 5 %.



Odměna a odpočinek

Pokud jste dočetli až sem, je vhodná chvíle přestat a odpočinout si. Pak je možné se třeba vrátit k něčemu co se zdálo obtížné a projít to znovu, případně si ujasnit a upevnit znalosti řešením příkladů v tomto textu. V další kapitole na Vás čeká zase matematika. Ale ta Vám má právě usnadnit výpočty. Tak nebuďte zklamaní a snažte se vydržet.

3.2. Metody stanovení citlivostních koeficientů.



Čas ke studiu: 5 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat podmínky použití metod výpočtu citlivostních koeficientů
- popsat základní metody výpočtu citlivostních koeficientů
- vypočítat citlivostní koeficienty několika metodami



Výklad

□ Výpočet dle definice.

První metodou je výpočet na základě definice citlivostního koeficientu. Tuto metodu jste poznali již v předchozí kapitole v řešených příkladech a v příkladech k samostatnému řešení. Systémové funkce mohou být i v poměrně jednoduchých obvodech dosti složité výrazy a v takových případech výpočty derivací mohou být obtížné. Proto má výpočet citlivostních koeficientů přímo z definice jen omezený význam na případy, kde systémová funkce není příliš složitá.

□ Výpočet dle speciálního vztahu.

V případě výpočtu koeficientu relativní citlivosti pro určité případy systémových funkcí byl odvozen vztah, který zjednodušuje výpočty. V elektronice se často vyskytují systémové funkce ve tvaru podílu dvou mnohočlenů. Takovou funkci lze zapsat jako

$$y(x_i, p) = \frac{P(x_i, p)}{Q(x_i, p)} = \frac{a_r(x_i)p^r + a_{r-1}(x_i)p^{r-1} + \dots + a_1(x_i)p + a_0(x_i)}{b_s(x_i)p^s + b_{s-1}(x_i)p^{s-1} + \dots + b_1(x_i)p + b_0(x_i)} \quad , \quad (120)$$

kde $y(x_i, p)$ je systémová funkce závislá na parametru x_i a komplexním kmitočtu p . Výraz $P(x_i, p)$ je mnohočlen v čitateli, výraz $Q(x_i, p)$ je mnohočlen ve jmenovateli, $a_r(x_i)$, $b_s(x_i)$ jsou reálné koeficienty závislé na parametrech x_i , r , s jsou přirozená čísla. Pro koeficient relativní citlivosti dostaneme (užijeme zápis koeficientu pomocí přirozených logaritmů, což zkrátí výpočty)

$$S_{x_i}^y = \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{P(x_i, p)}{Q(x_i, p)} \right) \right)}{\partial (\ln x_i)} = \frac{\partial (\ln P(x_i, p) - \ln Q(x_i, p))}{\partial (\ln x_i)} = \frac{\frac{\partial P(x_i, p)}{P(x_i, p)} - \frac{\partial Q(x_i, p)}{Q(x_i, p)}}{\frac{\partial x_i}{x_i}} =$$

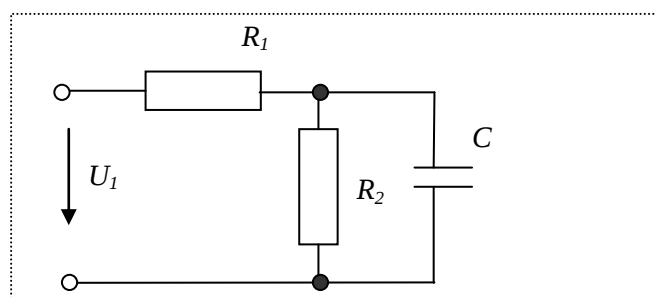
$$= x_i \left(\frac{\frac{\partial P(x_i, p)}{\partial x_i}}{P(x_i, p)} - \frac{\frac{\partial Q(x_i, p)}{\partial x_i}}{Q(x_i, p)} \right) \quad . \quad (121)$$

Často se užívá pro zápis tohoto vzorce zkrácená symbolika

$$S_{x_i}^y = x_i \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) \quad \text{kde} \quad y = \frac{P}{Q} \quad P' = \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad Q' = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \quad . \quad (122)$$

Příklad 3.6.

Vypočítejte relativní citlivostní koeficienty vstupní impedance Z na vstupní parametry R_1 , R_2 , C obvodu na obrázku 35.



Obrázek 35: RC obvod



Impedance obvodu bude dle vztahu

$$Z = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1 + R_2 + pCR_1R_2}{1 + pCR_2} = \frac{P}{Q} \quad . \quad (123)$$

Vypočítáme citlivostní koeficienty

$$S_{R_1}^z = R_1 \left(\frac{1 + pCR_1}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2} - \frac{0}{1 + pCR_2} \right) = \frac{R_1 + pCR_1R_2}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2} \quad (124)$$

$$S_{R_2}^z = R_2 \left(\frac{1 + pCR_1}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2} - \frac{pC}{1 + pCR_2} \right) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + pC(2R_1R_2 + R_2^2) + p^2C^2R_1R_2^2}$$

$$S_C^z = C \left(\frac{pR_1R_2}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2} - \frac{pR_2}{1 + pCR_2} \right) = \frac{-pCR_2^2}{R_1 + R_2 + pC(2R_1R_2 + R_2^2) + p^2C^2R_1R_2^2}.$$

□ Výpočet numerickou metodou.

V případě složitějšího tvaru systémové funkce je analytický výpočet citlivostních koeficientů obtížný. To může nastat zpravidla když jde o složitější obvod, který obsahuje více součástek, případně obvodový model některého prvku (například tranzistor) způsobí, že systémová funkce je složitá. V takovém případě lze použít numerickou metodu pro přibližný odhad velikosti citlivostních koeficientů. Metoda je založena na náhradě diferenciálů veličin jejich diferenciemi. Tedy $\partial x \approx \Delta x$ a $\partial y \approx \Delta y$. Pak počítáme citlivostní koeficienty ze vztahů

$$T_{x_i}^y = \frac{\Delta y}{\Delta x_i} \quad S_{x_i}^y = \frac{x_{0i}}{y_0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} \quad \text{kde} \quad \Delta x_i = x_i - x_{0i} \quad \Delta y = y - y_0 \quad . \quad (125)$$

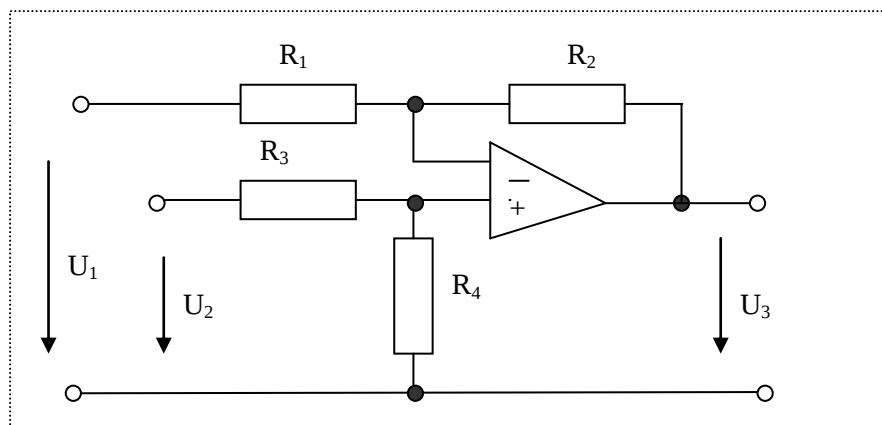
Doporučuje se aby hodnota Δx nebyla větší než 20 % jmenovité hodnoty x_{0i} , protože čím větší je nelinearita systémových funkcí v okolí x_{0i} tím větší je nepřesnost stanovení citlivostního koeficientu touto metodou a nepřesnost se zvětšuje s rostoucí hodnotou Δx .

Při výpočtu koeficientu se postupuje tak, že nejprve se určí hodnota y_0 pro jmenovité hodnoty x_0 . Pak se změní v obvodu jen jeden parametr x_{0i} o hodnotu Δx_i na hodnotu x_i a pro obvod se určí hodnota y . Vypočte se hodnota $\Delta y = y - y_0$. Z hodnot Δx_i , Δy , případně x_{0i} , y_0 se pak vypočítá citlivostní koeficient $T_{x_i}^y$ nebo $S_{x_i}^y$. Postup se pak opakuje pro ostatní parametry. Pro tuto metodu stanovení citlivostních koeficientů lze využít analýzu obvodu libovolnou vhodnou metodou. Pro analýzu je možno využít i některého z mnoha počítačových programů.

Pro větší názornost na použití numerické metody výpočtu koeficientů relativní citlivosti si můžete pustit [animaci č. 1](#) z příloženého CD. (Podržení klávesy Ctrl a stiskem levého tlačítka myši na zvýrazněném slově „animaci č. 1“ spustíte animaci.)

Příklad 3.7.

Vypočtěte relativní citlivostní koeficienty pro napětí U_3 rozdílového zesilovače s operačním zesilovačem dle obrázku 36. Jmenovité hodnoty vstupních parametrů jsou $R_{01} = R_{03} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{02} = R_{04} = 20 \text{ k}\Omega$, $U_{01} = 1 \text{ V}$, $U_{02} = 2 \text{ V}$.



Obrázek 36: Rozdílový zesilovač



Pro obvod lze odvodit při použití ideálního operačního zesilovače vztah

$$U_3 = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)} U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1 \quad . \quad (126)$$

Jmenovitá hodnota napětí U_3 je

$$U_{03} = \frac{2 \cdot 10^4 (10^4 + 2 \cdot 10^4)}{10^4 (10^4 + 2 \cdot 10^4)} 2 - \frac{2 \cdot 10^4}{10^4} 1 = 2 \text{ V} \quad . \quad (127)$$

Pro další výpočty U_3 volíme postupně zvětšení každého parametru o 10 %, ostatní parametry zůstávají beze změn. Nejprve R_1 zvětšíme o 1 k Ω .

$$U_3 = \frac{2 \cdot 10^4 (1,1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)}{10^4 (1,1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)} 2 - \frac{2 \cdot 10^4}{1,1 \cdot 10^4} 1 = 1,939 \text{ V} \quad . \quad (128)$$

Citlivostní koeficient bude

$$S_{R_1}^{U_3} = \frac{R_{01}}{U_{03}} \frac{U_3 - U_{03}}{R_1 - R_{01}} = \frac{10^4}{2} \frac{-0,061}{1 \cdot 10^3} = -0,305 \quad . \quad (129)$$

Zvětšíme R_2 o 2 k Ω . Odpovídající napětí bude

$$U_3 = \frac{2 \cdot 10^4 (10^4 + 2,2 \cdot 10^4)}{10^4 (10^4 + 2 \cdot 10^4)} 2 - \frac{2,2 \cdot 10^4}{10^4} 1 = 2,066 \text{ V} \quad . \quad (130)$$

Citlivostní koeficient bude

$$S_{R_2}^{U_3} = \frac{R_{02}}{U_{03}} \frac{U_3 - U_{03}}{R_2 - R_{02}} = \frac{2 \cdot 10^4}{2} \frac{0,066}{2 \cdot 10^3} = 0,33 \quad . \quad (131)$$

Zvětšíme R_3 o 1 k Ω . Odpovídající napětí bude

$$U_3 = \frac{2 \cdot 10^4 (10^4 + 2 \cdot 10^4)}{10^4 (1,1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)} 2 - \frac{2 \cdot 10^4}{10^4} 1 = 1,87 \text{ V} \quad . \quad (132)$$

Citlivostní koeficient bude

$$S_{R_3}^{U_3} = \frac{R_{03}}{U_{03}} \frac{U_3 - U_{03}}{R_3 - R_{03}} = \frac{1 \cdot 10^4}{2} \frac{-0,13}{1 \cdot 10^3} = -0,65 \quad . \quad (133)$$

Zvětšíme R_4 o 2 k Ω . Odpovídající napětí bude

$$U_3 = \frac{2,2 \cdot 10^4 (10^4 + 2 \cdot 10^4)}{10^4 (10^4 + 2,2 \cdot 10^4)} 2 - \frac{2 \cdot 10^4}{10^4} 1 = 2,125 \text{ V} \quad . \quad (134)$$

Citlivostní koeficient bude

$$S_{R_4}^{U_3} = \frac{R_{04}}{U_{03}} \frac{U_3 - U_{03}}{R_4 - R_{04}} = \frac{2 \cdot 10^4}{2} \frac{0,125}{2 \cdot 10^3} = 0,625 \quad . \quad (135)$$

Zvětšíme U_1 o 0,1 V. Odpovídající napětí bude

$$U_3 = \frac{2 \cdot 10^4 (10^4 + 2 \cdot 10^4)}{10^4 (1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)} 2 - \frac{2 \cdot 10^4}{10^4} 1,1 = 1,8 \text{ V} \quad . \quad (136)$$

Citlivostní koeficient bude

$$S_{U_1}^{U_3} = \frac{U_{01}}{U_{03}} \frac{U_3 - U_{03}}{U_1 - U_{01}} = \frac{1}{2} \frac{-0,2}{0,1} = -1 \quad . \quad (137)$$

Zvětšíme U_2 o 0,2 V. Odpovídající napětí bude

$$U_3 = \frac{2 \cdot 10^4 (10^4 + 2 \cdot 10^4)}{10^4 (1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)} 2,2 - \frac{2 \cdot 10^4}{10^4} 1 = 2,4 \text{ V} \quad . \quad (138)$$

Citlivostní koeficient bude

$$S_{U_2}^{U_3} = \frac{U_{02}}{U_{03}} \frac{U_3 - U_{03}}{U_2 - U_{02}} = \frac{2}{2} \frac{0,4}{0,2} = 2 \quad . \quad (139)$$

Kdybychom vypočítali hodnoty citlivostních koeficientů z analytických vztahů pro citlivostní koeficienty, dostali bychom hodnoty

$$S_{R_1}^{U_3} = -0,333 \quad S_{R_2}^{U_3} = 0,333 \quad S_{R_3}^{U_3} = -0,666 \quad S_{R_4}^{U_3} = 0,666 \quad , \quad (140)$$

$$S_{U_1}^{U_3} = -1 \quad S_{U_2}^{U_3} = 2 \quad . \quad (141)$$

Můžete porovnat tyto hodnoty s hodnotami získanými numerickou metodou pro názornou představu o přesnosti numerické metody v daném případě.

□ Výpočet z experimentálních hodnot.

Číselné hodnoty citlivostních koeficientů lze také stanovit výpočtem z hodnot vstupních parametrů a výstupních veličin získaných měření. Postup je shodný s postupem uvedeným v předchozím odstavci Výpočet numerickou metodou. V tomto případě neprovádíme analýzu obvodu, ale používáme hodnoty získané měření. Výhodou metody je, že je v principu použitelná na jakýkoli obvod, měření probíhá na skutečném obvodu, mohou být snadno zahrnuty i parazitní parametry součástek.

Nevýhodou je náročnost na přístrojové vybavení vhodné přesnosti a kvality a nutnost vhodným způsobem zabezpečit možnost změn vstupních parametrů – například použitím dekád. Pro větší názornost postupu určení koeficientů relativní citlivosti z experimentálních hodnot si můžete pustit [animaci č. 2](#) z příloženého CD.



Shrnutí pojmů 3.2

Různé metody výpočtu citlivostních koeficientů

Metoda dle definice vhodná v jednoduchých případech kdy výpočet derivací není složitý

Výpočet dle speciálního vztahu metoda je vhodná když systémová funkce je podílem dvou mnohočlenů.

Výpočet numerickou metodou metoda je vhodná pro složitější obvody, nutná je analýza obvodu. Metodu používají některé počítačové programy např. SPICE.

Výpočet z experimentálních hodnot metoda je vhodná i pro složitý obvod, obdoba numerické metody, místo analýzy se hodnoty získávají měřením,



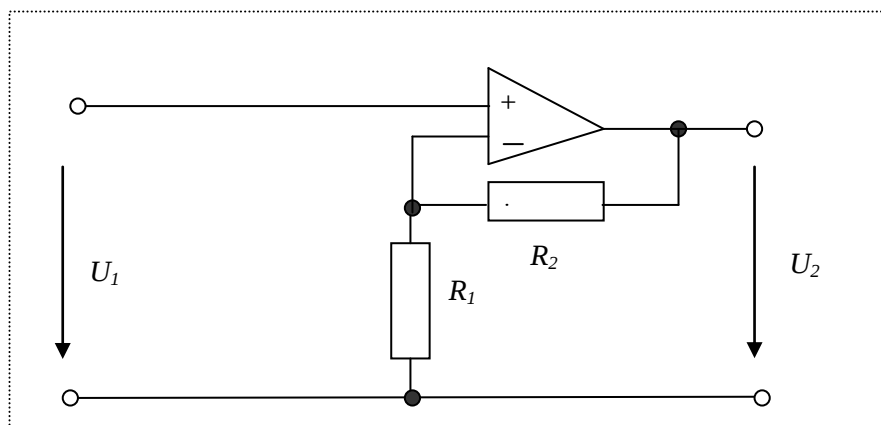
Otázky 3.2

2. Popište metody výpočtu citlivostních koeficientů.
3. Které metody mají menší přesnost?
4. Porovnejte metody z hlediska náročnosti na výpočty, možnost využití počítače, přístrojové vybavení.



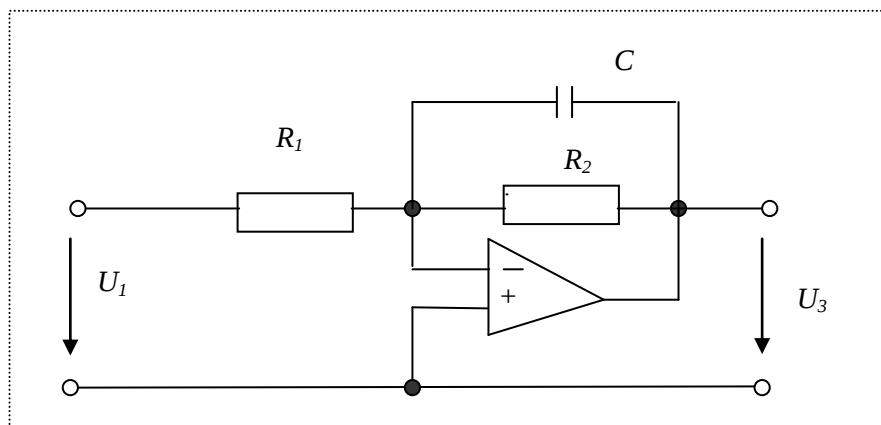
Úlohy 3.2

1. Pro zapojení neinvertujícího zesilovače s ideálním operačním zesilovačem na obrázku 37 vypočítejte relativní citlivostní koeficienty pro napětový přenos $K = U_2/U_1$ metodou dle definice.



Obrázek 37: Neinvertující zesilovač

2. Pro zapojení s ideálním operačním zesilovačem na obrázku 38 vypočítejte relativní citlivostní koeficienty pro napěťový přenos $K=U_2/U_1$ metodou pro podíl dvou mnohočlenů.



Obrázek 38: Zapojení s ideálním operačním zesilovačem

3. Pro zapojení z příkladu 1 vypočítejte relativní citlivostní koeficienty numerickou metodou. Jmenovité hodnoty parametrů jsou $R_{01} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{02} = 20 \text{ k}\Omega$.



Průvodce studiem

Tak teď už umíte vypočítat citlivostní koeficienty i složitějších funkcí. V další kapitole poznáte metody. Které umožní poměrně snadno počítat citlivostní koeficienty ještě složitějších funkcí, které se vyskytují poměrně často při popisu vlastností elektrických obvodů. Poznáte také některé významné vlastnosti citlivostních koeficientů, které je užitečné znát, protože prakticky slouží ke kontrole správnosti výsledků. Před studiem další kapitoly je opět dobré si raději odpočinout.

3.3. Vlastnosti citlivostních koeficientů.



Čas ke studiu: 5 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojem citlivostního invariantu
- popsat vlastnosti relativních citlivostních koeficientů
- vypočítat citlivostní koeficienty dalšími metodami



Výklad

□ Relativní citlivosti složených systémových funkcí.

Při výpočtech založených na koeficientech relativní citlivosti je užitečné znát vlastnosti těchto koeficientů. Zde jsou uvedeny jen ty, které budou využity při řešení příkladů v tomto učebním textu. Podrobnější seznam je v [16].

Pravidlo 1.

Koeficient relativní citlivosti druhé odmocniny systémové funkce je roven polovině koeficientu relativní citlivosti systémové funkce. Pravidlo lze uplatnit například při výpočtech citlivostí rezonančních kmitočtů.

$$S_{x_i}^{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{2y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} S_{x_i}^y \quad (142)$$

Pravidlo 2.

Koeficient relativní citlivosti podílu dvou systémových funkcí je roven rozdílu koeficientů relativních citlivostí těchto systémových funkcí. Pro důkaz využijeme pravidlo o derivování podílu.

$$S_{x_i}^{y_1/y_2} = \frac{x}{\frac{y_1}{y_2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y_1}{y_2} \right) = \frac{xy_2}{y_1} \frac{\partial y_1 \cdot y_2 - \partial y_2 \cdot y_1}{y_2^2 \cdot \partial x} = \frac{x}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} - \frac{x}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x} = S_{x_i}^{y_1} - S_{x_i}^{y_2} \quad (143)$$

Pravidlo 3.

V případě, že systémová funkce je komplexní funkcí, je reálná část koeficientu relativní citlivosti rovna relativní citlivosti modulu systémové funkce a imaginární část koeficientu relativní citlivosti je rovna semirelativní citlivosti argumentu systémové funkce. Pro důkaz píšme systémovou funkci ve tvaru $y = |y| \exp(j \varphi_y)$.

$$S_{x_i}^y = \frac{\partial(\ln y)}{\partial(\ln x_i)} = \frac{\partial(\ln |y| + j\varphi_y)}{\partial(\ln x_i)} = \frac{\partial(\ln |y|)}{\partial(\ln x_i)} + j \frac{\partial\varphi_y}{\partial(\ln x_i)} = S_{x_i}^{|y|} + jQ_{x_i}^{\varphi_y} \quad (144)$$

Pravidlo 4.

V případech kdy systémová funkce je přenosová funkce mezi vstupem a výstupem je často třeba znát citlivost útlumové charakteristiky zejména jejího modulu na změnu parametrů. Útlumovou charakteristiku v případě napěťového přenosu počítáme ze vztahu $A=20 \lg y$. Při odvození vztahu využijeme že pro derivaci dekadického logaritmu platí $(\lg y)' = 1/y \lg e$.

$$S_{x_i}^A = \frac{x_i}{A} \frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{x_i}{20 \lg y} \frac{\partial(20 \lg y)}{\partial x_i} = \frac{x_i 20 \frac{1}{y} \lg e}{20 \lg y} \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\lg e}{\lg y} \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\lg e}{\lg y} S_{x_i}^y \quad (145)$$

Často nás zajímá jen citlivost modulu útlumové charakteristiky. S užitím předchozího pravidla dostaneme

$$S_{x_i}^{|A|} = \frac{\lg e}{\lg |y|} S_{x_i}^{|y|} = \frac{\lg e}{\lg |y|} \operatorname{Re}(S_{x_i}^y) \quad (146)$$

Pravidlo 5.

Relativní citlivostní koeficient inverzní funkce je roven záporně vzatému citlivostnímu koeficientu původní funkce. Pravidlo lze využít například při výpočtu citlivosti admitance když známe citlivost impedance na stejný parametr.

$$S_{x_i}^{\frac{1}{y}} = \frac{x_i}{\frac{1}{y}} \frac{\partial \frac{1}{y}}{\partial x_i} = x_i y \left(\frac{-1}{y^2} \right) \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} = -S_{x_i}^y \quad (147)$$

Pravidlo 6.

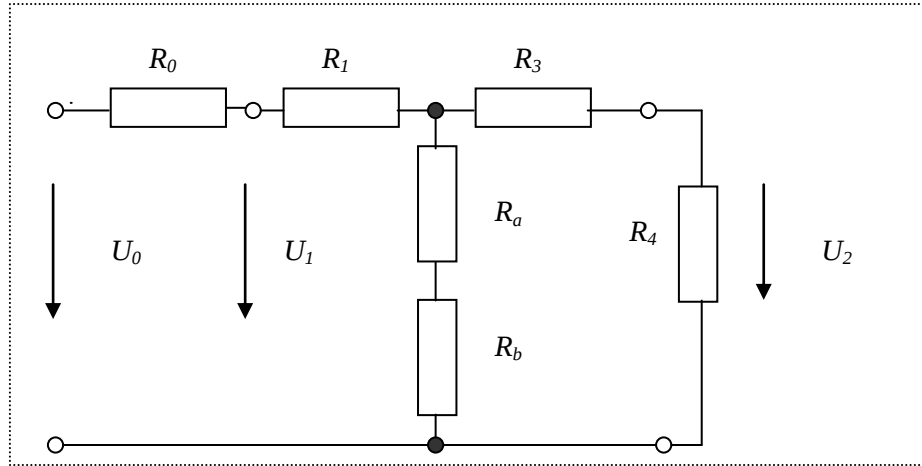
Relativní citlivostní koeficient funkce převrtného parametru je roven záporně vzatému citlivostnímu koeficientu funkce s původním parametrem.

$$S_{x_i}^{\frac{1}{x_i}} = \frac{x_i}{\frac{1}{x_i}} \frac{\partial \frac{1}{x_i}}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i} \frac{\partial y}{\partial x_i} \left(-x_i^2 \right) = -\frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} = -S_{x_i}^y \quad (148)$$

Pravidlo 6 lze využít při výpočtu citlivostí když systémová funkce bývá vyjádřena v parametrech které jsou inverzní k parametrům ve kterých má být vyjádřena citlivost. To se stává u napěťových přenosů získaných metodou uzlových napětí, že je počítáno s vodivostmi a citlivost má být vyjádřena pomocí odporů.

Příklad 3.8.

Vypočítejte toleranci pro útlum A a charakteristickou impedanci Z_c útlumového dvojbranu na obrázku 39 tvořeného odpory R_1, R_a, R_b, R_3 . Jmenovité hodnoty odporů jsou $R_1 = 13 \Omega$, $R_a = 200 \Omega$, $R_b = 12 \Omega$, $R_3 = 13 \Omega$. Jmenovitá hodnota útlumu $A = -3 \text{ dB}$, jmenovitá hodnota charakteristické impedance $Z_c = 75 \Omega$. Výrobní tolerance odporů jsou 10 %.



Obrázek 39: Útlumový dvojbran



Pro výpočet útlumu A je základní dvojbran doplněn odpory R_0 , to je vnitřní odpor zdroje napětí U_0 , a R_4 , to je zatěžovací odpor. Oba odpory mají hodnotu 75Ω . Útlum počítáme ze vztahu $A = 20 \lg(U_2/U_1)$. Pro napěťový přenos $K = U_2/U_1$ lze odvodit vztah

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_a R_4 + R_b R_4}{R_1 R_4 + R_1 R_3 + R_1 R_a + R_1 R_b + R_a R_3 + R_b R_3 + R_a R_4 + R_b R_4} = \frac{P}{Q} \quad (149)$$

Vypočítáme relativní citlivostní koeficienty, nejsnáze podle vztahu pro podíl dvou mnohočlenů. Protože je potřeba počítat citlivost útlumu, tak využijeme také pravidlo 4. Pro jmenovitou hodnotu napěťového přenosu máme hodnotu $|K| = 0,707$. Pak pro citlivostní koeficienty dostaneme

$$S_{R_1}^A = \frac{\lg e}{\lg |K|} R_1 \left(0 - \frac{R_4 + R_3 + R_a + R_b}{Q} \right) = 0,496$$

$$S_{R_a}^A = \frac{\lg e}{\lg |K|} R_a \left(\frac{R_4}{P} - \frac{R_1 + R_3 + R_4}{Q} \right) = -0,138$$

$$S_{R_b}^A = \frac{\lg e}{\lg |K|} R_b \left(\frac{R_4}{P} - \frac{R_1 + R_3 + R_4}{Q} \right) = -8,27 \cdot 10^{-3}$$

$$S_{R_3}^A = \frac{\lg e}{\lg |K|} R_3 \left(0 - \frac{R_1 + R_a + R_b}{Q} \right) = 0,372 \quad . \quad (150)$$

Nejpravděpodobnější tolerance útlumu při výrobní toleranci odporů 10 % bude

$$\delta_A = \sqrt{(0,496 \cdot 10)^2 + (-0,138 \cdot 10)^2 + (-8,27 \cdot 10^{-3} \cdot 10)^2 + (0,372 \cdot 10)^2} = 6,35 \% \quad . \quad (151)$$

Charakteristická impedance Z_c má stejnou hodnotu pro vstupní i výstupní bránu v daném případě. Dvojbran je impedančně souměrný a pro výpočet tolerance stačí počítat jen jednu například vstupní charakteristickou impedanci. Na obrázku nebudeme pro výpočet uvažovat odpory R_0 a R_4 . Impedanci Z_c počítáme ze vztahu $Z_c = (Z_{10} Z_{1k})^{1/2}$, kde Z_{10} je vstupní impedance při otevřeném výstupu, Z_{1k} je vstupní impedance při zkratovaném výstupu. Pro Z_c dostaneme tedy

$$Z_c = \sqrt{(R_1 + R_a + R_b) \left(R_1 + \frac{R_3(R_a + R_b)}{R_3 + R_a + R_b} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(R_1 + R_a + R_b)[R_1(R_3 + R_a + R_b) + R_3(R_a + R_b)]}{R_3 + R_a + R_b}} = \sqrt{\frac{P}{Q}} \quad . \quad (152)$$

Pro výpočet relativních citlivostí využijeme vztahu pro podíl dvou mnohočlenů a pravidla 1. Dostaneme

$$S_{R_1}^{Z_c} = \frac{1}{2} R_1 \left(\frac{2R_1 R_3 + 2R_1 R_a + 2R_1 R_b + R_a^2 + R_b^2 + 2R_a R_b + 2R_3 R_a + 2R_3 R_b}{P} \right) = 0,286$$

$$S_{R_a}^{Z_c} = \frac{1}{2} R_a \left(\frac{R_1^2 + 2R_a R_1 + 2R_a R_3 + 2R_1 R_b + 2R_1 R_3 + 2R_3 R_b}{P} - \frac{1}{Q} \right) = 0,457$$

$$S_{R_b}^{Z_c} = \frac{1}{2} R_b \left(\frac{R_1^2 + 2R_b R_1 + 2R_a R_1 + 2R_1 R_3 + 2R_a R_3}{P} - \frac{1}{Q} \right) = 2,59 \cdot 10^{-2}$$

$$S_{R_3}^{Z_c} = \frac{1}{2} R_3 \left(\frac{R_1^2 + R_a^2 + R_b^2 + 2R_1R_a + 2R_1R_b + 2R_aR_b}{P} - \frac{1}{Q} \right) = 0,228 \quad (153)$$

Vypočítáme toleranci charakteristické impedance Z_c pro výrobní tolerance hodnot odporů 10 %. Bude

$$\delta_{Z_c} = \sqrt{(0,286 \cdot 10)^2 + (0,457 \cdot 10)^2 + (2,59 \cdot 10^{-2} \cdot 10)^2 + (0,228 \cdot 10)^2} = 5,85 \% \quad (154)$$

Z výsledků je vidět, že obvod je pro dodržení útlumu poněkud citlivější na výrobní tolerance odporů než pro dodržení charakteristické impedance.

Poznámka. Pokud vypočítáme i relativní citlivost útlumu A na parametr R_4 dostaneme

$$S_{R_4}^A = \frac{\lg e}{\lg |K|} \left(1 - \frac{R_1 + R_a + R_b}{Q} \right) = -0,726 \quad (155)$$

Je to největší hodnota citlivosti z uvedených. Pokud bychom předpokládali také i zde 10 procentní toleranci, tak pak vyjde celková tolerance $\delta_A = 9,65 \%$. zakončovací odpory mají tedy velký vliv na hodnotu útlumu. Zakončovací odpory jsou ale prakticky součástí zařízení mezi kterými je používán útlumový dvojbran a tedy výrobce útlumových dvojbranů nemá možnost ovlivnit zakončovací odpory..

□ Citlivostní invarianty.

Invariant (lat. neměnný) je vztah, který se nemění při určité transformaci. Citlivostní invariant je hodnota, která při provedení určitých matematických operací s citlivostními koeficienty zůstává stálá a nezávisí na změnách hodnot vstupních parametrů. Citlivostní invarianty objevili a publikovali v roce 1968 E.S. Kuh a C.G. Lau jak je uvedeno v [17], kde také uveden přehled mnoha různých případů citlivostních invariantů. Zde si uvedeme jen některé nejdůležitější případy. Především je třeba říci, že hodnota citlivostního invariantu je určena typem systémové funkce a způsobem vyjádření vstupních parametrů.

Citlivostní invariant pro impedanci. Předpokládejme, že máme vyjádřenu systémovou funkci v obvodu jako impedanci (vstupní výstupní apod.) Tato funkce je jistě nějakou funkcí odporů a reaktancí vyskytujících se v obvodu a tyto závisí na parametrech R, L, C . Zvětší-li se v obvodu α krát všechny odpory a reaktance, pak se zvětší α krát i impedance. Impedance obvodu je pak funkcí α kterou lze považovat za vstupní parametr. Impedance je pak tedy složená funkce, která závisí na R, L, C a ty závisí na α . Pro α krát zvětšenou impedanci lze psát totální diferenciál ve tvaru

$$\frac{d(\alpha Z)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\alpha R_i)} \frac{\partial(\alpha R_i)}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\alpha L_i)} \frac{\partial(\alpha L_i)}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\frac{\alpha}{C_i})} \frac{\partial(\frac{\alpha}{C_i})}{\partial \alpha} \quad , \quad (156)$$

kde k, l, m jsou počty odporů, indukčností a kapacit v obvodu. Po provedení derivací dostaneme rovnici

$$Z = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\alpha R_i)} R_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\alpha L_i)} L_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\frac{\alpha}{C_i})} \frac{1}{C_i} \quad . \quad (157)$$

Tuto rovnici vydělíme impedancí Z s původními hodnotami prvků. Dostaneme

$$1 = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\alpha R_i)} \frac{R_i}{Z} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\alpha L_i)} \frac{L_i}{Z} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\alpha Z)}{\partial(\frac{\alpha}{C_i})} \frac{1}{Z C_i} \quad . \quad (158)$$

Výrazy za sumami jsou ale relativní citlivostní koeficienty parametrů R, L, C^{-1} . Lze tedy psát, že platí

$$1 = \sum_{i=1}^k S_{R_i}^Z + \sum_{i=1}^l S_{L_i}^Z + \sum_{i=1}^m S_{\frac{1}{C_i}}^Z \quad . \quad (159)$$

Tato rovnice je citlivostní invariant obvodu pro relativní citlivosti impedance pro parametry R, L, C^{-1} . Z této rovnice užitím pravidla 6 lze psát, že platí také

$$1 = \sum_{i=1}^k S_{R_i}^Z + \sum_{i=1}^l S_{L_i}^Z - \sum_{i=1}^m S_{C_i}^Z \quad . \quad (160)$$

Invariant pro relativní citlivost admitance lze odvodit užitím pravidla 5

$$-1 = \sum_{i=1}^k S_{R_i}^Y + \sum_{i=1}^l S_{L_i}^Y + \sum_{i=1}^m S_{\frac{1}{C_i}}^Y \quad . \quad (161)$$

Případně užitím pravidla 6 lze tento vztah modifikovat na

$$1 = \sum_{i=1}^k S_{\frac{1}{R_i}}^Y + \sum_{i=1}^l S_{\frac{1}{L_i}}^Y + \sum_{i=1}^m S_{C_i}^Y \quad . \quad (162)$$

Citlivostní invariant pro přenosy. Přenos či přenosová funkce je vyjádřena jako poměr napětí nebo poměr proudů ve dvou libovolných větvích obvodu. Nejčastěji nás zajímá zpravidla poměr výstupních a vstupních veličin. Přenos je vyjádřen jako funkce odporů a reaktancí obvodu. Zvětší-li se všechny odpory a reaktance α krát, velikost přenosu se nezmění. Pro názornost si můžeme představit třeba napěťový dělič složený ze dvou odporů. Napěťový přenos zůstane stejný když oba odpory zvětšíme α

krát. Pro odvození invariantu použijeme stejný postup jako v předchozím případě. Máme tedy přenos K jako nějakou funkci všech obvodových odporů a reaktancí, které jsme zvětšili α krát. Jde tedy opět o složenou funkci protože ty odpory a reaktance závisí na R, L, C a ty závisí na α . Výraz pro totální diferenciál přenosu K bude tedy

$$\frac{dK}{d\alpha} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial K}{\partial(\alpha R_i)} \frac{\partial(\alpha R_i)}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial K}{\partial(\alpha L_i)} \frac{\partial(\alpha L_i)}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial K}{\partial(\frac{\alpha}{C_i})} \frac{\partial(\frac{\alpha}{C_i})}{\partial \alpha} . \quad (163)$$

Po provedení derivací dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^k \frac{\partial K}{\partial(\alpha R_i)} R_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial K}{\partial(\alpha L_i)} L_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial K}{\partial(\frac{\alpha}{C_i})} \frac{1}{C_i} . \quad (164)$$

Přenos K nezávisí na α , pro je derivace nulová. Získanou rovnici vydělíme přenosem původního obvodu K . Dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^k \frac{\partial K}{\partial(\alpha R_i)} \frac{R_i}{K} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial K}{\partial(\alpha L_i)} \frac{L_i}{K} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial K}{\partial(\frac{\alpha}{C_i})} \frac{1}{KC_i} . \quad (165)$$

Výrazy za sumami jsou ale relativní citlivostní koeficienty přenosu K pro parametry R, L, C^{-1} . Lze tedy psát, že platí

$$0 = \sum_{i=1}^k S_{R_i}^K + \sum_{i=1}^l S_{L_i}^K + \sum_{i=1}^m S_{\frac{1}{C_i}}^K . \quad (166)$$

Tato rovnice je citlivostní invariant pro přenos K pro parametry R, L, C^{-1} . Pomocí pravidla 5 lze tuto rovnici upravit na

$$0 = \sum_{i=1}^k S_{R_i}^K + \sum_{i=1}^l S_{L_i}^K - \sum_{i=1}^m S_{C_i}^K . \quad (167)$$

Citlivostní invarianty lze využít ke kontrole správnosti při výpočtech.

Příklad 3.9.

Zkontrolujte správnost vypočtených citlivostních koeficientů pro napěťový přenos a vstupní impedanci v příkladu 3.5.



V uvedeném příkladu byly vypočítány relativní citlivostní koeficienty pro napěťový přenos K . Podle pravidla pro invariant přenosu platí

$$S_R^K - S_C^K = -\frac{pCR}{1+pCR} - \left(-\frac{pCR}{1+pCR} \right) = 0 . \quad (168)$$

Pro relativní citlivostní koeficienty pro vstupní impedanci Z platí dle uvedeného pravidla pro citlivostní invariant

$$S_R^Z - S_C^Z = \frac{pCR}{1 + pCR} - \left(\frac{1}{1 + pCR} \right) = 1 \quad . \quad (169)$$

□ Závislosti citlivostních koeficientů.

Relativní citlivostní koeficienty jsou obecně komplexní funkce. Mohou nabývat různých hodnot v závislosti na kmitočtu nebo vstupních parametrech. Může se tedy stát, že tyto závislosti vykazují maxima, minima, nulové hodnoty, případně konstantní hodnotu. V případě maxima to znamená, že daný vstupní parametr může značně ovlivnit výstupní veličinu za daných podmínek. V případě minima nebo nulové hodnoty to znamená, že daný parametr může mít jen malý nebo žádný vliv za daných podmínek. V případě že citlivostní koeficient je konstanta to znamená, že výstupní veličina za daných podmínek nezávisí na uvažovaných vstupních parametrech.

Příklad 3.10.

Vypočítejte koeficient relativní citlivosti admitance pro parametr odporu R sériového rezonančního obvodu R , L , C . Nakreslete graf kmitočtové závislosti reálné a imaginární části tohoto koeficientu. Pro srovnání vypočítejte také absolutní hodnotu komplexní admitance a její fázový úhel a zakreslete jejich kmitočtové závislosti



Vypočítáme nejprve impedanci obvodu a admitanci určíme jako převrtnou hodnotu

$$Z = R + pL + \frac{1}{pC} = \frac{p^2LC + pRC + 1}{pC} \quad \rightarrow \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{pC}{p^2LC + pRC + 1} = \frac{P}{Q} \quad . \quad (170)$$

Relativní koeficient citlivosti admitance na parametr R určíme jako

$$S_R^Y = R \left(0 - \frac{pC}{p^2LC + pRC + 1} \right) = - \frac{pRC}{p^2LC + pRC + 1} \quad . \quad (171)$$

Pro určení reálné a imaginární části dosadíme za $p = j\omega$ a dostaneme

$$S_R^Y = -\frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{-j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \cdot \frac{1 - \omega^2 - j\omega RC}{1 - \omega^2 LC - j\omega RC} =$$

$$= \frac{-(\omega RC)^2 - j(\omega C - \omega^3 LC^2)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} \quad . \quad (172)$$

Pro výpočet absolutní hodnoty komplexní admitance a fázového úhlu vypočteme nejprve (dosazením za $p = j\omega$)

(173)

$$Y = \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \cdot \frac{1 - \omega^2 LC - j\omega RC}{1 - \omega^2 LC - j\omega RC} = \frac{\omega^2 RC^2 + j(\omega C - \omega^3 LC^2)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} \quad .$$

Z toho pak vypočteme absolutní hodnotu komplexní admitance

$$|Y| = \sqrt{(\operatorname{Re} Y)^2 + (\operatorname{Im} Y)^2} = \frac{\sqrt{(\omega^2 RC^2)^2 + (\omega C - \omega^3 LC^2)^2}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} \quad , \quad (174)$$

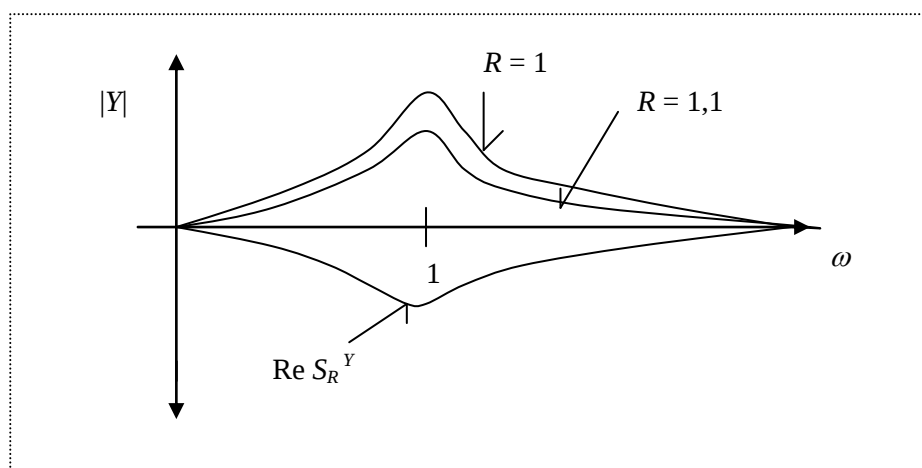
a fázi komplexní admitance

$$\varphi_Y = \arctan \frac{\operatorname{Im} Y}{\operatorname{Re} Y} = \frac{\omega C - \omega^3 LC^2}{\omega^2 RC^2} \quad . \quad (175)$$

Aby sériový R, L, C obvod kmital musí platit

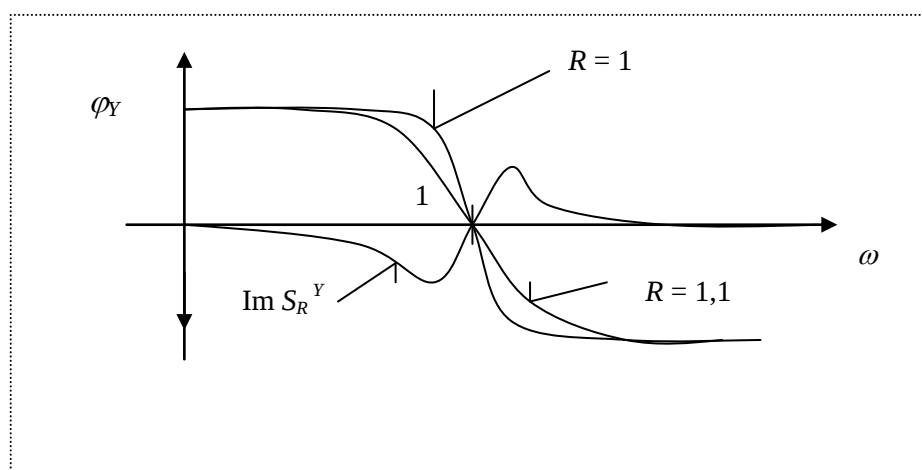
$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \quad (176)$$

Vzhledem k této podmínce lze pro grafické zobrazení volit například $R = 1$ nebo $R = 1,1$ a $L = C = 1$. Pak je rezonanční kmitočet $\omega = 1$. Orientační závislosti na obr 40.



Obrázek 40: Kmitočtové závislosti modulu admitance a reálné části relativní citlivosti

Při rezonančním kmitočtu má $|\text{Re } S_R^Y|$ maximum a tedy je zde $|Y|$ nejvíce ovlivňována změnou R . Na obrázku 41 jsou kmitočtové závislosti fáze a imaginární části relativní citlivosti.

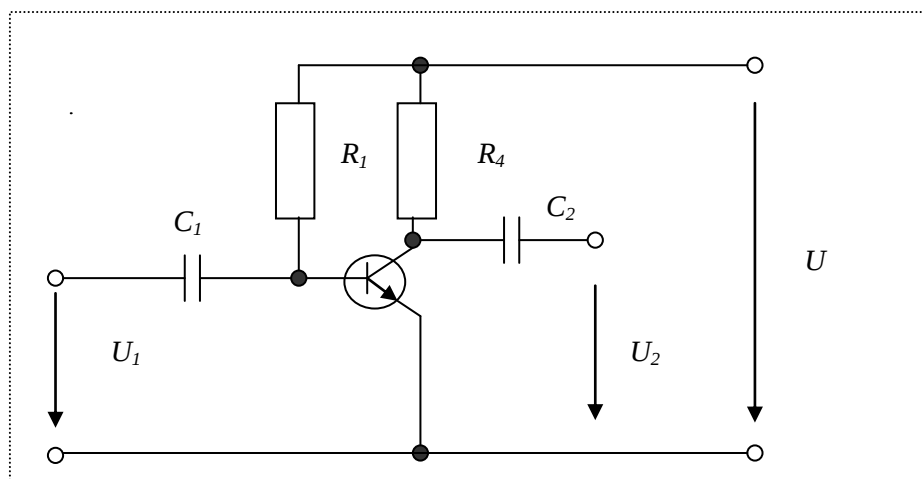


Obrázek 41: Kmitočtové závislosti fáze a imaginární části relativní citlivosti

Při rezonančním kmitočtu je $\text{Im } S_R^Y = 0$ a tedy zde není φ_Y ovlivňována různými hodnotami R . Při rezonanci má φ_Y vždy nulovou hodnotu.

Příklad 3.11.

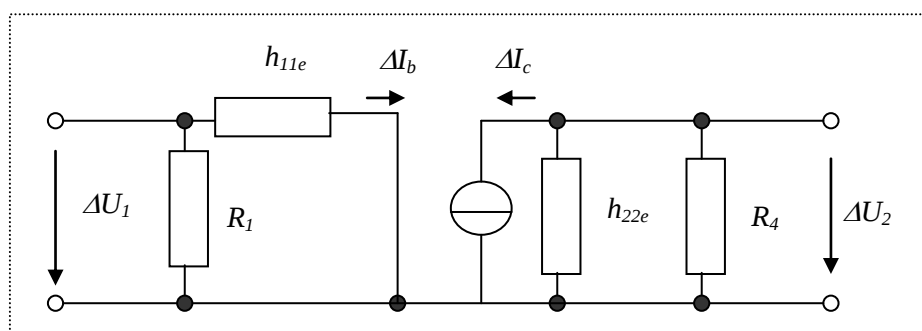
Vypočítejte relativní citlivostní koeficienty napěťového zesílení K střídavého signálu na parametry obvodu tranzistorového zesilovače na obrázku 42. Uvažuje se střední kmitočtové pásmo.



Obrázek 42: Tranzistorový zesilovač



Pro střídavý signál nahradíme napájecí zdroj U zkratem a na vstupu působí pouze zdroj střídavého napětí U_1 . Pro střední kmitočtové pásmo nahrazujeme vazební kapacity C_1 a C_2 zkraty. Uvažujeme model tranzistoru pro změny veličin s h parametry. V náhradním obvodu na obrázku 43 jsou označeny střídavé obvodové veličiny jako změny, protože jde o změny v čase.



Obrázek 43: Náhradní obvod zesilovače

V obvodu platí vztah $\Delta I_c = h_{21e} \Delta I_b$. Pro napětí ΔU_2 pak lze odvodit

$$\Delta U_2 = -\Delta I_c \frac{\frac{1}{h_{22e}} R_4}{\frac{1}{h_{22e}} + R_4} = -\Delta I_b \cdot h_{21e} \frac{R_4}{1 + R_4 h_{22e}} = -\frac{\Delta U_1}{h_{11e}} h_{21e} \frac{R_4}{1 + R_4 h_{22e}} \quad (177)$$

Napětíové zesílení bude

$$K = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} = \frac{-R_4 h_{21e}}{h_{11e} + R_4 h_{22e} h_{11e}} = \frac{P}{Q} \quad (178)$$

Vypočítáme relativní citlivostní koeficienty dle vztahu pro podíl dvou mnohočlenů a dostaneme

$$S_{R_4}^K = R_4 \left(\frac{-h_{21e}}{-R_4 h_{21e}} - \frac{h_{22e} h_{11e}}{h_{21e} + R_4 h_{22e} h_{11e}} \right) = \frac{1}{1 + R_4 h_{22e}}$$

$$S_{h_{22e}}^K = h_{22e} \left(0 - \frac{R_4 h_{11e}}{h_{11e} + R_4 h_{22e} h_{11e}} \right) = -\frac{R_4 h_{22e}}{1 + R_4 h_{22e}} \quad (179)$$

$$S_{h_{21e}}^K = h_{21e} \left(\frac{-R_4}{-R_4 h_{21e}} - 0 \right) = 1$$

$$S_{h_{11e}}^K = h_{11e} \left(0 - \frac{1 + R_4 h_{22e}}{h_{11e} + R_4 h_{22e} h_{11e}} \right) = -1 \quad (180)$$

V tomto zapojení citlivostní koeficienty $S_{h_{21e}}^K$, $S_{h_{11e}}^K$ mají konstantní hodnoty, které nezávisí na uvažovaných vstupních parametrech.

□ Počítačový program SNAP.

Dosud to bylo jen samé ruční počítání. Následuje dobrá zpráva. Pro usnadnění práce některé počítačové programy pro analýzu elektrických obvodů jsou schopné počítat citlivostní koeficienty. Autoři Dalibor Biolek a Zdeněk Kolka z Vojenské akademie Brno vytvořili pro školní potřebu

počítačový program SNAP [18]. Na adrese <http://snap.webpark.cz/?X> je program SNAP pro analýzu obvodů, který je možno zdarma nainstalovat. Prostudujte si návod a obsluhu programu. Součástí programu je také množství ukázkových příkladů. Seznamte se s obsluhou tohoto programu, protože v kapitole 5 tohoto textu jsou příklady, které využívají tento program. Program počítá výsledky analýzy také v algebraickém tvaru, protože je určen právě pro školní potřeby. Je založen na teorii lineárních obvodů. A počítá také absolutní a relativní citlivostní koeficienty v analytickém tvaru a zobrazuje jejich kmitočtové závislosti. Programu lze využít pro kontrolu správnosti výsledků při výpočtech, pro jejich lepší názornost, a pro analýzu složitějších obvodů, kde už je ruční výpočet velmi problematický. I když má zmiňovaná verze omezení na určitou složitost obvodu, je uživateli užitečný. Citlivostní koeficienty počítají i jiné počítačové programy například SPICE. Ten počítá citlivosti numerickou metodou tzv. perturbací metodou, což je v podstatě metoda použitá v příkladu 3.7. SPICE je schopen počítat citlivosti stejnosměrné v klidovém pracovním bodě a citlivosti pro střídavý signál.



Shrnutí pojmů 3.3

Citlivostní invariant je číselná hodnota, za daných podmínek neměnná, jisté matematické operace provedené s citlivostními koeficienty, Hodnota invariantu závisí na typu obvodové funkce, a způsobu vyjádření vstupních parametrů, nezávisí na číselných velikostech vstupních parametrů.



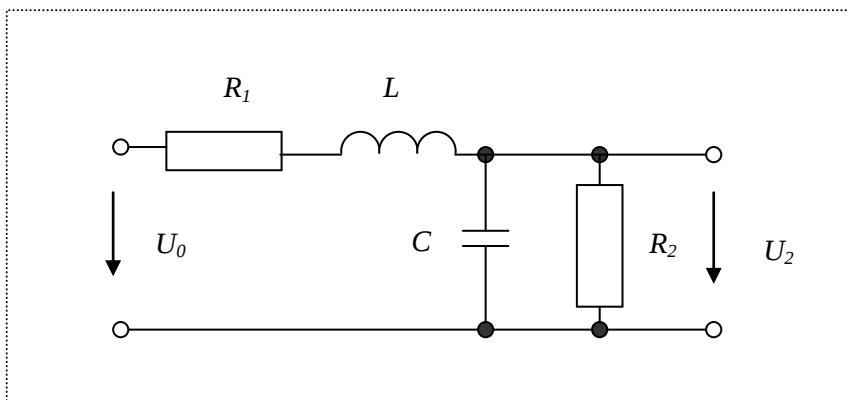
Otázky 3.3

1. Co je to citlivostní invariant?
2. Na čem závisí hodnota citlivostního invariantu?
3. Co vyjadřuje reálná a co imaginární část relativního citlivostního koeficientu?



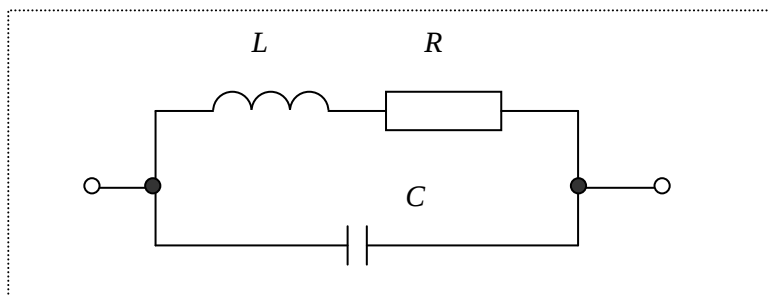
Úlohy 3.3

1. Pro zapojení filtru dolní propusti vypočítejte toleranci modulu napět'ového přenosu $K = U_2/U_0$ dle obrázku 44 pro zlomový kmitočet a tolerance vstupních parametrů $\delta_x = 10\%$. Při výpočtu použijte pro usnadnění numerických výpočtů takzvané normované hodnoty prvků pro Butterworthovu charakteristiku 2 řádu tj. $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$, $L = (2)^{1/2}\ \text{H}$, $C = (2)^{1/2}$ a zlomový kmitočet je $\omega_c = 1\ \text{rad/s}$.



Obrázek 44: Dolní propust

2. Pokuste se zobrazit kmitočtové závislosti přenosu K a relativních citlivostních koeficientů z příkladu 1 pomocí programu SNAP. Pomocí kurzorů zjistěte hodnoty reálných a imaginárních částí citlivostních koeficientů a zkontrolujte je s vypočtenými.
3. Podle výsledků z příkladu 3.11 vypočítejte relativní citlivosti a toleranci napět'ového přenosu pro $R_1 = 330\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 1,2\ \text{k}\Omega$ s tolerancemi 5 %, a $h_{11e} = 1\ 200\ \Omega$, $h_{21e} = 150$, $h_{22e} = 10^{-4}\ \text{S}$ s tolerancemi 20 %. Zapojení je ve třídě A s napájením $U = 10\ \text{V}$.
4. Obvod RC má časovou konstantu $\tau = RC$. Určete výrobní tolerance odporu a kapacity tak, aby tolerance časové konstanty nebyla větší než 12 %.
5. Pro paralelní rezonanční obvod na obrázku 45 vypočtete relativní citlivosti pro rezonanční kmitočet ω_r , činitel jakosti Q a impedanci v rezonanci Z_r na vstupní parametry $R = 60\ \Omega$, $L = 0,1\ \text{H}$, $C = 100\ \text{nF}$. Která výstupní veličina je ovlivněna změnou parametrů nejvíce a která nejméně?



Obrázek 45: Paralelní rezonanční obvod



Průvodce studiem

Tak touto kapitolou skončila v tomto učebním textu velká matematika. V následující kapitole stačí získat jen přehled o jednotlivých technikách a o podstatě numerického přístupu k dané problematice. Je zde zdánlivě méně matematiky, jsou zde popsány jen základní principy a algoritmy. Skutečné výpočty jsou součástí spíše firemních počítačových programů, dosti náročných na strojový čas. Zde získané informace by Vám měly spíš jen usnadnit Vaše první kroky při poznávání skutečného programového vybavení tohoto druhu pokud se k němu dostanete ve Vašem zaměstnání.

4. NUMERICKÉ METODY VÝPOČTU TOLERANCÍ

4.1. Přehled užívaných technik.



Čas ke studiu: 4 hodiny



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní pojmy
- popsat používané metody
- vyřešit návrh tolerancí v jednoduchých obvodech



Výklad

□ Důvody používání numerických metod.

V kapitole 3 jste se seznámili s analytickou metodou určování tolerancí hodnot součástek v obvodu. Obtížnost výpočtů při této metodě roste s počtem vstupních parametrů. Prakticky se ukazuje že metoda je použitelná pro obvody nepřesahující zhruba 5 vstupních parametrů. Pak jsou systémové funkce složité a výpočty pracné a nepřehledné. Metoda předpokládá, že odchylky od jmenovitých hodnot se řídí Gaussovým rozdělením. Tento předpoklad v praxi nemusí být vždy splněn dle [19]. Četnost výskytu skutečných hodnot součástek závisí na seřízení automatizovaných výrobních linek. Numerické metody umožňují určovat výtěžnost tj. podíl vyhovujících obvodů z celkového množství všech vyrobených obvodů, nebo ji ovlivňovat a tedy ovlivňovat i cenu vyrobených zařízení.

S nástupem výkonných počítačů, které umožňují provádět velké množství numerických výpočtů nabývají praktického významu právě numerické metody určování potřebných tolerancí a odhadu výtěžnosti. Nevýhodou je, že neexistuje obecná teorie a metodika pro návrh, jako v případě analytických metod založených na citlivostech, a pro numerické metody je potřeba výkonného počítače se specializovaným programovým vybavením. Základní principy a myšlenky numerických metod lze při „ručních“ výpočtech demonstrovat jen na velmi jednoduchých obvodech. Numerické metody jsou využívány firmami při návrhu složitých integrovaných obvodů. Podrobně je o numerických metodách pojednáno například v [19].

□ Základní pojmy.

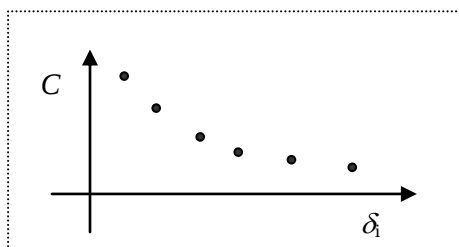
Výtěžnost Y je podíl počtu analyzovaných obvodů m , které vyhovují požadavkům a celkového počtu analyzovaných obvodů M . Udává se zpravidla v procentech

$$Y = \frac{m}{M} 100 \quad . \quad (181)$$

Cenová funkce Závislost ceny součástek je nepřímo úměrná jejich tolerancím. Pro posouzení návrhu obvodu se užívá cenová funkce ve tvaru

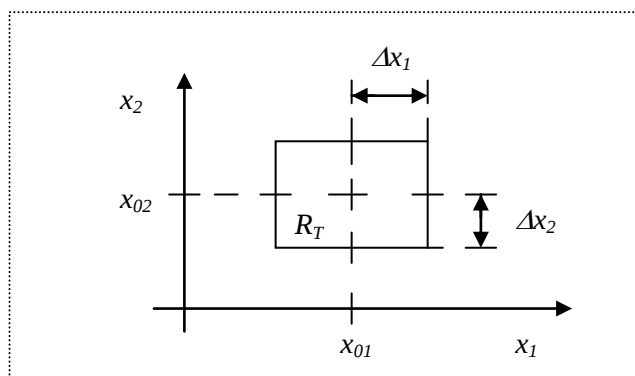
$$C = \frac{1}{Y} \left(b + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\delta_i} \right), \quad (182)$$

kde Y je výtěžnost (ne v procentech, jen jako poměrná hodnota), n je počet vstupních parametrů, δ_i je tolerance i tého parametru (ne v procentech, jen jako poměrná hodnota), a_i a b jsou empirické konstanty pro daný obvod. C je cena připadající na jednu vyhovující obvodovou realizaci. Cílem návrhu je aby C bylo co nejmenší za daných podmínek. Příklad závislosti cenové funkce je na obrázku 46 kde je závislost cenové funkce na toleranci. Čím je větší tolerance součástek, tím je obvod levnější.



Obrázek 46: Příklad cenové funkce

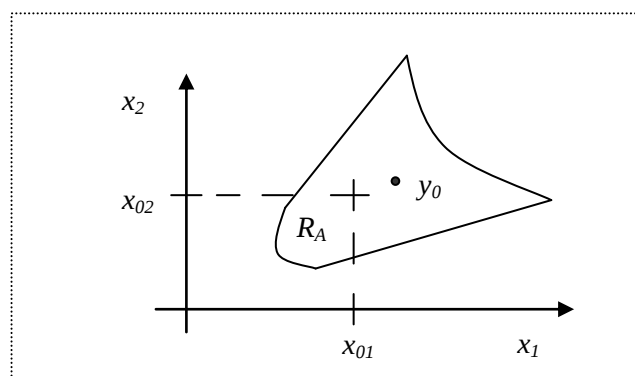
Prostor tolerancí Je to okolí jmenovité hodnoty vstupního parametru, které je ohraničeno tolerancemi vstupního parametru. Prostor tolerancí lze považovat také za n rozměrný geometrický útvar v okolí bodu odpovídajícího vstupním parametrům v n rozměrném prostoru, kde n je počet vstupních parametrů. Graficky lze geometrickou představu znázornit pouze pro n nejvýš 3. Pro $n=1$ je to úsečka, pro $n=2$ obdélník, pro $n=3$ kvádr. Na obrázku 47 je znázorněn příklad prostoru tolerancí R_T pro obvod se dvěma vstupními parametry.



Obrázek 47: Příklad prostoru tolerancí

Prostor přijatelnosti Je to okolí jmenovité hodnoty výstupní veličiny, které je ohraničeno předepsanými tolerancemi výstupní veličiny. Prostor přijatelnosti lze považovat za n rozměrný geometrický útvar v okolí bodu odpovídajícího jmenovité hodnotě výstupní veličiny v n rozměrném prostoru, kde n je počet vstupních parametrů. Na rozdíl od prostoru tolerancí je z geometrického hlediska prostor přijatelnosti složitějším geometrickým útvarem (nejsou to jen úsečky, obdélníky, kvádry – do $n=3$), protože prostor přijatelnosti popisuje systémovou funkci. Prostor přijatelnosti nemusí být ani jediný souvislý prostor (konvexní či konkávní), může se skládat z několika vzájemně

oddělených prostorů, nebo obsahovat uvnitř zakázaný prostor, protože tvar prostoru přijatelnosti závisí na požadavcích zadání úlohy. Prostor přijatelnosti označujeme R_A . Na obrázku 48 příklad oblastí přijatelnosti pro systémovou funkci a dané podmínky zadání pro případ dvou vstupních parametrů.



Obrázek 48: Příklad prostoru přijatelnosti

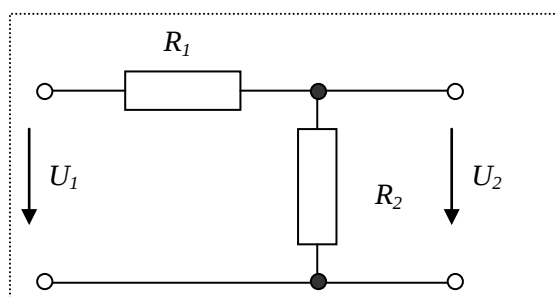
Poznámka: V případě n rozměrného prostoru můžeme o tvaru oblasti přijatelnosti R_A usoudit také podle souboru dvourozměrných řezů, na které rozdělíme n rozměrnou oblast. Výhodou tohoto postupu je možnost znázornění v rovině papíru, nevýhodou že počet dvourozměrných řezů narůstá s n . Například pro $n = 3$ máme celkem 3 dvourozměrné grafy. Pro $n = 4$ to bude již 6 grafů. Obecně počet grafů bude dán počtem kombinací dvou prvků z n tedy

$$\binom{n}{2}. \quad (183)$$

Praktické výpočty ukazují, že oblasti přijatelnosti bývají často nekonvexní a pro kmitočtové filtry mívají „banánový“ tvar. V integrovaných obvodech jsou hodnoty parametrů p_i korelovány.

Příklad 4.1.

Určete prostor přijatelnosti R_A pro napěťový dělič na obrázku 49. Výstupními veličinami je napětí U_2 a proud protékající děličem I . Mají být splněny podmínky, že $U_{2\min} < U_2 < U_{2\max}$ a že $I_{\min} < I < I_{\max}$. Jsou zadány jmenovité hodnoty U_{02} a I_0 .



Obrázek 49: Odporový dělič napětí



Pro napětí U_2 a proud I platí rovnice

$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad I = \frac{U_1}{R_1 + R_2} \quad . \quad (184)$$

To jsou dvě systémové funkce. Abychom určili prostor R_A , je třeba přepsat tyto rovnice do vhodného tvaru a to tak, aby vstupní parametr R_2 byl vyjádřen jako funkce vstupního parametru R_1 . Současně zahrneme i podmínky, které mají být splněny. Pro napětí bude tedy

$$U_{2\min} \leq \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow U_{2\min} R_1 + U_{2\min} R_2 \leq U_1 R_2 \rightarrow R_2 \geq R_1 \frac{U_{2\min}}{U_1 - U_{2\min}} \quad . \quad (185)$$

To je nerovnice jejíž hraniční přímka je označena na obrázku 50 jako a.

$$U_{2\max} \geq \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow U_{2\max} R_1 + U_{2\max} R_2 \geq U_1 R_2 \rightarrow R_2 \leq R_1 \frac{U_{2\max}}{U_1 - U_{2\max}} \quad . \quad (186)$$

Hraniční přímka této nerovnice je označena na obrázku 50 jako b. Pro proud dostaneme nerovnice

$$I_{\min} \leq \frac{U_1}{R_1 + R_2} \rightarrow I_{\min} R_1 + I_{\min} R_2 \leq U_1 \rightarrow R_2 \leq \frac{U_1}{I_{\min}} - R_1 \quad . \quad (187)$$

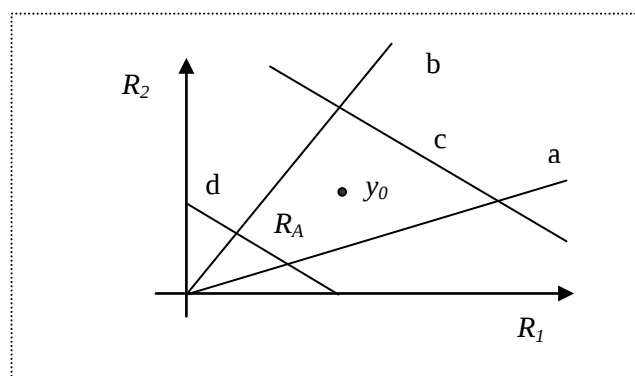
Hraniční přímka této nerovnice je označena na obrázku 50 jako c.

$$I_{\max} \geq \frac{U_1}{R_1 + R_2} \rightarrow I_{\max} R_1 + I_{\max} R_2 \geq U_1 \rightarrow R_2 \geq \frac{U_1}{I_{\max}} - R_1 \quad . \quad (188)$$

hraniční přímka této nerovnice je označena na obrázku 50 jako d. Všechny 4 nerovnice vymezují na obrázku 50 vnitřek čtyřúhelníku, tam jsou splněny všechny 4 nerovnice současně a to je v tomto případě prostor R_A . Pro jmenovitou hodnotu systémové funkce y_0 dostaneme

$$U_{02} = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow R_2 = R_1 \frac{U_{02}}{U_1 - U_{02}} \quad . \quad (189)$$

Na obrázku 50 této rovnici odpovídá bod y_0 .



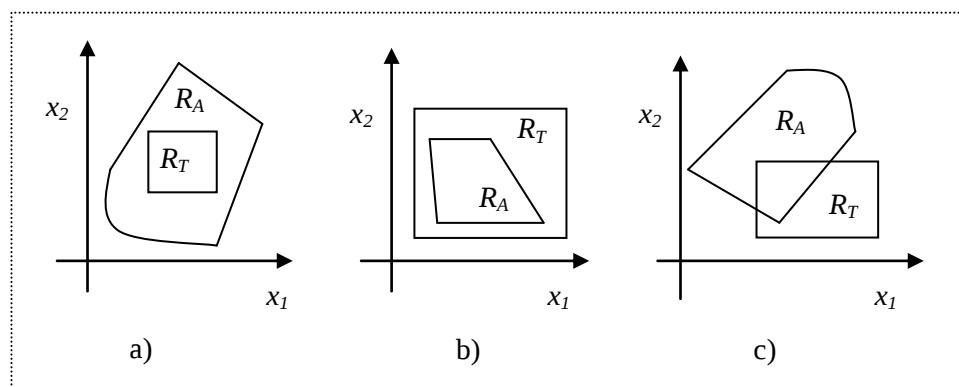
Obrázek 50: Řešení příkladu

□ Základní princip numerických metod.

V n rozměrném souřadném systému leží tedy dva prostory. Je to prostor tolerancí R_T a prostor přijatelnosti R_A . Mohou nastat teoreticky celkem 3 případy jejich vzájemné polohy. Buď se oba prostory překrývají, nebo se překrývají částečně, nebo se nepřekrývají. Pokud se oba překrývají, znamená to, že mají společné hranice a tedy pro všechny skutečné hodnoty stupňích parametrů je obvod vždy vyhovující a tedy výtěžnost je 100 %. Příklad úplného překrytí je spíš jen teoretický. Prakticky nastávají spíš zbývající dva. U částečného překrytí mohou nastat tyto případy:

1. Prostor R_T leží zcela uvnitř prostoru R_A viz obrázek 51 a). To znamená, že obvod je vždy vyhovující. Výtěžnost je tedy 100 %.
2. Prostor R_A leží zcela uvnitř prostoru R_T viz obrázek 51 b). To znamená, že tolerance jsou poněkud široké. Některé obvody jsou vyhovující, tj. ty pro které body z R_T leží uvnitř R_A , jiné obvody jsou nevyhovující tj. ty pro které body z R_T leží mimo R_A . Výtěžnost je tedy menší než 100 %.
3. Prostor R_T a R_A jsou vůči sobě posunuté a překrývají se jen zčásti viz obrázek 51 c). Vyhovující obvody jsou jen pro body nacházející se v části společné oběma prostorům. Výtěžnost je tedy menší než 100 %.

Pokud se prostory R_T a R_A nepřekrývají tak žádný obvod není vyhovující a výtěžnost je 0 %.

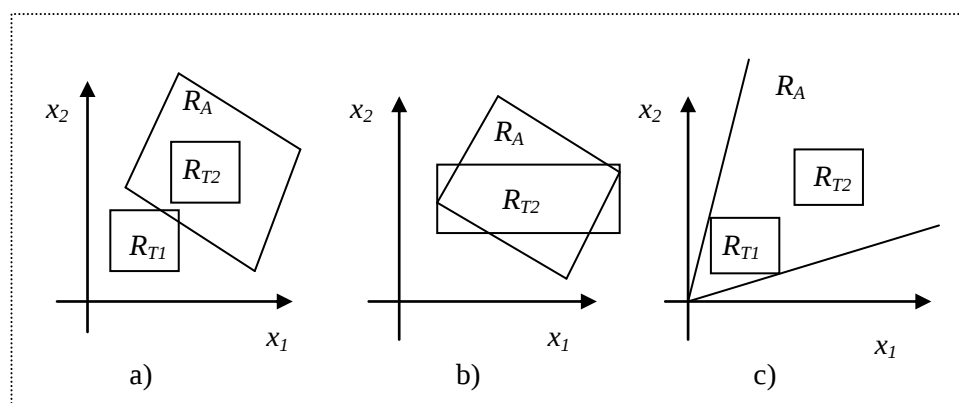


Obrázek 51 Příklad vzájemné polohy prostoru tolerancí a přijatelnosti

Vzájemnou polohou prostoru R_T a R_A , případně i změnou jejich velikostí lze ovlivňovat výtěžnost Y , případně cenu C , nebo kvalitu (spolehlivost vlastností) obvodu. Ukážeme si na obrázcích několik základních možností.

Na obrázku 52 a) je posun prostoru R_{T1} změnou jmenovitých hodnot vstupních parametrů na jiné jmenovité hodnoty (prostor R_{T2}), při zachování velikosti absolutních tolerancí (zůstává zachována velikost prostoru R_T). Posun R_{T1} do místa R_{T2} vede ke zvýšení výtěžnosti, zde vede na výtěžnost 100 %. Obecně ale nelze stanovit o jakou vzdálenost se má posun uskutečnit. Lze postupovat například tak, že v prostoru R_{T1} se určí z bodů ve kterých byla prováděna analýza obvodu těžiště vyhovujících C_P a těžiště nevyhovujících C_F obvodů a posun R_T se uskuteční po spojnici těchto těžišť o hodnotu $\Delta x = (1-Y)(C_P - C_F)$ kde Y je výtěžnost odpovídající předchozímu kroku posunutí. Pak pro novou polohu jmenovitých hodnot parametrů platí $x_0' = x_0 + \Delta x$. Úzké tolerance sice zajistí 100 % výtěžnost, ale obvod může být zbytečně drahý díky úzkým tolerancím.

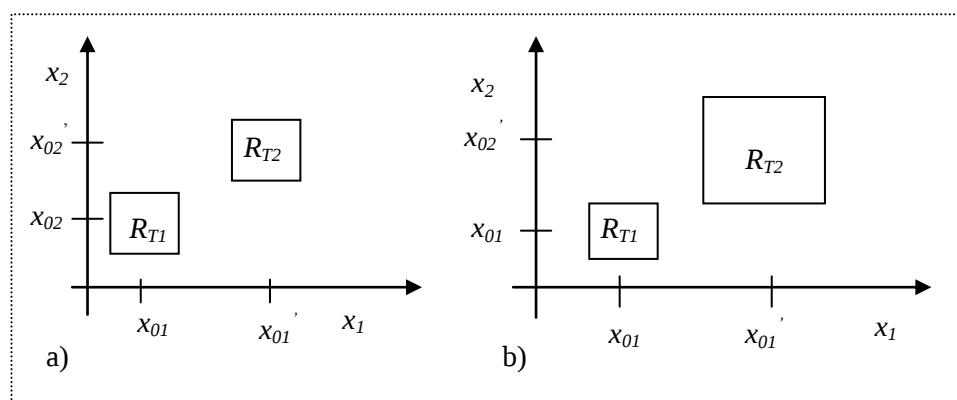
Rozšíříme-li velikost tolerancí tak jak je to na obrázku 52 b), klesne sice výtěžnost pod 100 %, ale obvod může být levnější a výtěžnost může být ještě přijatelná. Další možností naznačenou na obrázku 52 c) je zvětšení rezervy vlastností obvodu, tedy zvýšení jeho kvality. Původní prostor tolerancí R_{T1} se dotýká těsně hranic R_A . Vzhledem k tomu, že konfidenční interval tolerancí je dán určitou pravděpodobností, je možné, že mohou být některé obvody nevyhovující. Tato možnost se pak zvětšuje i vlivem působení fyzikálních vlivů třeba teploty.



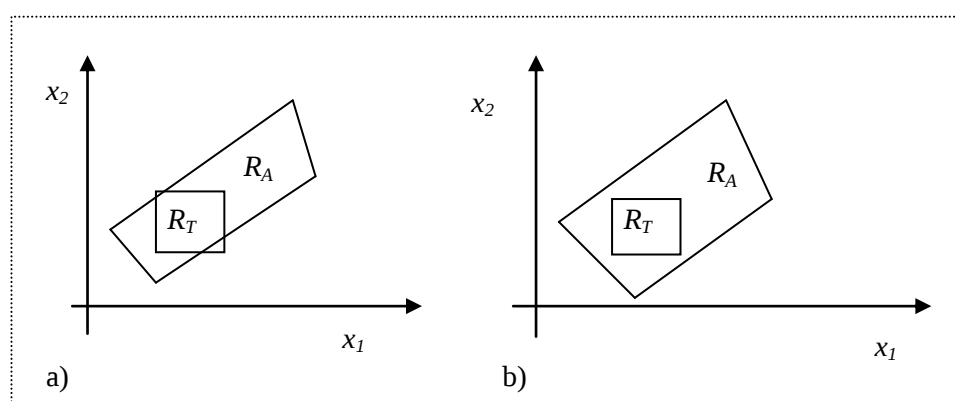
Obrázek 52: Příklady ovlivňování výtěžnosti či kvality

Posunutím R_{T1} do místa R_{T2} tedy změnou jmenovitých hodnot při zachování velikosti absolutních tolerancí, lze získat rezervu, že požadované vlastnosti obvodu zůstanou vždy zachovány, tedy zvětší se kvalita obvodu.

Posuny prostoru R_T , tedy změnu jmenovitých hodnot vstupních parametrů lze provádět v zásadě dvěma způsoby. Při posunu se buď zachovávají absolutní tolerance (mění se tím ale relativní tolerance) a tedy velikost prostoru R_T se nemění viz obrázek 53 a), nebo se zachovávají relativní tolerance (absolutní tolerance se tím mění) a mění se velikost prostoru R_T viz obrázek 53 b).

Obrázek 53: Posun a změna velikostí prostoru R_T

Někdy je možno dosáhnout zvýšení výtěžnosti, nebo zvětšení rezervy požadovaných vlastností malou úpravou tolerancí výstupní veličiny. Změnu je ovšem nutno konzultovat se zadavatelem. Takový postup vede na zachování původních tolerancí vstupních parametrů a tedy nevede ke zvýšení ceny obvodu. Takový případ je na obrázku 54. Na obrázku 54 a) je situace při původních požadavcích na toleranci výstupní veličiny. Na obrázku 54 b) je situace, která nastala zmírněním původních požadavků.



Obrázek 54: Zvětšení výtěžnosti a rezervy změnou požadavků

Pro větší názornost postupu při zvětšování výtěžnosti či rezervy si můžete pustit [animaci č. 3](#) z příloženého CD.

Příklad 4.2.

Navrhněte velikosti odporů R_1 a R_2 a jejich tolerance v napěťovém děliči z příkladu 4.1. Dělič je napájen stabilizovaným napětím $U_1 = 10 \text{ V}$. Výstupní napětí U_2 má být v rozsahu 2,7 V až 3,7 V. Proud protékající děličem I má být v rozsahu 0,8 mA až 2,5 mA..



Pro konstrukci prostoru R_A využijeme již odvozených vztahů v příkladu 4.1. Pro napětí dostaneme nerovnice

$$R_2 \geq R_1 \frac{U_{2\min}}{U_1 - U_{2\min}} \rightarrow R_2 \geq R_1 \frac{2,7}{10 - 2,7} \rightarrow R_2 \geq R_1 \cdot 0,369 . \quad (190)$$

Hraniční přímka této nerovnice je označena jako a na obrázku 55.

$$R_2 \leq R_1 \frac{U_{2\max}}{U_1 - U_{2\max}} \rightarrow R_2 \leq R_1 \frac{3,7}{10 - 3,7} \rightarrow R_2 \leq R_1 \cdot 0,587 . \quad (191)$$

Hraniční přímka této nerovnice je označena jako b na obrázku 55.

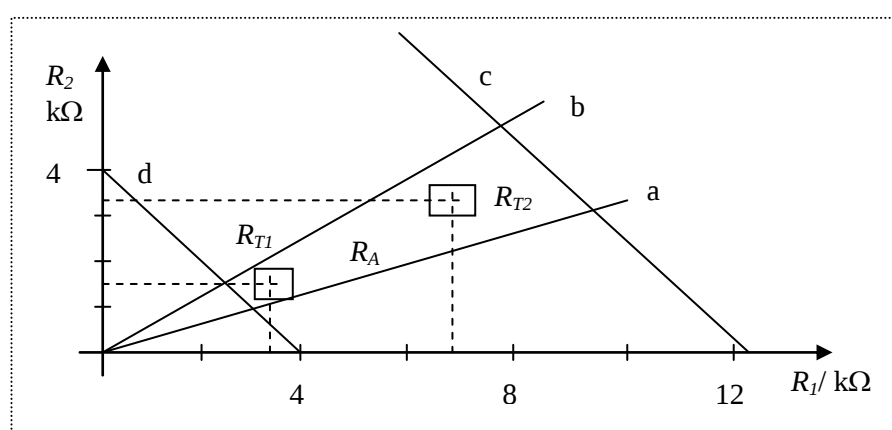
Pro proud dostaneme nerovnice

$$R_2 \leq \frac{U_1}{I_{\min}} - R_1 \rightarrow R_2 \leq \frac{10}{8 \cdot 10^{-4}} - R_1 \rightarrow R_2 \leq 1,25 \cdot 10^4 - R_1 . \quad (192)$$

Hraniční přímka této nerovnice je označena jako c na obrázku 55.

$$R_2 \geq \frac{U_1}{I_{\max}} - R_1 \rightarrow R_2 \geq \frac{10}{2,5 \cdot 10^{-3}} - R_1 \rightarrow R_2 \geq 4 \cdot 10^3 - R_1 . \quad (193)$$

Hraniční přímka této nerovnice je označena jako d na obrázku 55. Prostor R_A je lichoběžník vymezený hraničními přímkami.



Obrázek 55: Řešení příkladu 4.2.

V prostoru R_A zvolíme bod který určuje dvojici hodnot R_1 , R_2 například 3,3 kΩ a 1,5 kΩ z řady E12. Řada E12 má tolerance $\pm 10\%$. Tomuto bodu s uvedenými tolerancemi odpovídá prostor tolerancí obdélník R_{T1} na obrázku 55. Vrcholy obdélníku R_{T1} leží blízko hranic prostoru R_A .

Proto je třeba zkontrolovat zda v těchto bodech jsou splněny podmínky zadání. Půjde vlastně o kontrolu nejhoršího případu. Tak pro hodnoty maximálních a minimálních hodnot odporů dostaneme podle tolerance $\pm 10 \%$ hodnoty

$$R_{1\min} = 3,3 - 0,3 = 3 \text{ k}\Omega \quad R_{1\max} = 3,3 + 0,3 = 3,6 \text{ k}\Omega , \quad (194)$$

$$R_{2\min} = 1,5 - 0,15 = 1,35 \text{ k}\Omega \quad R_{2\max} = 1,5 + 0,15 = 1,65 \text{ k}\Omega . \quad (195)$$

Pro kombinace těchto hodnot dostaneme 4 napětí U_2 :

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\min}}{R_{2\min} + R_{1\max}} = 10 \frac{1,35 \cdot 10^3}{1,35 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^3} = 2,72 \text{ V} , \quad (196)$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\min}}{R_{2\min} + R_{1\min}} = 10 \frac{1,35 \cdot 10^3}{1,35 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 3,1 \text{ V} , \quad (197)$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\max}}{R_{2\max} + R_{1\max}} = 10 \frac{1,65 \cdot 10^3}{1,65 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^3} = 3,14 \text{ V} , \quad (198)$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\max}}{R_{2\max} + R_{1\min}} = 10 \frac{1,65 \cdot 10^3}{1,65 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 3,55 \text{ V} . \quad (199)$$

Obdobně pro proud I dostaneme hodnoty

$$I = \frac{U_1}{R_{1\min} + R_{2\min}} = \frac{10}{3 \cdot 10^3 + 1,35 \cdot 10^3} = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ A} , \quad (200)$$

$$I = \frac{U_1}{R_{1\max} + R_{2\max}} = \frac{10}{3,3 \cdot 10^3 + 1,65 \cdot 10^3} = 2,15 \cdot 10^{-3} \text{ A} . \quad (201)$$

Z výsledků plyne, že prostor R_{T1} sice celý leží v R_A a výtěžnost je tedy 100 %, ale jedním vrcholem se R_{T1} hodně blíží k hranici R_A a sice pro $U_2 = 2,72 \text{ V}$. Pokud bychom chtěli zajistit dostatečnou rezervu požadovaných vlastností obvodu, posuneme prostor R_{T1} při jeho nezměněné velikosti do polohy R_{T2} ve směru rostoucích hodnot R_1 a R_2 .

Má-li být zachována velikost absolutních tolerancí, je třeba při zvětšení hodnot odporů zmenšit relativní tolerance. Nejbližší řada s menšími tolerancemi je E24 Ta má toleranci $\pm 5 \%$. Relativní tolerance se snížila dvakrát a aby zůstala zachována absolutní tolerance, je třeba zvýšit

jmenovité hodnoty odporů také dvakrát. Nejbližšími vhodnými hodnotami v řadě E24 jsou $R_1 = 6,8 \text{ k}\Omega$ a $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$. Pro kontrolu vypočítáme nejhorší případy napětí U_2 :

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\min}}{R_{2\min} + R_{1\max}} = 10 \frac{3,135 \cdot 10^3}{3,135 \cdot 10^3 + 7,14 \cdot 10^3} = 3,05 \text{ V} , \quad (202)$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\min}}{R_{2\min} + R_{1\min}} = 10 \frac{3,135 \cdot 10^3}{3,135 \cdot 10^3 + 6,46 \cdot 10^3} = 3,27 \text{ V} , \quad (203)$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\max}}{R_{2\max} + R_{1\max}} = 10 \frac{3,465 \cdot 10^3}{3,465 \cdot 10^3 + 7,14 \cdot 10^3} = 3,27 \text{ V} , \quad (204)$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_{2\max}}{R_{2\max} + R_{1\min}} = 10 \frac{3,465 \cdot 10^3}{3,465 \cdot 10^3 + 6,46 \cdot 10^3} = 3,49 \text{ V} . \quad (205)$$

Pro proud I vychází:

$$I = \frac{U_1}{R_{1\min} + R_{2\min}} = \frac{10}{3,135 \cdot 10^3 + 6,46 \cdot 10^3} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ A} , \quad (206)$$

$$I = \frac{U_1}{R_{1\max} + R_{2\max}} = \frac{10}{7,14 \cdot 10^3 + 3,465 \cdot 10^3} = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ A} . \quad (207)$$

Z výsledků je vidět, že volba $R_1 = 6,8 \text{ k}\Omega$ a $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$ z řady E24 zajistí menší rozptyl vlastností obvodu a větší rezervu od hranic oblasti R_A než volba původní.

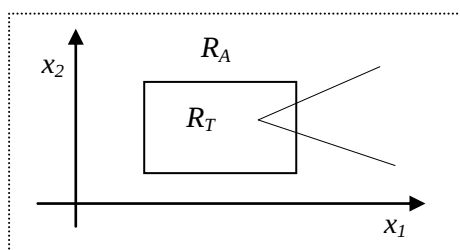
□ Některé používané metody.

Zde popsané metody využívají jednak analýzu daného obvodu ve vybraných bodech prostoru tolerancí R_T , což se označuje jako **metoda vzorkování** a jednak využívají i v různé míře statistické postupy. Pokud se používá volba vybraných bodů (vzorků) v prostoru R_T náhodně označují se metody jako **statistické** (Monte Carlo). Při výběru bodů podle nějakého určitého postupu, který zajistí opakovatelnost výsledků se označují metody jako **deterministické** (nejhorší případ, regionalizace, jednoduchá aproximace). Principy metod jsou demonstrovány pro dva vstupní parametry, tedy vedou na dvourozměrný případ.

□ Nejhorší případ.

Analýza obvodu zahrnuje takové kombinace hodnot vstupních parametrů, které vedou k extrémním hodnotám výstupních veličin. V případě prostoru R_T jsou takové body vrcholy obdélníka (dva parametry), vrcholy kvádra (tři parametry). Tedy stačí provést analýzu obvodu v těchto bodech prostoru R_T a rozhodnout zda výstupní veličina splňuje požadavky. Pokud jsou požadavky splněny, považuje se obvod za vyhovující v celém prostoru R_T .

Metoda nejhoršího případu je úspěšně použitelná jen v případech kdy prostor přijatelnosti R_A je konvexní. Při konkávním prostoru R_A se může stát, že analýza v extrémních bodech R_T sice vyhovuje, ale část prostoru R_A díky konkávnosti zasahuje do prostoru R_T právě v místech která leží mimo extrémní body viz obrázek 56. Obvody v průniku prostorů R_T a R_A jsou nevyhovující a snižují výtěžnost Y , která by jinak byla podle metody nejhoršího případu 100 %.

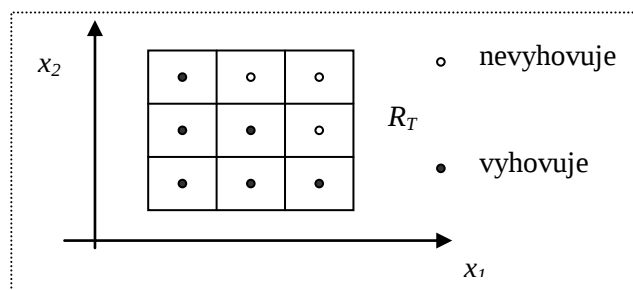


Obrázek 56: Omezení pro analýzu nejhoršího případu

Další nevýhoda metody nejhoršího případu je, že s rostoucím počtem vstupních parametrů n velmi roste počet prováděných analýz obvodu, což klade nároky na schopnosti počítače. Každý vstupní parametr má dvě extrémní hodnoty. Pro n vstupních parametrů je 2^n možných kombinací extrémních hodnot a tedy je potřeba provést 2^n analýz obvodu. Pokud má obvod 8 vstupních parametrů je to 256 analýz.

□ Regionalizace.

Prostor R_T se rozdělí na podprostory a v každém se zvolí jeden centrální bod. V těchto bodech se provede analýza a rozhodne se zda obvod vyhovuje či ne viz obrázek 57. Podle výsledku analýzy centrálního bodu se považuje zda celý podprostor vyhovuje či ne. Je-li počet vyhovujících bodů m a celkový počet bodů N , pak výtěžnost je dle vztahu $Y = m/N$.



Obrázek 57: Metoda regionalizace

Výhodou metody je, že nezávisí na tom zda je prostor R_A konvexní či ne. Nevýhodou metody je, že velmi roste počet analýz obvodu s počtem vstupních parametrů a s dělením na podprostory. Je-li počet vstupních parametrů n a každý parametr bude rozdělen na K úseků, je celkem počet podprostorů roven

K^n a tedy je potřeba provést K^n analýz obvodu. Například pro $K = 3$ a $n = 8$ je třeba provést 6561 analýz.

Při velkých počtech bodů lze postupovat tak, že se celý prostor R_T rozdělí na podprostory, a provede se náhodné generování bodů v celém prostoru R_T podle předpokládaných hustot statistického rozdělení hodnot parametrů. V každém podprostoru se vybere jeden bod jako centrální a pro ten se provede analýza. V podprostorech se spočítá hodnota $w_i = m_i/N$, kde m_i je vygenerovaných bodů, které padly do daného podprostoru, N je celkový počet vygenerovaných bodů v R_T . Celková výtěžnost Y je dle vztahu

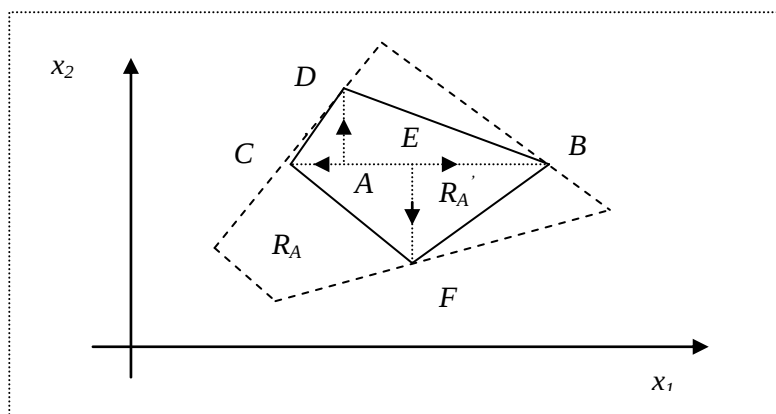
$$Y = \sum_{i=1}^K w_i \cdot g_i, \quad (208)$$

g_i má hodnotu 1 pokud analýza centrálního bodu vyhověla, 0 pokud nevyhověla. Pro snížení počtu operací lze počítat w_i jen v podprostorech kde analýza centrálního bodu vyhověla.

□ Jednoduchá aproximace.

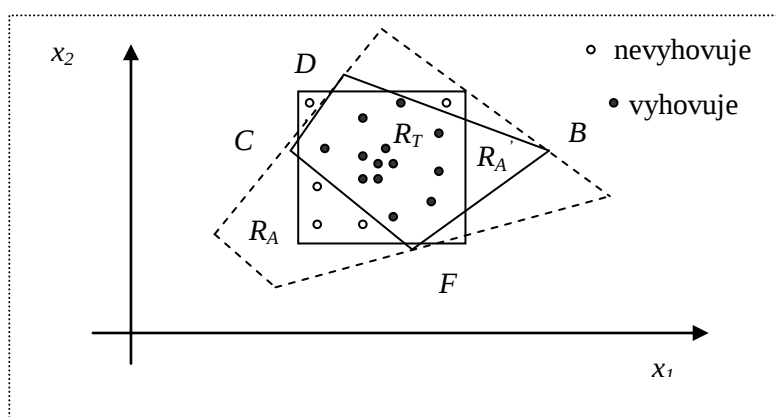
Zjišťování prostoru přijatelnosti R_A může být poměrně složité, protože to závisí na složitosti systémové funkce. Proto bývá početně schůdnější aproximovat skutečný prostor R_A prostorem R_A' , který má mnohem jednodušší matematický popis. Používá se jednoduchá aproximace mnohoúhelníkem (dvourozměrný prostor), mnohostěnem (trojrozměrný prostor). Když se získá prostor R_A' tak se provede v prostoru tolerancí R_T generování N bodů podle statistického rozdělení hustot hodnot parametrů. Porovná se kolik vygenerovaných bodů m padlo do prostoru R_A' . O těch bodech se předpokládá, že analýza obvodu je zde vyhovující. Výtěžnost Y se počítá podle vztahu $Y = m/N$. Pro určení prostoru R_A' je popsán následující algoritmus. Pro větší názornost algoritmu si můžete pustit [animaci č. 4](#) z příloženého CD.

V předpokládaném prostoru R_A se zvolí bod A ve kterém je analýza obvodu vyhovující viz obrázek 58. Pak se změní jeden parametr třeba x_1 o jistou hodnotu, parametr x_2 zůstane stálý. Dostaneme další bod posunutý vpravo ve směru šipky od bodu A . Opět se v něm provede analýza a zjistí se zda vyhovuje či ne. Pokud vyhovuje tak se postup opakuje tak dlouho až se narazí na bod ve kterém analýza není vyhovující. To je bod který leží jistě mimo prostor R_A . Poslední bod ve kterém analýza vyhověla je označen B . Pak se postupuje od bodu A na opačnou stranu, tedy vlevo a postup se opakuje. Poslední vyhovující bod je označen jako C . Když je vyčerpán rozsah parametru x_1 pokračuje se opět z bodu A , ale tentokrát se mění parametr x_2 zatímco parametr x_1 se nemění. Postupuje se tedy z bodu A do bodu D což je poslední bod ve kterém je analýza vyhovující. Pak se spojnice bodů $C B$ rozpůlí a vznikne na ní bod E . Z bodu E se postupuje změnou parametru x_2 až do bodu F , který jako poslední vyhověl. Body B, C, D, F se spojí úsečkami a vznikne prostor R_A' což je v daném případě čtyřúhelník. (Poloha bodů B, C, D, F závisí na zvoleném kroku Δx_i a nemusí být vždy na skutečné hranici prostoru R_A .) Postup lze opakovat na hranách čtyřúhelníka a prostor R_A' tak rozšiřovat.



Obrázek 58: Algoritmus jednoduché aproximace

Metodu jednoduché aproximace nelze použít v případě, že prostor R_A je konkávní, nebo obsahuje zakázané prostory, protože pak prostor R_A může obsahovat i části kde je obvod nevyhovující. Konkávnost prostoru R_A nelze obecně zjistit. Na obrázku 59 je příklad polohy prostoru R_T s vygenerovanými body.



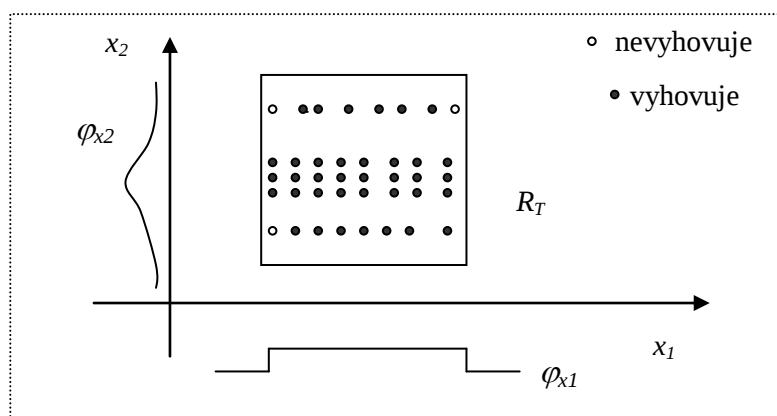
Obrázek 59: Příklad řešení jednoduchou aproximací

□ Monte Carlo.

Ve zvoleném prostoru R_T se vygeneruje náhodně N bodů podle předpokládaných hustot rozložení hodnot parametrů x_i . V každém z vygenerovaných bodů se provede analýza obvodu a rozhodne se zda obvod vyhovuje. Metodou se dá odhadovat výtěžnost $Y = m/N$ kde m je počet bodů kde analýza je vyhovující, N je celkový počet bodů.

Metoda není vhodná pro zvyšování výtěžnosti změnou velikosti prostoru R_T , protože se předem neví kde jsou hranice prostoru přijatelnosti R_A . Může se stát, že hranice prostoru R_T leží příliš blízko hranic

R_A a je malá rezerva stability vlastností obvodu. Výhodou metody Monte Carlo je poměrně snadná implementace algoritmu. Příklad použití metody Monte Carlo je na obrázku 60. Každý z parametrů má jinou hustotu rozložení hodnot x_1 má rovnoměrné rozložení, x_2 má normální rozložení.



Obrázek 60: Příklad na použití metody Monte Carlo



Shrnutí pojmů 4.1

Výtěžnost je poměr počtu vyhovujících obvodů a celkového počtu sledovaných obvodů.

Cenová funkce je matematické vyjádření závislosti ceny součástky na její toleranci.

Prostor tolerancí je útvar jehož hranice jsou určeny tolerancemi všech vstupních parametrů,

Prostor přijatelnosti je útvar jehož hranice jsou určeny požadovanými ještě přijatelnými vlastnostmi obvodu,

Vzorek je vybraný konkrétní obvod z jistého množství obvodů blízkých vlastností, na kterém je provedena analýza jeho vlastností.

Metoda deterministická Výběr vzorku je prováděn způsobem, který zajistí opakovatelnost výsledků, metoda statistická, Výběr hodnot vstupních parametrů prováděn statisticky.



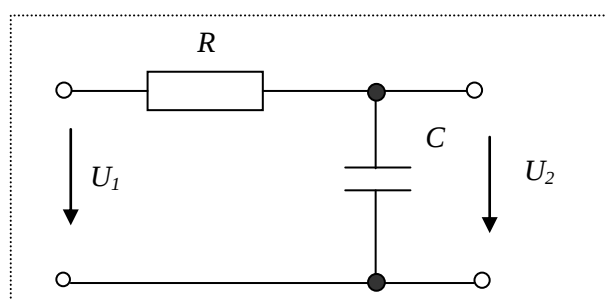
Otázky 4.1

1. Vyjmenujte výhody a nevýhody numerických metod.
2. K jakým cílům lze použít numerické metody?
3. Popište principy jednotlivých metod.
4. Pokuste se porovnat metody z hlediska množství početních operací, která metoda je náročnější?



Úlohy 4.1

1. Nakreslete prostor přijatelnosti pro odporový dělič z řešeného příkladu 4.1. pro podmínku aby U_2 nenabývalo hodnot mezi $U_{2\min}$ a $U_{2\max}$.
2. Nakreslete prostor přijatelnosti pro filtr RC na obrázku 61 pro podmínku aby zlomový kmitočet f_c byl mezi hodnotami $f_{c\min} < f_c < f_{c\max}$ a mají se použít hodnoty odporů menší než $R_{\max}$ a hodnoty kapacit menší než $C_{\max}$.
3. Nakreslete prostor přijatelnosti pro filtr RC na obrázku 61 pro podmínku aby zlomový kmitočet byl $f_c > f_{c\min}$ a hodnoty R a C mají nabývat hodnot v rozsahu $R_{\min}$ až $R_{\max}$ a $C_{\min}$ až $C_{\max}$ ale zároveň jsou vyloučeny hodnoty v rozsahu R_1 až R_2 a C_1 až C_2 . Platí $R_{\min} < R_1$, $R_2 < R_{\max}$, $C_{\min} < C_1$, $C_2 < C_{\max}$.



Obrázek 61: Filtr RC



Průvodce studiem

Tak pokud jste se dostali až sem, zdolali jste úspěšně základy teorie analýzy a návrhu tolerancí. Umíte už v daném obvodu vypočítat toleranci výstupní veličiny, nebo naopak navrhnout potřebné výrobní tolerance součástek, aby výstupní veličina měla předepsanou toleranci. V následující kapitole Vás čekají jen samé praktické aplikace teoretických znalostí.

5. NÁVRH ELEKTRONICKÝCH OBVODŮ

5.1. Vliv citlivostí a parazitních parametrů.



Čas ke studiu: 5 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat kritérium minimalizace citlivosti
- popsat metody pro snižování citlivosti obvodu
- navrhnout obvod s ohledem na citlivost a vliv parazitních parametrů



Výklad

□ Minimalizace citlivostí obvodu.

Pro dobrou reprodukovatelnost elektrického obvodu je žádoucí aby zapojení mělo co nejmenší citlivost systémové funkce na změnu vstupních parametrů. Tytéž požadované funkce mohou zajišťovat různé elektrické obvody. Tyto obvody se mohou od sebe lišit různou mírou citlivosti systémové funkce na změnu vstupních parametrů. Je proto vhodné mít nějaké kritérium pro posouzení celkové citlivosti obvodu, aby bylo možno obvody vzájemně posuzovat.

Jako kritérium pro posouzení celkové citlivosti obvodu se užívá součet kvadrátů relativních citlivostních koeficientů. Součet kvadrátů se užívá z toho důvodu, že součet relativních citlivostních koeficientů může být invariant. Defínuje se tedy veličina L pro posouzení celkové citlivosti obvodu vztahem

$$L = \sum_{i=1}^n \left(S_{x_i}^y \right)^2 \quad (209)$$

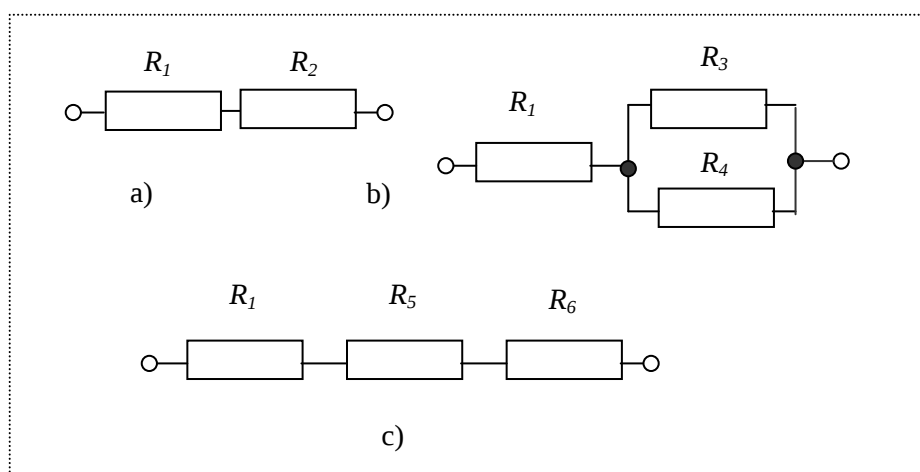
Kde n je počet vstupních parametrů obvodu. Je žádoucí, aby L nabývala co nejmenších hodnot. Obecně, ale nemusí vždy pro daný obvod existovat minimum L .

□ Minimalizace citlivostí zvýšením počtu součástek.

Hodnoty citlivostí S_x^y a tedy i L lze zmenšit obecně zvětšením počtu prvků. Tento postup nemusí být vždy správný, protože nárůst počtu prvků může znamenat nárůst ceny obvodu z důvodu zvětšení počtu součástek. Na druhé straně snížení hodnot citlivostí může znamenat možnost použití součástek se širšími tolerancemi, které bývají zpravidla levnější.

Příklad 5.1.

Vypočítejte hodnotu relativní citlivostní koeficienty celkového odporu R na změnu hodnot odporů a hodnotu kritéria L pro jednotlivá zapojení na obrázku 62. Jmenovité hodnoty jsou $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 62 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$, $R_5 = 12 \Omega$, $R_6 = 8,2 \Omega$.



Obrázek 62: Příklad na změny citlivostí



Pro zapojení a) platí $R = R_1 + R_2$. a pro relativní citlivostní koeficienty platí

$$S_{R_1}^R = \frac{\partial R}{\partial R_1} \frac{R_1}{R} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad S_{R_2}^R = \frac{\partial R}{\partial R_2} \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad . \quad (210)$$

Číselné hodnoty relativních citlivostních koeficientů budou

$$S_{R_1}^R = \frac{1}{3} \approx 0,333 \quad S_{R_2}^R = \frac{2}{3} \approx 0,666 \quad . \quad (211)$$

Hodnota kritéria L bude

$$L = (S_{R_1}^R)^2 + (S_{R_2}^R)^2 = 0,555 \quad . \quad (212)$$

V zapojení b) je celkový odpor $R = 30,21 \Omega$, tedy je téměř zachována hodnota celkového odporu zapojení a). Celkový odpor je

$$R = R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{P}{Q} \quad . \quad (213)$$

Relativní citlivostní koeficienty jsou

$$S_{R_1}^R = R_1 \frac{R_3 + R_4}{P} \quad S_{R_3}^R = R_3 \left(\frac{R_1 + R_4}{P} - \frac{1}{Q} \right) \quad S_{R_4}^R = R_4 \left(\frac{R_1 + R_3}{P} - \frac{1}{Q} \right) \quad . \quad (214)$$

Jejich číselné hodnoty budou

$$S_{R_1}^R = 0,3309 \quad S_{R_3}^R = 0,2182 \quad S_{R_4}^R = 0,4509 \quad . \quad (215)$$

Hodnota kritéria L bude

$$L = (S_{R_1}^R)^2 + (S_{R_3}^R)^2 + (S_{R_4}^R)^2 = 0,3604 \quad . \quad (216)$$

V zapojení c) je celkový odpor $R = 30,2 \Omega$, tedy je téměř zachována hodnota celkového odporu zapojení a). Pro relativní citlivostní koeficienty platí vztahy

$$S_{R_1}^R = \frac{R_1}{R_1 + R_5 + R_6} \quad S_{R_5}^R = \frac{R_5}{R_1 + R_5 + R_6} \quad S_{R_6}^R = \frac{R_6}{R_1 + R_5 + R_6} \quad . \quad (217)$$

Číselné hodnoty relativních citlivostí jsou

$$S_{R_1}^R = 0,3311 \quad S_{R_5}^R = 0,3973 \quad S_{R_6}^R = 0,2715 \quad . \quad (219)$$

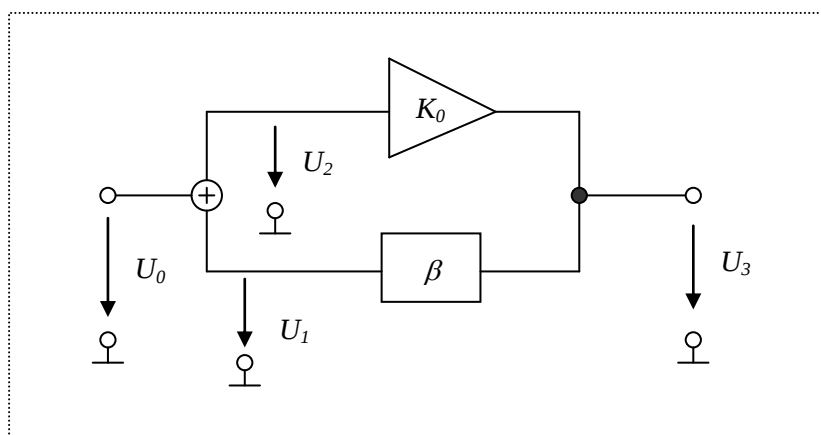
Hodnota kritéria L je

$$L = (S_{R_1}^R)^2 + (S_{R_5}^R)^2 + (S_{R_6}^R)^2 = 0,3412 \quad . \quad (220)$$

Z tohoto příkladu je vidět, že zvětšení počtu součástek vedlo k poklesu hodnot citlivostí obvodu a ke snížení hodnoty kritéria L .

□ Snížení citlivosti zavedením záporné zpětné vazby.

Tuto možnost vypracoval H.W. Bode [13] když definoval pojem citlivosti. Záporná zpětná vazba snižuje vliv rozptylu hodnot zesilovacího činitele zesilovacího prvku na celkové zesílení zesilovače. Na obrázku 63 je blokové schéma zesilovače se zpětnou vazbou.



Obrázek 63: Zesilovač se zpětnou vazbou

Kde K_0 je zesílení zesilovače bez působení zpětné vazby, β je činitel přenosu zpětné vazby, $+$ je sčítací člen na vstupu zesilovače, U_0 je vstupní napětí zesilovače, U_2 je výstupní napětí zesilovače. Pro samotný blok zesilovače platí $U_3 = K_0 U_2$. Pro blok zpětné vazby platí $U_1 = \beta U_3$. Pro sčítací uzel platí $U_2 = U_0 + U_1$. Z těchto vztahů plyne pro napětí U_3 zesilovače se zpětnou vazbou

$$U_3 = K_0 U_2 = K_0 (U_0 + U_1) = K_0 (U_0 + \beta U_3) . \quad (221)$$

Z této rovnice lze vypočítat, že mezi vstupním napětím U_0 a výstupním napětím U_3 platí Blackův vztah

$$U_3 = \frac{K_0}{1 - \beta K_0} U_0 = K U_0 , \quad (222)$$

(odvodil H.S. Black 1934). Kde K je celkové zesílení zesilovače se zpětnou vazbou. Je třeba zdůraznit, že Blackův vztah platí přesně za předpokladu, že blok zesilovače se zesílením K_0 přenáší energii jen jedním směrem tj. ze vstupu na výstup. U skutečných součástek například tranzistorů proto vztah může platit jen přibližně (záleží na parametrech tranzistoru a podmínkách použití např. kmitočtu) Máme tedy pro K vztah

$$K = \frac{K_0}{1 - \beta K_0} . \quad (223)$$

Vypočteme koeficient relativní citlivosti celkového zesílení K na změnu parametru K_0

$$S_{K_0}^K = \frac{K_0}{K} \frac{\partial K}{\partial K_0} = \frac{K_0(1 - \beta K_0)}{K_0} \cdot \frac{1 - \beta K_0 + \beta K_0}{(1 - \beta K_0)^2} = \frac{1}{1 - \beta K_0} . \quad (224)$$

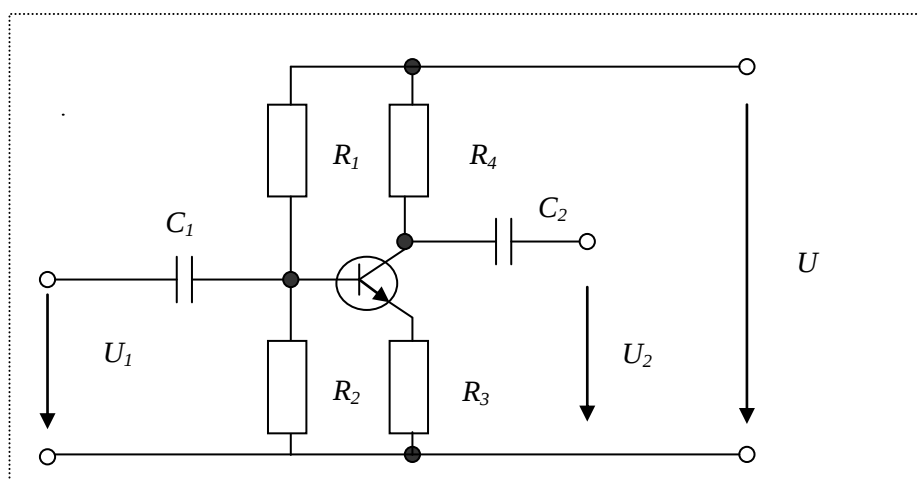
Z tohoto vztahu plyne, že citlivostní koeficient se zmenšuje s rostoucí hodnotou součinu βK_0 . Obecně β i K_0 jsou komplexní čísla. Blok zpětné vazby je pasivní dvojbran (tedy nezesiluje) tak $|\beta|$ může nabývat hodnot od 0 do 1. Z Blackova vztahu plyne, že $|K| < |K_0|$ tedy záporná zpětná vazba zmenšuje zesílení. Z koeficientu $S_{K_0}^K$ plyne, že záporná zpětná vazba také snižuje velikost relativních změn K , způsobených relativními změnami K_0 protože relativní citlivostní koeficient lze psát také ve tvaru

$$\frac{\partial K}{K} = \frac{1}{1 - \beta K_0} \frac{\partial K_0}{K_0} \rightarrow \frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{1 - \beta K_0} \frac{\Delta K_0}{K_0} . \quad (225)$$

Pro větší názornost o účinku záporné zpětné vazby na změnu zesílení zesilovače při různém zesílení zesilovacího prvku si můžete pustit [animaci č. 5](#) z příloženého CD.

Příklad 5.2.

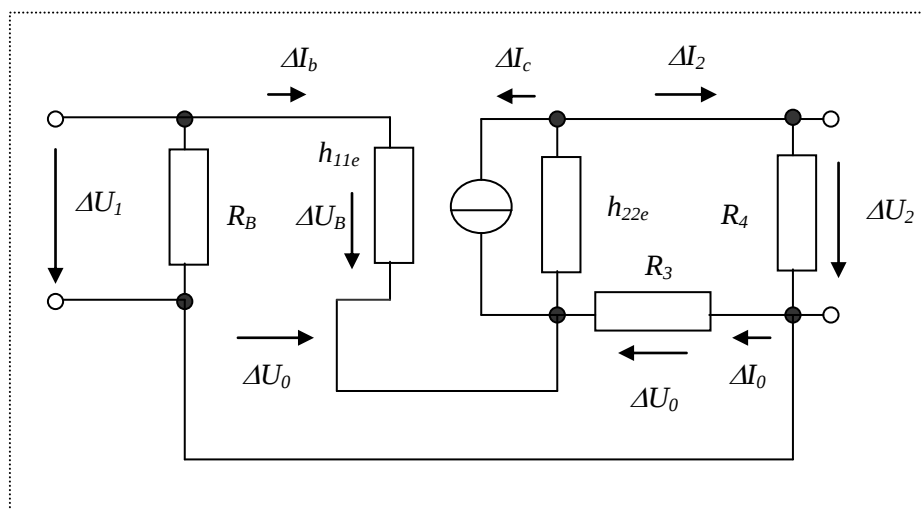
Vypočítejte hodnotu napěťového zesílení zesilovače na obrázku 64 pro střídavý signál ve středním kmitočtovém pásmu. Výpočet proveďte pro různé hodnoty zesilovacího činitele tranzistoru h_{21e} . Porovnejte relativní změny zesílení zesilovače K v obou případech h_{21e} s relativními změnami zesílení K_0 v případě kdy nepůsobí záporná zpětná vazba. Jmenovité hodnoty jsou $R_1 = 22 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 47 \text{ }\Omega$, $R_4 = 1,2 \text{ k}\Omega$. $U = 12 \text{ V}$, $C_1 = C_2 = 10 \text{ }\mu\text{F}$, $h_{11e} = 1500 \text{ }\Omega$, $h_{22e} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ S}$, $h_{21e} = 150$ (180).



Obrázek 64: Tranzistorový zesilovač se zpětnou vazbou



V zapojení odpor R_3 vytváří zápornou zpětnou vazbu. Pro výpočet zesílení převedeme zapojení na schéma pro změny obvodových veličin ve středním kmitočtovém pásmu. Stejnoseměrný nezávislý zdroj U bude nahrazen zkratem, kapacity C_1 a C_2 ve středním kmitočtovém pásmu zesilovače mají zanedbatelné reaktance a jsou nahrazeny zkraty, tranzistor je nahrazen linearizovaným modelem pro změny obvodových veličin s h parametry. Schéma je nakresleno na obrázku 65 ve vhodném tvaru pro výpočty z hlediska zpětné vazby. Odpor R_B je paralelní kombinace odporů R_1 a R_2 .



Obrázek 65: Náhradní schéma zesilovače

Pro výpočet napětěvého zesílení K použijeme Blackův vztah

$$K = \frac{K_0}{1 - \beta K_0} \quad (226)$$

Nejprve vypočteme zesílení K_0 . To vypočteme za podmínky že nepůsobí zpětná vazba tj. že napětí $\Delta U_0 = 0$, což je splněno tehdy, když bude $R_3 = 0$. Pak pro výstupní napětí ΔU_2 platí:

$$\Delta U_2 = -\frac{R_4 \frac{1}{h_{22e}}}{R_4 + \frac{1}{h_{22e}}} \Delta I_c = -\frac{R_4}{1 + R_4 h_{22e}} h_{21e} \Delta I_b = -\frac{R_4 h_{21e}}{1 + R_4 h_{22e}} \frac{\Delta U_b}{h_{11e}} \quad (227)$$

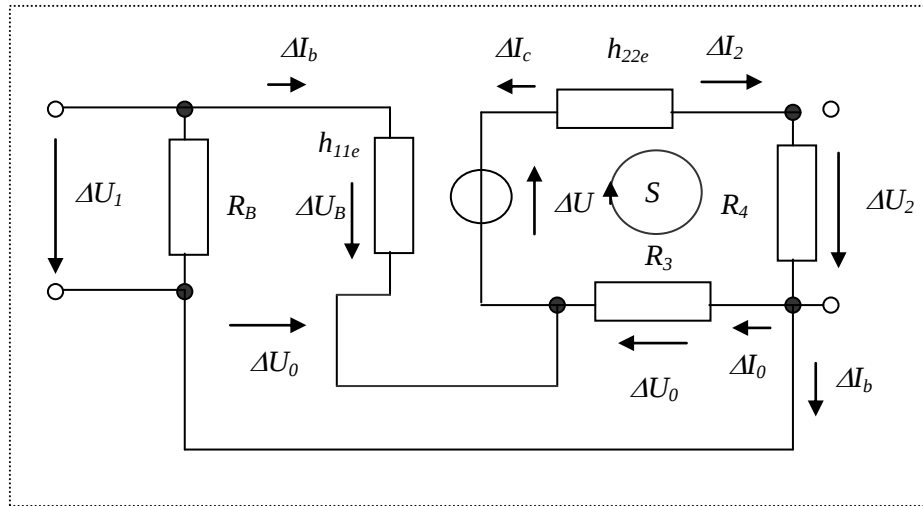
Z této rovnice vypočítáme K_0 jako poměr

$$K_0 = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_b} = -\frac{R_4 h_{21e}}{(1 + R_4 h_{22e}) h_{11e}} \quad (228)$$

Pro výpočet činitele zpětné vazby β je výhodnější převést řízený proudový zdroj ΔI_c a vodivost h_{22e} na ekvivalentní napěťový zdroj ΔU dle vztahu

$$\Delta U = \frac{\Delta I_c}{h_{22e}} \quad . \quad (229)$$

A dostaneme schéma na obrázku 66.



Obrázek 66: Náhradní schéma zesilovače

Činitel zpětné vazby je vyjádřen jako poměr $\beta = \Delta U_0 / \Delta U_2$. Podle 2. Kirchhoffova zákona pro označenou smyčku S platí:

$$\frac{\Delta I_c}{h_{22e}} + \frac{\Delta I_2}{h_{22e}} + R_4 \Delta I_c + R_3 (\Delta I_2 - \Delta I_b) = 0 \quad . \quad (230)$$

Do rovnice dosadíme $\Delta I_c = h_{21e} \Delta I_b$ a vyjádříme z rovnice proud ΔI_2 . Pomocí proudu ΔI_2 pak vyjádříme napětí ΔU_2 jako

$$\Delta U_2 = R_4 \Delta I_2 = R_4 \Delta I_b \frac{h_{22e} R_3 - h_{21e}}{1 + R_4 h_{22e} + R_3 h_{22e}} \quad . \quad (231)$$

Nyní vypočteme napětí ΔU_0 a přitom dosadíme za proud ΔI_2

$$\Delta U_0 = R_3 \Delta I_0 = R_3 (\Delta I_2 - \Delta I_b) = R_3 \Delta I_b \frac{h_{22e} R_3 - h_{21e} + 1 + R_4 h_{22e} + R_3 h_{22e}}{1 + R_4 h_{22e} + R_3 h_{22e}} . \quad (232)$$

Nyní vypočteme činitel zpětné vazby β

$$\beta = \frac{\Delta U_0}{\Delta U_2} = \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{h_{22e} R_3 - h_{21e} + 1 + R_4 h_{22e} + R_3 h_{22e}}{h_{22e} R_3 - h_{21e}} . \quad (233)$$

Vzhledem k tomu, že dle zadaných hodnot platí $1 \gg R_3 h_{22e}$ a $1 \gg R_4 h_{22e}$ a pro činitel zpětné vazby lze psát, že platí

$$\beta \approx \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{h_{21e} - 1}{h_{21e}} . \quad (234)$$

Vzhledem k velikosti h_{21e} platí $h_{21e} \gg 1$ tak lze psát, že platí

$$\beta \approx \frac{R_3}{R_4} = \frac{47}{1200} = 3,91 \cdot 10^{-2} . \quad (235)$$

Nyní vypočteme zesílení K_0 a K pro hodnotu $h_{21e} = 150$. Dostaneme

$$K_0 = -110,7 \quad K = -20,7 . \quad (236)$$

Pro hodnotu $h_{21e} = 180$. Dostaneme

$$K_0 = -132,8 \quad K = -21,4 . \quad (237)$$

Nyní vypočítáme poměrnou změnu zesílení bez zpětné vazby.

$$\delta_{K_0} = \frac{\Delta K_0}{K_0} 100 = \frac{-132,8 - (-110,7)}{-110,7} 100 = 19,96 \% . \quad (238)$$

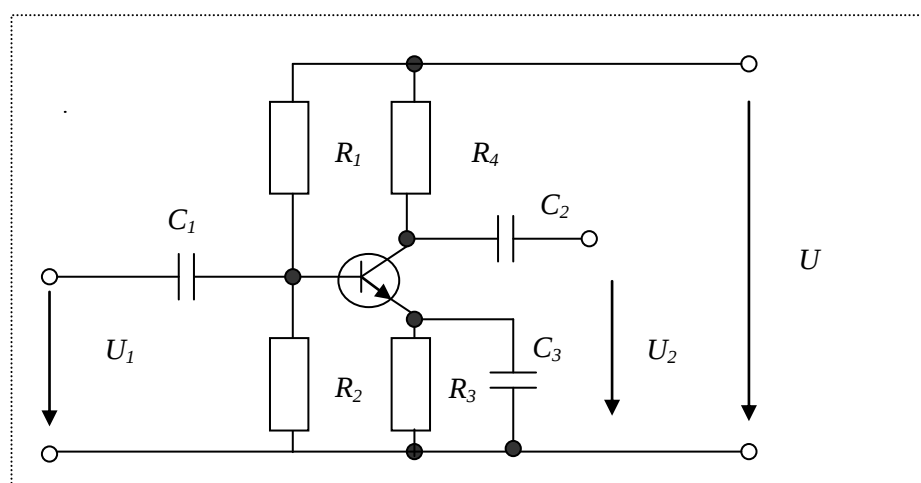
Tato hodnota odpovídá poměrné změně zesilovacího činitele h_{21e} , což je 20 % . Vypočítáme poměrnou změnu zesílení se zpětnou vazbou

$$\delta_K = \frac{\Delta K}{K} 100 = \frac{-21,4 - (-20,7)}{-20,7} 100 = 3,38 \% \quad . \quad (239)$$

Z výsledku je vidět, že poměrná změna zesílení se zpětnou vazbou je mnohem menší jen 3,38 % i když poměrná změna proudového zesilovacího činitele h_{21e} je 20 %. Koeficient relativní citlivosti je

$$S_{K_0}^K = \frac{1}{1 - \beta K_0} = \frac{1}{1 - 3,91 \cdot 10^{-2} \cdot 110,7} = 0,18 \quad . \quad (240)$$

Zapojení na obrázku 64 je zesilovač se zpětnou vazbou, tedy má napět'ové zesílení $K = -20,7$ až $-21,4$. Praktické zapojení téhož zesilovače s vyloučenou zpětnou vazbou tj. pro $R_3 = 0$ by vyžadovalo jiné hodnoty odporů R_1 a R_2 aby byl dodržen stejný klidový pracovní bod tranzistoru. Protože jde ale o zesilovač střídavého signálu a předmětem zájmu bylo zesílení zesilovače ve středním kmitočtovém pásmu, lze realizovat vyloučení účinku odporu R_3 jeho přemostěním dostatečně velkou kapacitou, jejíž reaktanci lze na daném kmitočtu považovat za nulovou vzhledem k R_3 . V takovém případě zůstanou hodnoty odporů tytéž, protože klidový pracovní bod se nemění užitím kapacity $C_3 = 470 \mu\text{F}$ viz obrázek 67. Pro střídavý signál je ve středním kmitočtovém pásmu zesilovače zesílení $K_0 = -110,7$ až $-132,8$.



Obrázek 67: Zesilovač s vyloučenou zpětnou vazbou

□ Minimalizace citlivostí volbou vhodné struktury.

Vliv citlivostí na chování obvodu se výrazně projevuje zejména u kmitočtových filtrů. Teorie citlivosti bývá v literatuře často spojována v souvislosti s teorií kmitočtových filtrů. Sleduje se zejména vliv změny hodnot stavebních prvků na kmitočtovou charakteristiku filtru a to na tvar modulu přenosu (případně útlumu), velikost útlumu v předepsaných kmitočtech, na změnu zlomových kmitočtů. Přenosové funkce kmitočtových filtrů obvykle bývají složité zejména u filtrů vyšších řádů.

Aby se usnadnily výpočty a zjednodušil se postup návrhu tak se při praktickém návrhu filtrů obvykle vychází z normovaných základních zapojení (většinou dolních propustí). Potřebné normované hodnoty stavebních prvků bývají obvykle uvedeny v tabulkách katalogu filtrů, nebo v literatuře například [20], [21]. Konkrétní skutečné hodnoty dle požadavků na vlastnosti filtru se vypočítají z normovaných hodnot metodou odnormování. Než se začneme zabývat příklady na filtry je třeba prostudovat odstavec o normování a odnormování.

□ Normování a odnormování.

Normované hodnoty jsou malá reálná čísla, se kterými se provádějí numerické výpočty snadněji než se skutečnými hodnotami stavebních prvků, protože se zbavíme nutnosti provádět numerické výpočty s extrémně malými nebo extrémně velkými čísly. Kmitočtová závislost modulové a fázové charakteristiky filtru je stejná jak pro normované tak i pro odnormované hodnoty.

Hodnoty stavebních prvků se normují jak impedančně tak kmitočtově a takovému normování se říká impedanční a kmitočtové normování. Vysvětlíme si jeho podstatu na sériovém obvodu R, L, C . Tento obvod má při konkrétních hodnotách R, L, C a kmitočtu $p = j\omega$ impedanci $Z(p)$. Hodnotu abychom získali normovanou impedanci $z(p_n)$ kde p_n je normovaný kmitočet a z je normovaná impedance, je třeba nejprve vydělit hodnoty všech odporů a reaktancí vhodně velkým číslem R_0 , Pak normujeme kmitočet tak, že jeho hodnotu p vydělíme vhodně velkým číslem ω_0 . Aby byla zavedením normovaného kmitočtu zachována velikost normované impedance z , je třeba normovaný kmitočet p_n násobit touto konstantou ω_0 . Celý postup impedančního a kmitočtového normování lze zapsat jako

$$z(p_n) = \frac{Z(p)}{R_0} = \frac{R}{R_0} + \frac{p}{\omega_0} \frac{L}{R_0} + \frac{1}{\frac{p}{\omega_0} \omega_0 C R_0} = r + p_n l + \frac{1}{p_n c} \quad , \quad (241)$$

kde r, l, c jsou normované hodnoty odporu, indukčnosti a kapacity, a R_0 a ω_0 jsou normalizační konstanty. Z této rovnice plynou porovnáním koeficientů na odpovídajících si místech vztahy pro **impedanční a kmitočtové normování**

$$r = \frac{R}{R_0} \quad l = \omega_0 \frac{L}{R_0} \quad c = \omega_0 C R_0 \quad . \quad (242)$$

Tedy hodnoty na levé straně jsou neznámé a na pravé straně jsou známé.

záměnou proměnných dostaneme vztahy pro **impedanční a kmitočtové odnormování**

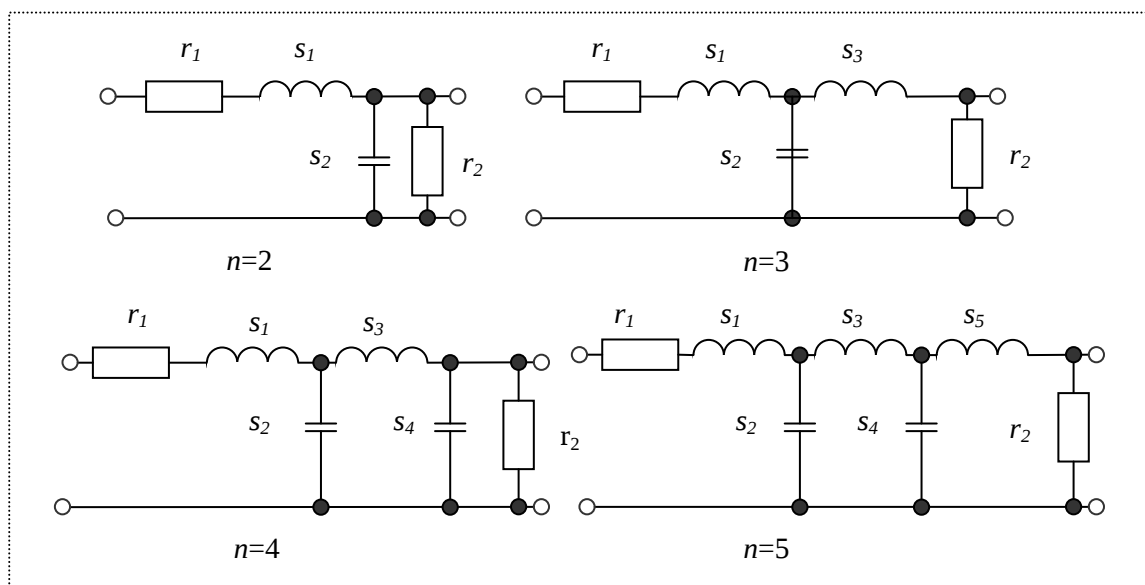
$$R = rR_0 \quad L = l \frac{R_0}{\omega_0} \quad C = \frac{c}{\omega_0 R_0} \quad . \quad (243)$$

Tedy hodnoty na levé straně jsou neznámé a na pravé straně jsou známé.

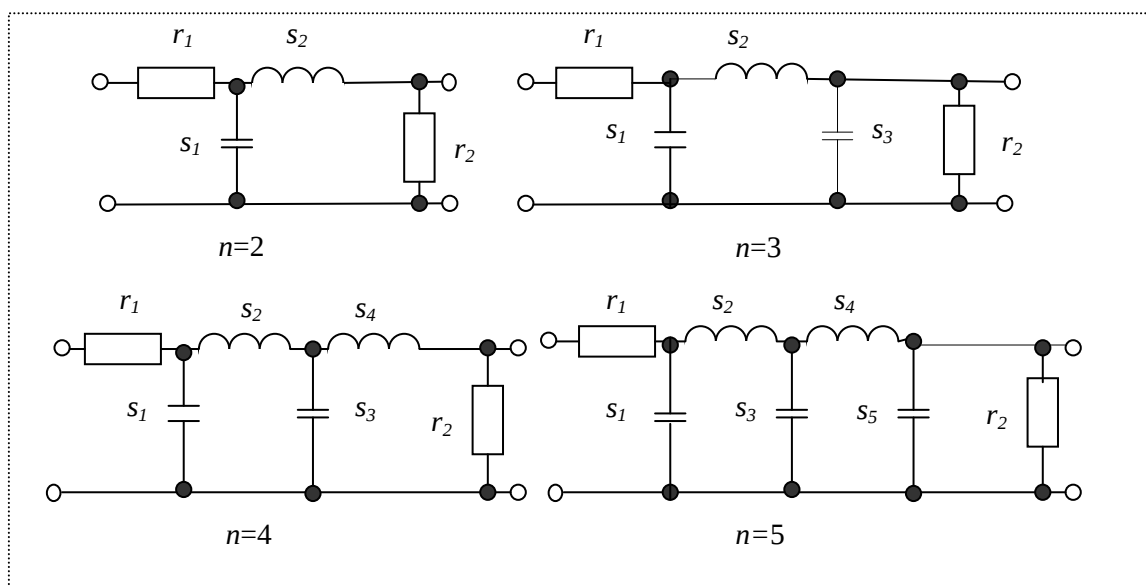
□ Návrh pasivních filtrů s užitím normovaných hodnot.

Jde o systematický návrh filtrů s užitím tabulkových hodnot normovaných dolních propustí n tého řádu. Existuje mnoho typů filtrů s nejrůznějšími závislostmi kmitočtových charakteristik popsanych například v [20], [21]. Obvodová struktura bývá většinou odvozena od takzvané příčkové struktury typu T nebo Π . Užití příčkové struktury je prakticky výhodné protože umožňuje zapojit zdroj signálu, filtr a zátěž na společnou zemnicí svorku.

Na obrázku 68 jsou schémata některých základních typů normovaných dolních propustí typu T a na obrázku 69 jsou typy Π . V tabulkách 5 jsou normované hodnoty stavebních prvků pro Butterworthovy filtry s maximálním útlumem v propustném pásmu 3 dB a v tabulce 6 pro Čebyševovy filtry lichých řádů se zvlněním v propustném pásmu 3 dB. Ve schématech jsou reaktanční prvky označeny s_1 až s_5 protože to odpovídá jejich normovaným číselným hodnotám v tabulkách.



Obrázek 68: Normované dolní propusti typu T



Obrázek 69: Normované dolní propusti typu II

+

n	r_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	r_2
2	1	1,414	1,414				1
3	1	1	2	1			1
4	1	0,7654	1,848	1,848	0,7654		1
5	1	0,618	1,618	2	1,618	0,618	1

Tabulka 5: Butterworthovy filtry

n	r_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	r_2
3	1	3,3487	0,7117	3,3487			1
5	1	3,4813	0,7619	4,5375	0,7619	3,4813	1

Tabulka 6: Čebyševovy filtry se zvlněním 3 dB

Čebyševovy filtry sudých řádů mají rozdílné zakončovací odpory r_1 a r_2 a nenulový základní útlum pro nulový kmitočet a tyto parametry se liší pro strukturu T i Π , proto se z praktických důvodů dává přednost lichým řádům. U zde uvedených normovaných dolních propustí je nejvyšší normovaný kmitočet Ω_1 v propustném pásmu, kde je maximální přípustný útlum $A_{\max} = 3$ dB roven 1 rad/s. Z toho plyne, že tento kmitočet je zároveň i normovaným zlomovým kmitočtem filtru Ω_c . Tedy normalizační konstanta ω_0 pro normování a odnormování je rovna skutečnému požadovanému kmitočtu ω_c , tedy platí $\omega_c = \omega_0$. Normované zakončovací odpory jsou rovny 1. Z toho plyne, že normalizační konstanta R_0 je rovna skutečné požadované hodnotě zakončovacích odporů, tj. vnitřnímu odporu zdroje R_1 a vstupnímu odporu zátěže R_2 .

Výběr zapojení se provede na základě určení řádu filtru n podle požadavků. Ve zde uvedených příkladech stačí zvolit minimální útlum v nepropustném pásmu $A_{\min}$ pro kmitočet ω_2 . Minimální znamená, že skutečná hodnota útlumu v nepropustném pásmu může být i větší než je $A_{\min}$, aby filtr vyhověl požadavkům. Maximální znamená, že skutečná hodnota útlumu v propustném pásmu nesmí být větší než $A_{\max}$. U Butterworthových filtrů se určí řád filtru n ze vztahu

$$n \geq \frac{\lg x}{2 \lg \Omega_2} \quad \text{kde} \quad x = \frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1} \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} . \quad (244)$$

Pro Čebyševovy filtry se počítá řád filtru n ze vztahu

$$n \geq \frac{\operatorname{ar} \cosh \sqrt{x}}{\operatorname{ar} \cosh \Omega_2} \quad \text{kde} \quad x = \frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1} \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} . \quad (245)$$

V případě, že vyjde n desetinné číslo, zaokrouhlí se na nejbližší vyšší přirozené číslo. Po určení potřebného řádu filtru se zvolí zapojení a provede se výpočet skutečných hodnot prvků odnormováním podle konstant ω_0 a R_0 .

Kontrolu správnosti návrhu lze provést analýzou obvodu programem SNAP. Pro správnou činnost filtru jsou důležité oba zakončovací odpory. Útlum $A_{\min}$ je zde rozdíl základního útlumu pro nejnižší kmitočty a útlumu při zlomovém kmitočtu, protože SNAP počítá napěťový přenos od vstupních svorek, tedy včetně vnitřního odporu zdroje R_I (tedy ne od svorkového napětí zdroje) a proto základní útlum pro nulový kmitočet v programu SNAP je 6 dB. Při analýze obvodu s normovanými hodnotami je třeba si uvědomit, že v programu SNAP budou na ose kmitočtů jsou normované kmitočty tedy zlomový kmitočet $f_c = 1/(2\pi) = 0,159$ Hz.

Příklad 5.3.

Navrhněte dolní propust pro zlomový kmitočet $f_c = 10$ kHz a maximální útlum v propustném pásmu $A_{\min} = 3$ dB, se zakončovacími odpory $R = 1000 \Omega$. Minimální útlum v nepropustném pásmu $A_{\max} = 10$ dB na kmitočtu $f_2 = 14$ kHz.



Vypočítáme nejprve řád filtru. Je tedy $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi f_c = 6,28 \cdot 10^4$ rad/s, $\Omega_2 = 2\pi f_2/\omega_0 = 1,4$ rad/s a hodnota x je

$$x = \frac{10^1 - 1}{10^{0,3} - 1} = 9,0428 \quad \text{pro Butterworthův filtr je} \quad n \geq \frac{\lg 9,0428}{2 \lg 1,4} = 3,27 . \quad (246)$$

$$\text{pro Čebyševův filtr je } n \geq \frac{\operatorname{ar} \cosh \sqrt{9,0428}}{\operatorname{ar} \cosh 1,4} = 2,036 . \quad (247)$$

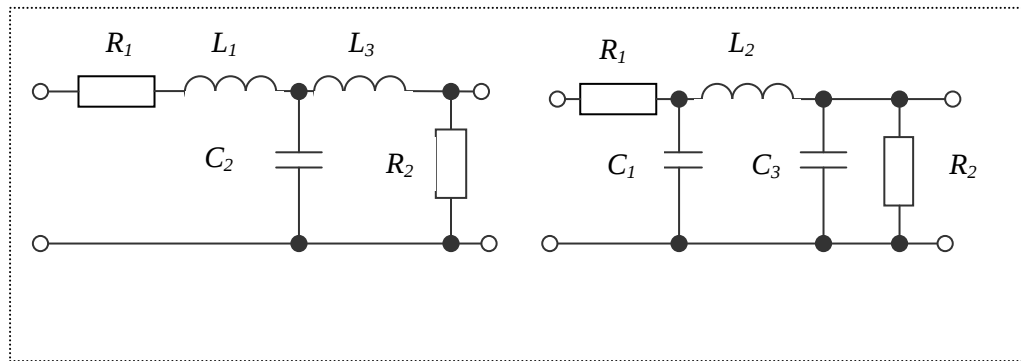
V případě Butterworthova filtru je potřebný řád $n = 4$, v případě Čebyševova filtru stačí řád $n = 3$. Použijeme tedy Čebyševův filtr. Konstanty pro odnormování jsou $R_0 = 10^3$ a $\omega_0 = 6,28 \cdot 10^4$. Pro strukturu T vyjdou skutečné hodnoty prvků

$$L_1 = L_3 = l_1 \frac{R_0}{\omega_0} = \frac{3,3487 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^4} = 53,3 \text{ mH} \quad C_2 = \frac{c_2}{\omega_0 R_0} = \frac{0,7117}{6,28 \cdot 10^4 \cdot 10^3} = 11,3 \text{ nF} . \quad (248)$$

Pro strukturu Π vyjdou hodnoty

$$C_1 = C_3 = \frac{c_1}{\omega_0 R_0} = \frac{3,3487}{6,28 \cdot 10^4 \cdot 10^3} = 53,3 \text{ nF} \quad L_2 = l_2 \frac{R_0}{\omega_0} = \frac{0,7117 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^4} = 11,3 \text{ mH} . \quad (249)$$

Zapojení filtru pro strukturu T a Π je na obrázku 70.



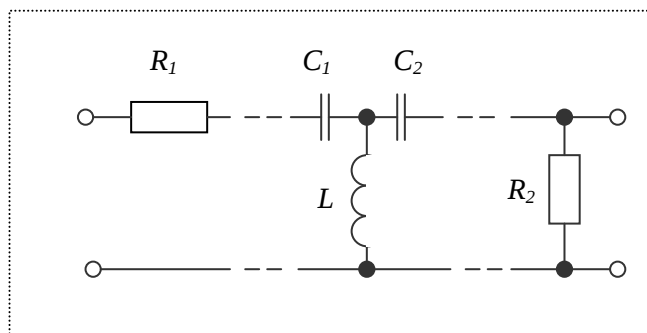
Obrázek 70: Výsledné struktury filtru

Filtry typu **horní propust**, **pásmová propust** a **pásmová zádrž** se navrhují z normované dolní propusti metodou kmitočtových transformací, což je popsáno například v [20], [23]. Požadované vlastnosti na daný filtr nejprve transformujeme na ekvivalentní normovanou dolní propust. Na ní se provede výpočet potřebného řádu filtru n , a po výběru vhodného zapojení normované dolní propusti se provede výpočet hodnot prvků požadovaného filtru. Touto metodou lze provádět návrhy filtrů jen útlumově souměrných tj. u propustí má útlum obou potlačených pásem tj. dolního i horního stejnou hodnotu (u zádrží jde o útlum propouštěných pásem).

Návrh horní propusti Vychází se z požadavků na horní propust. Je zadán útlum propustného pásma $A_{\max}$, a zlomový kmitočet ω_c . V nepropustném pásmu je zadán útlum $A_{\min}$ na kmitočtu ω_2 . Je třeba si uvědomit, že u horní propusti je $\omega_c > \omega_2$. Kmitočtovou transformaci na normovanou dolní propust provádíme dle vztahu

$$\Omega = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (250)$$

Dle [20], [23] zapojení horní propusti dostaneme z dolní propusti kmitočtovou transformací a to tak, že indukčnosti dolní propusti se transformují na kapacity horní propusti a kapacity dolní propusti se transformují na indukčnosti horní propusti viz obrázek 71.



Obrázek 71: Obecné zapojení horní propusti

Pro hodnoty stavebních prvků horní propusti platí

$$R = R_0 \cdot r \quad L = \frac{R_0}{\omega_0 c_{NDP}} \quad C = \frac{1}{\omega_0 R_0 l_{NDP}} , \quad (251)$$

kde index *NDP* znamená normovaná dolní propust, Pro konstanty transformace platí $\omega_0 = \omega_c$, R_0 je podle zakončovacích odporů.

Příklad 5.4.

Navrhněte filtr horní propust s Čebyševovou aproximací. Zlomový kmitočet je $f_c = 100$ Hz, útlum v propustném pásmu je $A_{\max} = 3$ dB, útlum v nepropustném pásmu $A_{\min} = 25$ dB na kmitočtu $f_2 = 50$ Hz. Filtr má pracovat se zakončovacími odpory R_1 a $R_2 = 5\,000\ \Omega$.



Transformace kmitočtů na normovanou dolní propust jsou

$$\Omega_1 = 1 \quad \Omega_2 = \frac{\omega_c}{\omega_2} = \frac{2\pi \cdot 100}{2\pi \cdot 50} = 2 . \quad (252)$$

Řád normované dolní propusti určíme ze vztahů

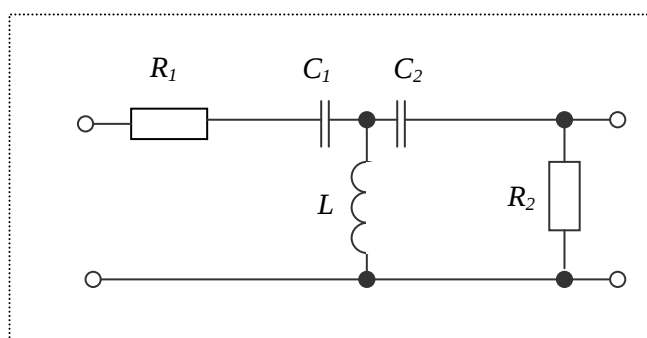
$$x = \frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1} = \frac{10^{\frac{25}{10}} - 1}{10^{\frac{3}{10}} - 1} = 316,7 \quad n \geq \frac{\operatorname{ar} \cosh \sqrt{x}}{\operatorname{ar} \cosh \Omega_2} = 2,712 \rightarrow n = 3 . \quad (253)$$

Volíme tedy filtr 3. řádu. Zvolíme strukturu T na obrázku 63 a odpovídající hodnoty v tabulce 6. Podle zadaných hodnot jsou konstanty transformace $R_0 = 5000$, $\omega_0 = 2\pi \cdot 100$ a bude tedy

$$R_1 = R_2 = 5000 \quad \Omega \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{200\pi \cdot 5000 \cdot 3,3487} = 9,5 \cdot 10^{-8} \quad \text{F} \quad (254)$$

$$L = \frac{5000}{200\pi \cdot 0,7117} = 11,18 \quad \text{H} .$$

Výsledné zapojení filtru je na obrázku 72.



Obrázek 72: Výsledné zapojení horní propusti

Návrh pásmové propusti Vychází se z požadavků na pásmovou propust. Je zadán útlum propustného pásma $A_{\max}$, dolní zlomový kmitočet ω_d a horní zlomový kmitočet ω_h propustného pásma. V nepropustném pásmu je zadán útlum horního nepropustného pásma $A_{\min}$ na kmitočtu ω_2 (nebo může být zadán útlum dolního nepropustného pásma $A_{\min}$ na kmitočtu ω_2). Je zadáno vždy jen jedno potlačené pásmo, protože kmitočty jsou vázány vztahem

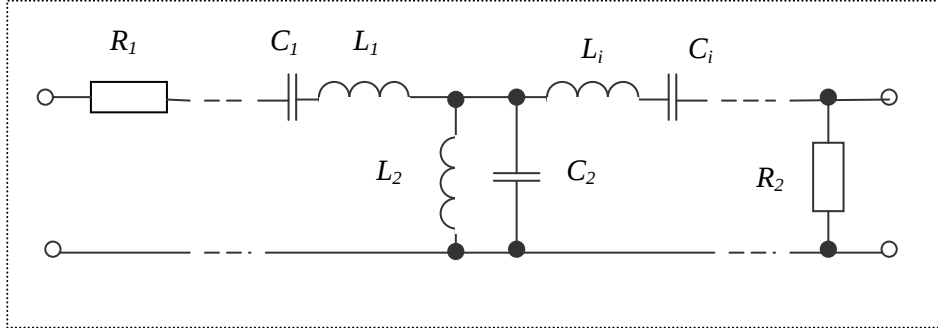
$$\omega_d \omega_h = \omega_{-2} \omega_2 = \omega_0^2 , \quad (255)$$

kde ω_0 je tzv. geometrický střed propustného pásma. Kmitočtovou transformaci na normovanou dolní propust provádíme dle vztahu

$$\Omega = \frac{1}{\Delta\omega} \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) \quad \text{kde} \quad \Delta\omega = \omega_h - \omega_d , \quad (256)$$

$\Delta\omega$ je šířka propustného pásma pásmové propusti. Podle vztahu kmitočtové transformace se kmitočet ω_0 mění na 0, ω_h mění na Ω_1 a kmitočet ω_2 na Ω_2 normované dolní propusti. Dle [20], [23] zapojení

pásmové propusti dostaneme z dolní propusti kmitočtovou transformací tak, že indukčnosti dolní propusti se transformují na sériový rezonanční obvod pásmové propusti a kapacity dolní propusti se transformují na paralelní rezonanční obvod pásmové propusti viz obrázek 73.



Obrázek 73: Obecné zapojení pásmové propusti

Pro hodnoty stavebních prvků pásmové propusti platí

$$L_1 = \frac{R_0}{\Delta\omega} l_{NDP} \quad C_1 = \frac{\Delta\omega}{R_0 \omega_0^2 l_{NDP}} \quad C_2 = \frac{c_{NDP}}{R_0 \Delta\omega} \quad L_2 = \frac{R_0 \Delta\omega}{\omega_0^2 c_{NDP}} \quad R = R_0 r \quad . \quad (257)$$

Rezonanční obvody $L_1 C_1$ a $L_2 C_2$ jsou naladěny na stejný rezonanční kmitočet ω_0 .

Příklad 5.5.

Navrhněte pásmovou propust s Butterworthovou aproximací. Propustné pásmo je $f_d = 500$ kHz až $f_h = 1500$ kHz s útlumem $A_{max} = 3$ dB, v nepropustném pásmu má být na kmitočtu dolního potlačeného pásma $f_{-2} = 400$ kHz útlum $A_{min} = 20$ dB. Zakončovací odpory filtru jsou $R_1 = R_2 = 1000 \Omega$.



Vypočítáme kmitočty normované dolní propusti.

$$\Delta\omega = 2\pi(1,5 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^5) = 6,28 \cdot 10^6 \quad \omega_0^2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 = 2,96 \cdot 10^{13} \quad (258)$$

$$\Omega_{-2} = \frac{1}{6,28 \cdot 10^6} \left(2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^5 - \frac{2,96 \cdot 10^{13}}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^5} \right) = -1,475 \quad \Omega_2 = -\Omega_{-2} = 1,475 \quad .$$

Normované kmitočty pro $\omega < \omega_0$ vycházejí až na znaménko číselně stejně jako odpovídající normované kmitočty pro $\omega > \omega_0$. Pak vyjde řád filtru normované dolní propusti

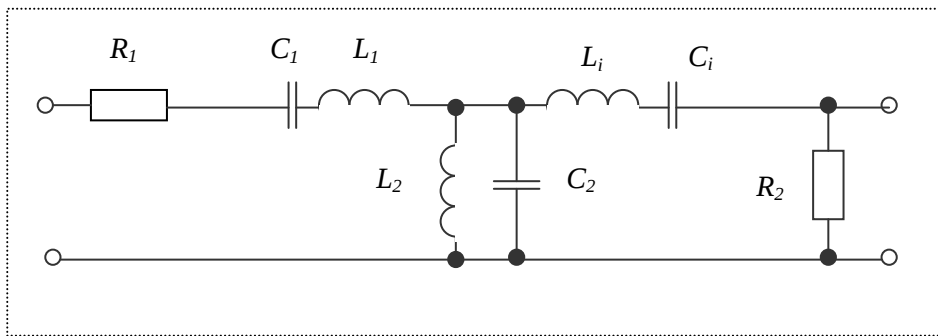
$$x = \frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1} = \frac{10^1 - 1}{10^{0,3} - 1} = 9,043 \quad n \geq \frac{\lg 9,043}{2 \lg 1,475} = 2,833 \rightarrow n = 3 \quad . \quad (259)$$

Volíme tedy řád normované dolní propusti 3. Zvolíme T strukturu 3. řádu na obrázku 63 a odpovídající hodnoty v tabulce 5. Vypočítáme hodnoty prvků pásmové propusti

$$L_1 = \frac{10^3 \cdot 1}{6,28 \cdot 10^3} = 1,59 \cdot 10^{-4} \text{ H} \quad C_1 = \frac{6,28 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 2,96 \cdot 10^{13} \cdot 1} = 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ F} \quad (260)$$

$$C_2 = \frac{2}{10^3 \cdot 6,28 \cdot 10^6} = 3,18 \cdot 10^{-10} \text{ F} \quad L_2 = \frac{10^3 \cdot 6,28 \cdot 10^6}{2,96 \cdot 10^{13} \cdot 2} = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ H} \quad .$$

$R_1 = R_2 = 1000 \Omega$. Zapojení této pásmové propusti je na obrázku 74.



Obrázek 74: Výsledné zapojení pásmové propusti

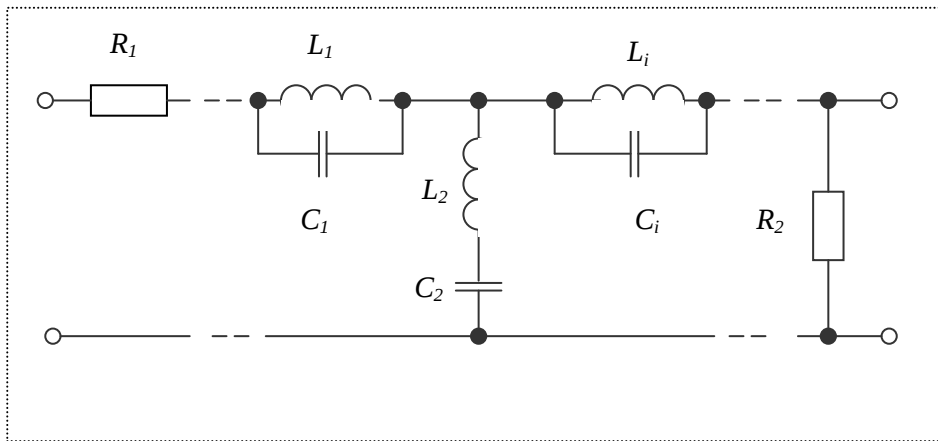
Návrh pásmové zádrže Vychází se z požadavků na pásmovou zádrž. Je zadán útlum propustného pásma $A_{\max}$, a zlomový kmitočet ω_d dolního propustného pásma a zlomový kmitočet ω_h horního propustného pásma. V nepropustném pásmu (tedy mezi kmitočty ω_d až ω_h) je zadán útlum nepropustného pásma $A_{\min}$ na kmitočtu $\omega_2 > \omega_0$ (nebo může být zadán útlum nepropustného pásma $A_{\min}$ na kmitočtu $\omega_2 < \omega_0$). Je zadáno vždy jen jeden kmitočet potlačeného pásma, protože kmitočty jsou vázány vztahem

$$\omega_d \omega_h = \omega_{-2} \omega_2 = \omega_0^2 \quad (261)$$

kde ω_0 je tzv. geometrický střed nepropustného pásma. Kmitočtovou transformací na normovanou dolní propust provádíme dle vztahu

$$\Omega = \frac{1}{\frac{1}{\Delta\omega} \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)} \quad \text{kde} \quad \Delta\omega = \omega_h - \omega_d, \quad (262)$$

$\Delta\omega$ je šířka nepropustného pásma pásmové zadržky. Podle vztahu kmitočtové transformace se kmitočet ω_0 mění na 0, ω_h mění na Ω_1 a kmitočet ω_d na Ω_2 normované dolní propusti. Dle [20], [23] zapojení pásmové zadržky dostaneme z dolní propusti kmitočtovou transformací tak, že indukčnosti dolní propusti se transformují na paralelní rezonanční obvod pásmové zadržky a kapacity dolní propusti se transformují na sériový rezonanční obvod pásmové zadržky viz obrázek 75.



Obrázek 75: Obecné zapojení pásmové zadržky

Pro hodnoty stavebních prvků pásmové zadržky platí

$$L_1 = \frac{R_0 \Delta\omega_{NDP}}{\omega_0^2} \quad C_1 = \frac{1}{R_0 \Delta\omega_{NDP}} \quad L_2 = \frac{R_0}{\Delta\omega_{NDP}} \quad C_2 = \frac{\Delta\omega_{NDP}}{R_0 \omega_0^2} \quad R = R_0 r. \quad (263)$$

Rezananční obvody $L_1 C_1$ a $L_2 C_2$ jsou naladěny na stejný rezonanční kmitočet ω_0 .

Příklad 5.5.

Navrhněte pásmovou zadržku II s Butterworthovou aproximací. Propustné pásmo je $f_d = 20$ kHz až $f_h = 50$ kHz s útlumem $A_{max} = 3$ dB, v nepropustném pásmu má být na kmitočtu horního potlačeného pásma $f_2 = 40$ kHz útlum $A_{min} = 15$ dB. Zakončovací odpory filtru jsou $R_1 = R_2 = 1000 \Omega$.

♦

Vypočítáme nejdříve kmitočty: $\Delta\omega = 1,885 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ $\omega_0^2 = 3,948 \cdot 10^{10} (\text{rad/s})^2$

Pak vypočítáme kmitočty normované dolní propusti: $\Omega_1 = \Omega_h = 1$ $\Omega_2 = 2$

Vypočítáme řád normované dolní propusti

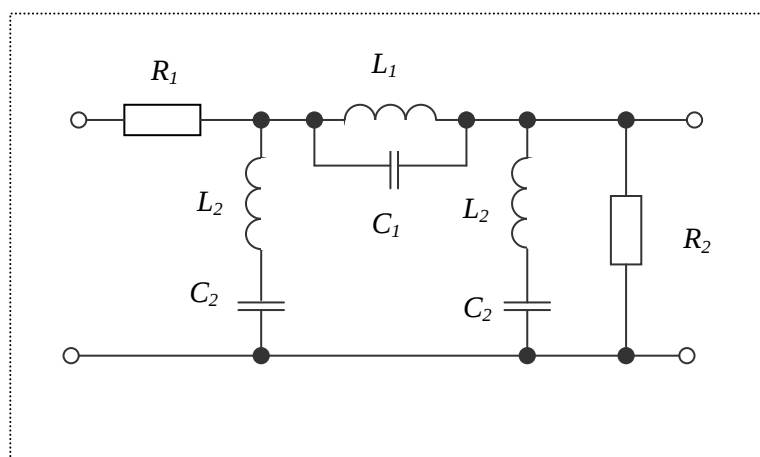
$$x = \frac{10^{1,5} - 1}{10^{0,3} - 1} = 30,77 \quad n = \frac{\lg x}{2 \lg \Omega_2} = 2,47 \quad \text{volíme } n = 3 \quad . \quad (264)$$

Vybereme dle zadání strukturu Π obrázek 64 a hodnoty z tabulky 5. Odnormované hodnoty stavebních prvků budou:

$$L_1 = \frac{10^3 \cdot 1,885 \cdot 10^5 \cdot 2}{3,948 \cdot 10^{10}} = 9,54 \text{ mH} \quad C_1 = \frac{1}{10^3 \cdot 1,885 \cdot 10^5 \cdot 2} = 2,65 \text{ nF}$$

$$L_2 = \frac{10^3}{1,885 \cdot 10^5 \cdot 1} = 5,31 \text{ mH} \quad C_2 = \frac{1,885 \cdot 10^5 \cdot 1}{10^3 \cdot 3,948 \cdot 10^{10}} = 4,77 \text{ nF} \quad . \quad (265)$$

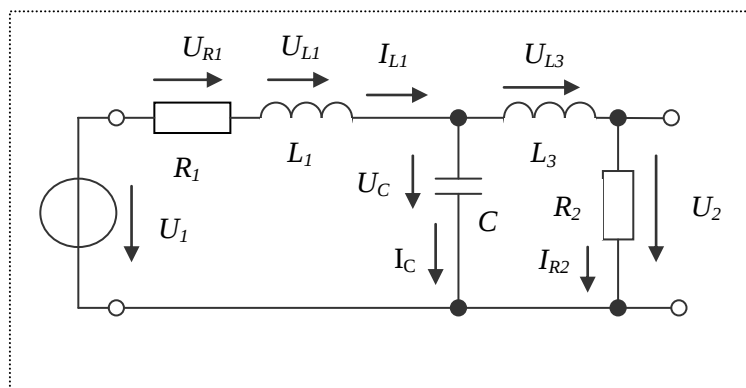
$R_1 = R_2 = 1000 \Omega$. Zapojení pásmové zadržky je na obrázku 76.



Obrázek 76: Zapojení pásmové zadržky

□ Výpočet napět'ového přenosu u příčkových struktur.

Zde je uvedena metoda, která umožní efektivně počítat napět'ové přenosy u příčkových struktur, jen se znalostí základních zákonů. Pro větší názornost postupu u této metody si můžete pustit [animaci č. 6](#) z příloženého CD. Princip metody si ukážeme na filtru na obrázku 72. Cílem je vypočítat napět'ový přenos $K = U_2/U_1$. Na vstupu filtru působí zdroj U_1 . Při výpočtu postupujeme od výstupu U_2 směrem ke vstupu tj. až po U_1 . Výpočty jsou zaměřeny tak, aby ve výrazech vystupovaly jen dvě obvodové veličiny U_2 a U_1 . Na obrázku 77 jsou označeny všechny obvodové veličiny potřebné pro výpočet.



Obrázek 77: Výpočet napět'ového přenosu

Proud protékající odporem R_2 se rovná

$$I_{R_2} = \frac{U_2}{R_2} . \quad (266)$$

Proud protékající indukčností L_3 je stejný jako I_{R_2} , protože z výstupních svorek žádný proud nevytéká. Proto napětí na L_3 bude

$$U_{L_3} = pL_3 I_{R_2} = \frac{pL_3}{R_2} U_2 . \quad (267)$$

Napětí na kapacitě C je rovno součtu napětí na L_3 a výstupnímu napětí U_2 a bude tedy

$$U_C = U_{L_3} + U_2 = \frac{pL_3}{R_2} U_2 + U_2 . \quad (268)$$

Proud protékající kapacitou C bude tedy

$$I_C = pCU_C = pC \left(\frac{pL_3}{R_2} + 1 \right) U_2 . \quad (269)$$

Proud protékající indukčností L_1 je roven součtu proudů kapacitou C a indukčností L_3 platí tedy

$$I_{L_1} = I_C + I_{R_2} = pC \left(\frac{pL_3}{R_2} + 1 \right) U_2 + \frac{U_2}{R_2} \quad (270)$$

Napětí zdroje U_1 je rovno součtu napětí na odporu R_1 napětí na indukčnosti L_1 a napětí na kapacitě C . Bude tedy

$$U_1 = U_{R_1} + U_{L_1} + U_C = (R_1 + pL_1)I_{R_1} + \frac{pL_3}{R_2}U_2 + U_2 =$$

$$(R_1 + pL_1) \left[pC \left(\frac{pL_3}{R_2} + 1 \right) U_2 + \frac{U_2}{R_2} \right] + \frac{pL_3}{R_2}U_2 + U_2 =$$

$$U_2 \left\{ (R_1 + pL_1) \left[pC \left(\frac{pL_3}{R_2} + 1 \right) + \frac{1}{R_2} \right] + \frac{pL_3}{R_2} + 1 \right\} . \quad (271)$$

Po roznásobení a převedení na společného jmenovatele lze získat vztah

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{p^3 L_1 L_2 C + p^2 (L_2 R_1 C + L_1 R_2 C) + p(R_1 R_2 C + L_1 + L_2) + R_1 + R_2} . \quad (272)$$

□ Příklady na porovnání citlivostí různých obvodových struktur.

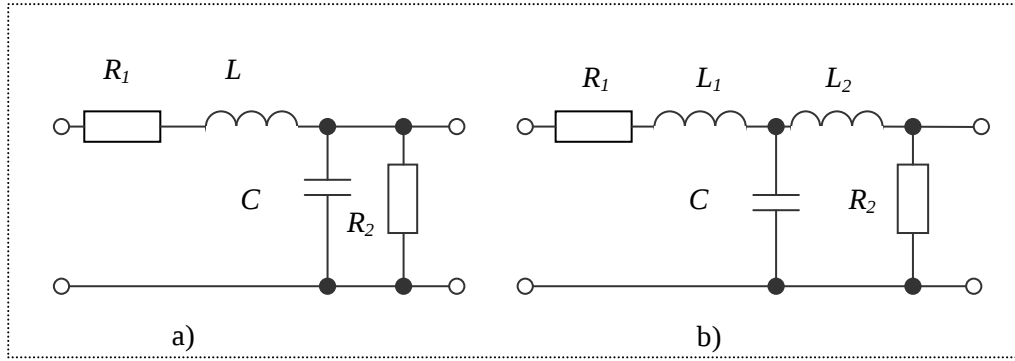
Příklad 5.6.

S rostoucím řádem filtru n roste citlivost přenosové funkce filtru na změny hodnot stavebních prvků. Dokážeme tento fakt na normované dolní propusti pro strukturu T druhého a třetího řádu Butterworthovy aproximace pro normovaný zlomový kmitočet.



Pro obě struktury vypočteme hodnoty relativních citlivostních koeficientů napětového přenosu K při kmitočtu $\Omega_c = 1$. Protože se zajímáme o citlivost modulu a fáze napětového přenosu, vypočteme veličinu L jako součet kvadrátů reálných částí citlivostních koeficientů (pro citlivost modulu) a jako součet kvadrátů imaginárních částí citlivostních koeficientů (citlivost fáze) a porovnáme tyto hodnoty u obou struktur. Na obrázku 78 a) je struktura T druhého řádu. Pro napětový přenos K platí

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{p^2 L C R_2 + p(C R_1 R_2 + L) + R_1 + R_2} = \frac{P}{Q} . \quad (273)$$



Obrázek 78: Porovnání citlivostí filtrů různých řádů

Relativní citlivostní koeficienty vyjdou

$$S_{R_1}^K = -R_1 \frac{p C R_2 + 1}{Q} \quad S_{R_2}^K = R_2 \left(\frac{1}{P} - \frac{p^2 L C + p C R_1 + 1}{Q} \right) , \quad (274)$$

$$S_L^K = -L \frac{p^2 C R_2 + p}{Q} \quad S_C^K = -C \frac{p^2 L R_2 + p R_1 R_2}{Q} . \quad (275)$$

Hodnoty citlivostí při kmitočtu $p = j$ a pro hodnoty $R_1 = R_2 = 1$, $L = C = 2^{1/2} \approx 1,414$ dle tabulky 5 budou

$$S_{R_1}^K = -\frac{1}{2} + j \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad S_{R_2}^K = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad S_C^K = S_L^K = -\frac{1}{2} - j \frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (276)$$

Kritéria L budou

$$L_{1a} = \sum_{i=1}^4 (\operatorname{Re} S_{x_i}^K)^2 = 1 \quad L_{2a} = \sum_{i=1}^4 (\operatorname{Im} S_{x_i}^K) = 1,25 . \quad (277)$$

Pro strukturu filtru třetího řádu na obrázku 78 b) je napěťový přenos

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{p^3 L_1 L_2 C + p^2 (C R_1 L_2 + L_1 R_2 C) + p (L_1 + L_2 + C R_1 R_2) + R_1 + R_2} = \frac{P}{Q} \quad . \quad (278)$$

Relativní citlivostní koeficient budou

$$S_{R_1}^K = -R_1 \frac{p^2 C L_2 + p C R_2 + 1}{Q} \quad S_{R_2}^K = R_2 \left(\frac{1}{P} - \frac{p^2 L_1 C + p C R_1 + 1}{Q} \right)$$

$$S_{L_1}^K = -L_1 \frac{p^3 C L_2 + p^2 C R_2 + p}{Q} \quad S_{L_2}^K = -L_2 \frac{p^3 L_1 C + p^2 C R_1 + p}{Q} \quad (279)$$

$$S_C^K = -C \frac{p^3 L_1 L_2 + p^2 (L_2 R_1 + L_1 R_2) + p R_1 R_2}{Q} \quad .$$

Hodnoty citlivostí při kmitočtu $p = j$ a pro hodnoty $R_1 = R_2 = 1$, $L_1 = L_2 = 1$, $C = 2$ dle tabulky 5 budou

$$S_{R_1}^K = -\frac{3}{4} + j\frac{1}{4} \quad S_{R_2}^K = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4} \quad S_{L_1}^K = S_{L_2}^K = -\frac{1}{4} - j\frac{3}{4} \quad S_C^K = -1 - j \quad . \quad (280)$$

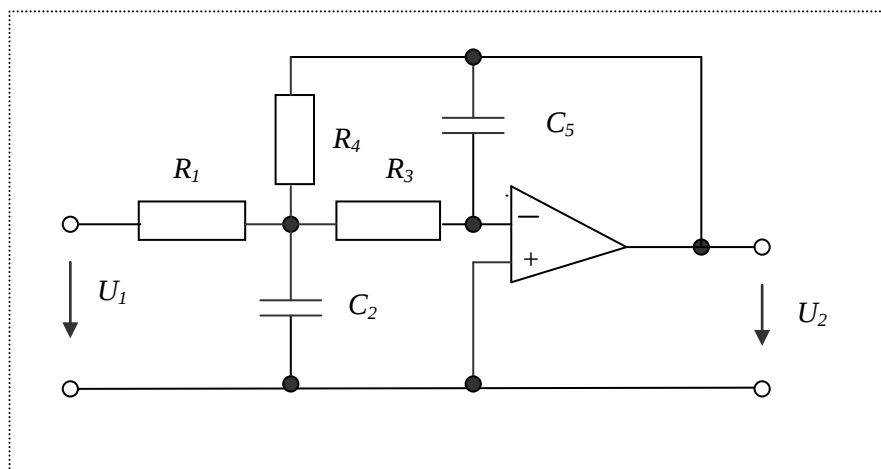
Kritéria L budou

$$L_{1b} = \sum_{i=1}^5 \left(\operatorname{Re} S_{x_i}^K \right)^2 = 1,75 \quad L_{2b} = \sum_{i=1}^5 \left(\operatorname{Im} S_{x_i}^K \right)^2 = 2,25 \quad . \quad (281)$$

Protože je $L_{1a} < L_{1b}$ je struktura filtru třetího řádu citlivější pro modul napětového přenosu než struktura filtru druhého řádu. Protože je $L_{2a} < L_{2b}$ je struktura filtru řádu citlivější pro fázi napětového přenosu než struktura filtru druhého řádu. Tedy struktura filtru třetího řádu je celkově citlivější na změny hodnot stavebních prvků pro napětový přenos, než struktura filtru druhého řádu.

Příklad 5.7.

Určete, které zapojení aktivních filtrů druhého řádu je výhodnější z hlediska změn hodnot stavebních prvků na napěťový přenos. Porovnejte Delyiannisovu-Friendovu a Sallenovu-Keyovu strukturu dolní propusti při zlomovém kmitočtu pro Butterworthovu aproximaci.



Obrázek 79: Dolní propust Delyiannis-Friend

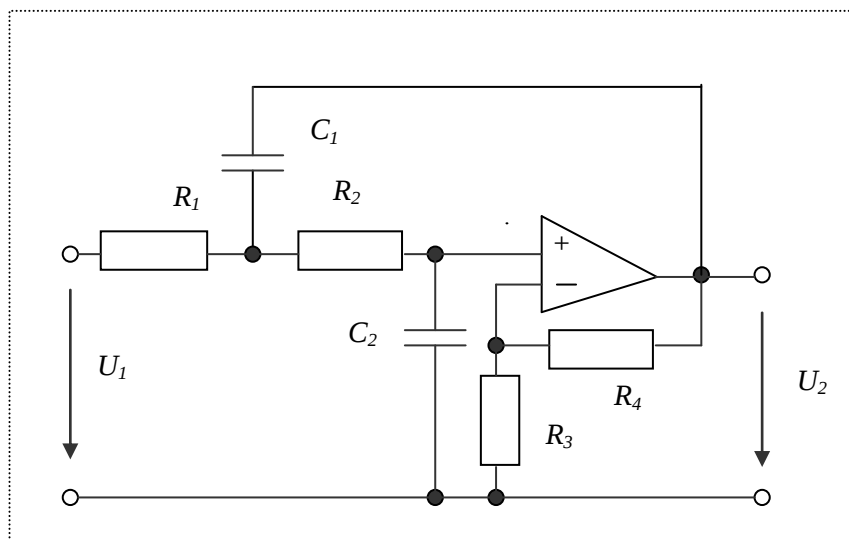
Návrhové vztahy pro obvod na obrázku 79.

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2}(K+1)C_5 \quad R_1 = \frac{\alpha}{2K\omega_c C_5} \quad R_3 = \frac{\alpha}{2(K+1)\omega_c C_5} \quad (282)$$

$$R_4 = \frac{\alpha}{2\omega_c C_5} \quad K = \frac{R_4}{R_1} \quad .$$

Při návrhu se volí hodnota C_5 , K a ω_c . Hodnota α je pro Butterworthovu aproximaci rovna

$$\alpha = \sqrt{2} \quad . \quad (283)$$



Obrázek 80: Dolní propust Sallen-Key

Návrhové vztahy pro obvod na obrázku 80.

$$R = R_1 = R_2 \quad C = C_1 = C_2 \quad K = 1 + \frac{R_4}{R_3} = 3 - \alpha \quad \omega_c = \frac{k}{RC} \quad . \quad (284)$$

Pro Butterworthovu aproximaci se používá

$$k = 1 \quad \alpha = \sqrt{2} \quad . \quad (285)$$

Při návrhu je třeba zvolit R nebo C a R_3 nebo R_4 a ω_c .



Nejprve vypočteme hodnoty relativních citlivostí napěťového přenosu K pro Delyiannisovu-Friendovu strukturu. Napěťový přenos lze odvodit například dle metodiky popsané v [22].

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-R_4}{p^2 R_1 R_3 R_4 C_2 C_5 + p C_5 (R_3 R_4 + R_1 R_4 + R_1 R_3) + R_1} = \frac{P}{Q} \quad . \quad (286)$$

Koeficienty relativních citlivostí budou

$$S_{R_1}^K = -R_1 \frac{p^2 R_3 R_4 C_2 C_5 + p C_5 (R_4 + R_3) + 1}{Q} \quad S_{R_3}^K = -R_3 \frac{p^2 R_1 R_4 C_2 C_5 + p C_5 (R_4 + R_1)}{Q}$$

$$\begin{aligned}
S_{R_4}^K &= R_4 \left(\frac{-1}{P} - \frac{p^2 R_1 R_3 C_2 C_5 + p C_5 (R_3 + R_4)}{Q} \right) & S_{C_2}^K &= -C_2 \frac{p^2 R_1 R_3 R_4 C_5}{Q} \\
S_{C_5}^K &= -C_5 \frac{p^2 R_1 R_3 R_4 C_2 + p (R_3 R_4 + R_1 R_4 + R_1 R_3)}{Q} .
\end{aligned} \tag{287}$$

Pro snazší výpočty zvolíme normované hodnoty prvků, tedy volíme zlomový kmitočet $\omega_c = 1$, kapacitu $C_5 = 1$ a aby bylo možno porovnat obě struktury tak zesílení K volíme stejné jako u struktury Sallen-Key tj. $K = 3 - \alpha$. Vyjdou tyto hodnoty stavebních prvků

$$\begin{aligned}
C_2 &= 2(4 - \sqrt{2}) \approx 5,171 & R_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2(3 - \sqrt{2})} \approx 0,446 \\
R_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2(4 - \sqrt{2})} \approx 0,273 & R_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} .
\end{aligned} \tag{288}$$

pro kmitočet $p = j$ vyjdou hodnoty citlivostních koeficientů

$$\begin{aligned}
S_{R_1}^K &= -0,693 + j4,21 \cdot 10^{-4} & S_{R_3}^K &= -0,498 - j0,707 & S_{R_4}^K &= -0,098 - j0,707 \\
S_{C_2}^K &= 5 \cdot 10^{-3} - j0,7 & S_{C_5}^K &= -1 - j0,138 .
\end{aligned} \tag{289}$$

Provedeme výpočet kritéria L

$$L_{1a} = \sum_{i=1}^5 (\operatorname{Re} S_{x_i}^K)^2 = 1,665 \quad L_{2a} = \sum_{i=1}^5 (\operatorname{Im} S_{x_i}^K)^2 = 1,51 . \tag{290}$$

Nyní vypočteme hodnoty relativních citlivostí napěťového přenosu K pro Sallenovu-Keyovu strukturu. Napěťový přenos lze odvodit například dle metodiky popsané v [22].

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_3 + R_4}{p^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 + p(C_2 R_2 R_3 + C_2 R_1 R_3 - R_1 R_4 C_1) + R_3} = \frac{P}{Q} \quad (291)$$

Relativní citlivosti vyjdou

$$\begin{aligned} S_{R_1}^K &= -R_1 \frac{p^2 R_2 R_3 C_1 C_2 + p(C_2 R_3 - C_1 R_4)}{Q} & S_{R_2}^K &= -R_2 \frac{p^2 R_1 R_3 C_1 C_2 + p C_2 R_3}{Q} \\ S_{R_3}^K &= R_3 \left(\frac{1}{P} - \frac{p^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + p C_2 (R_1 + R_2) + 1}{Q} \right) & S_{R_4}^K &= R_4 \left(\frac{1}{P} + \frac{p C_1 R_1}{Q} \right) \\ S_{C_1}^K &= -C_1 \frac{p^2 R_1 R_2 R_3 C_2 + p(-R_1 R_4)}{Q} & S_{C_2}^K &= -C_2 \frac{p^2 R_1 R_2 R_3 C_1 + p(R_2 R_3 + R_1 R_3)}{Q} \end{aligned} \quad (292)$$

Normované hodnoty stavebních prvků vyjdou pro $\omega_c = 1$, $R_1 = 1$, $R_3 = 1$

$$R_1 = R_2 = 1 \quad C_1 = C_2 = 1 \quad R_3 = 1 \quad R_4 = 2 - \sqrt{2} \quad (293)$$

Pro kmitočet $p = j$ vyjdou číselné hodnoty relativních citlivostí

$$\begin{aligned} S_{R_1}^K &= -0,298 - j0,707 & S_{R_2}^K &= -0,707 - j0,707 & S_{R_3}^K &= -0,783 \\ S_{R_4}^K &= 0,783 & S_{C_1}^K &= 0,414 - j0,707 & S_{C_2}^K &= -1,414 + j0,707 \end{aligned} \quad (294)$$

Vypočítáme hodnoty kritéria L

$$L_{1b} = \sum_{i=1}^6 (\operatorname{Re} S_{x_i}^K)^2 = 3,98 \quad L_{2b} = \sum_{i=1}^6 (\operatorname{Im} S_{x_i}^K)^2 = 1,99 \quad (295)$$

Porovnáme-li hodnoty kritéria L platí, že $L_{1a} < L_{1b}$ a $L_{2a} < L_{2b}$ a tedy v případě dolní propusti má Delyiannisova – Friendova struktura menší citlivost napěťového přenosu na změny hodnot stavebních prvků než Sallenova – Keyova struktura. Z tohoto hlediska se jeví tedy Delyiannisova - Friendova struktura výhodnější.

□ Některé možnosti realizace aktivních filtrů.

U filtrů na nízkých kmitočtech vycházejí mnohdy velké hodnoty indukčností, což je poněkud nepraktické (vede na velké rozměry filtru, případně praktickou nemožnost realizace). Nabízí se možnost realizace takových filtrů třeba strukturou Deliyannisovou - Friendovou, Sallenovou - Keyovou, nebo obecným impedančním konvertorem (GIC) jehož autorem je A. Antoniou a jeho vlastnosti jsou odvozeny v [23]. Obecný impedanční konvertor může sloužit jako syntetická indukčnost, nebo jako dvojná kapacita D (v anglické literatuře se označuje jako kmitočtově závislý záporný odpor zkratkou FDNR). Metodika návrhu filtrů s užitím GIC včetně Brutonovy transformace je popsána v literatuře [20] případně [16]. V dalším příkladu si ukážeme využití programu SNAP při analýze filtru s obecným impedančním konvertorem.

Příklad 5.8.

Navrhněte filtr dolní propust třetího řádu s Čebyševovou aproximací se zlomovým kmitočtem $f_c = 100$ Hz a zakončovacími odpory $R_1 = R_2 = 5\,000\ \Omega$. Při návrhu využijte realizaci prvků filtru pomocí GIC. Přenosové charakteristiky navrženého filtru zkontrolujte s užitím programu SNAP. Zobraďte kmitočtové závislosti reálné a imaginární části relativní citlivosti napětového přenosu pro kapacitu C_4 a pomocí kurzorů zjistěte hodnoty citlivosti při kmitočtu 100 Hz.

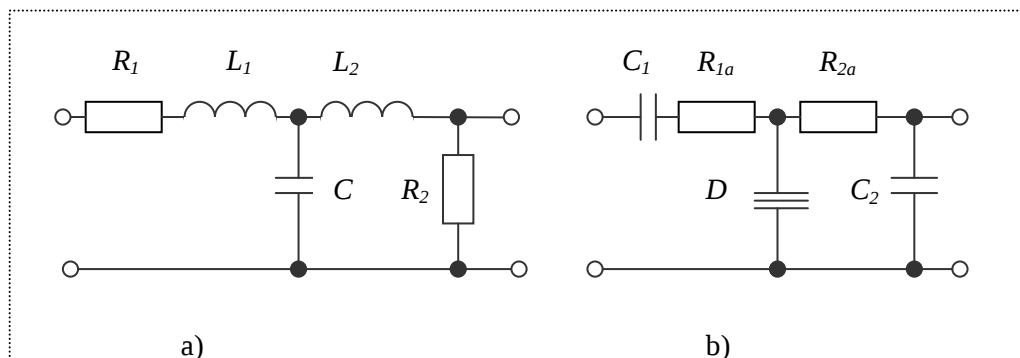


Pro návrh filtru použijeme dle obrázku 68 strukturu T, protože bude výhodná z hlediska pozdější Brutonovy transformace, a hodnoty z tabulky 6 pro $n = 3$. Dle vztahů pro odnormování dostaneme hodnoty stavebních prvků pro normalizační konstanty $R_0 = 5\,000$, $\omega_0 = 200\pi$. Vyjdou hodnoty

$$R_1 = R_2 = 5\text{ k}\Omega \quad L_1 = L_2 = 26,648\text{ H} \quad C = 2,265 \cdot 10^{-7}\text{ F} \quad . \quad (296)$$

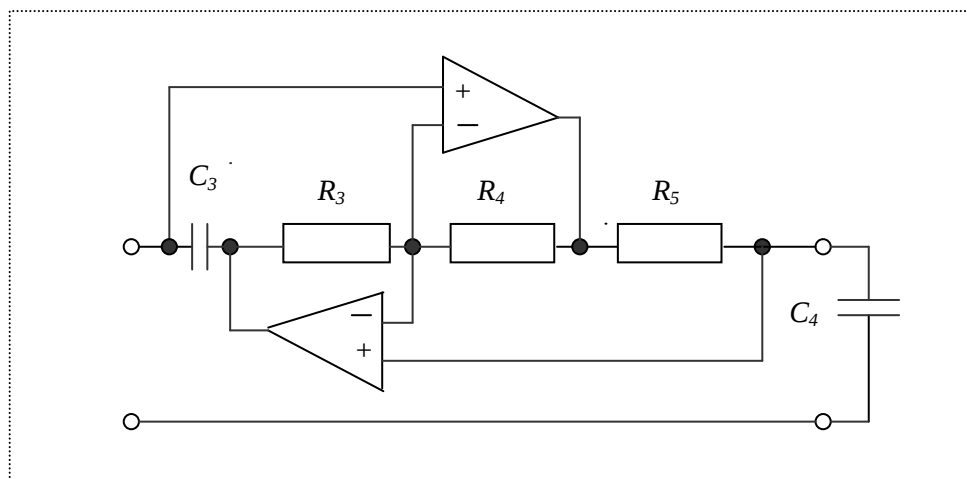
Pro realizaci filtru použijeme Brutonovu transformaci, která spočívá v tom, že impedanci každého prvku původního schématu na obr. 81 a) dělíme komplexním kmitočtem p a tedy Odpory R_1 a R_2 se transformují na kapacity C_1 a C_2 , indukčnosti L_1 a L_2 se transformují na odpory R_{1a} a R_{2a} a kapacita C se transformuje na dvojnou kapacitu D . Formálně dostaneme číselné hodnoty prvků nového schématu na obr. 81 b) dle vztahů

$$\frac{1}{R_1} \rightarrow C_1 = \frac{1}{5000} = 2 \cdot 10^{-4}\text{ F} \quad L_1 \rightarrow R_{1a} = 26,648\ \Omega \quad C \rightarrow D = 2,265 \cdot 10^{-7}\text{ s}^2 \cdot \text{S}$$
$$C_1 = C_2 \quad R_{1a} = R_{2a} \quad . \quad (297)$$



Obrázek 81: Návrh filtru a jeho Brutonova transformace

Programem SNAP můžeme zkontrolovat kmitočtovou charakteristiku napěťového přenosu K . Ve schématickém editoru SNAPu se dvojná kapacita zadává jako FDNR. Dvojnou kapacitu lze realizovat zapojením na obrázku 82 pomocí operačních zesilovačů.



Obrázek 82: Realizace dvojné kapacity

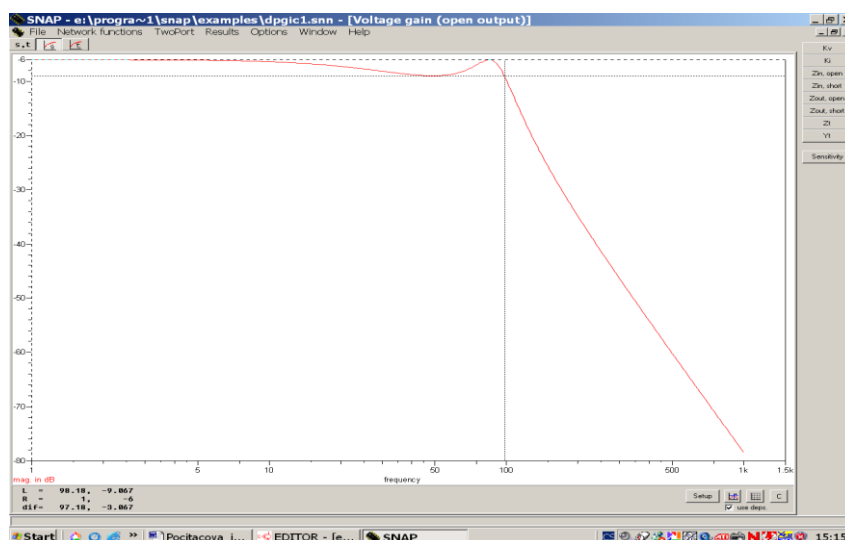
Dle literatury [23] platí pro hodnotu dvojné kapacity D vztah

$$D = \frac{C_3 C_4 R_3 R_5}{R_4} \quad . \quad (298)$$

Pro požadovanou hodnotu $D = 2,265 \cdot 10^{-7} \text{ s}^2 \cdot \text{S}$ a zvolené hodnoty $C_3 = C_4 = 100 \text{ nF}$, $R_3 = R_5 = 1 \text{ M}\Omega$ dostaneme dle uvedeného vztahu potřebnou hodnotu $R_4 = 44 \text{ k}\Omega$.

Při praktické realizaci se doporučuje dle [18] pro zajištění potřebného stejnosměrného režimu vstupů operačních zesilovačů přemostit paralelně kapacity C_1 a C_2 na obrázku 81 b) paralelně odpory o velké hodnotě například $1\text{ M}\Omega$ (odpory zde představují indukčnosti a velkou hodnotu mají proto, aby neovlivnily významně kmitočtovou charakteristiku přenosu).

Ve schématickém editoru SNAPu nakreslíme nejprve dvojnou kapacitu dle obrázku 82 a schéma pak doplníme na filtr dle obrázku 81 b). Po zadání numerických hodnot necháme spočítat a vykreslit kmitočtovou závislost modulu napětového přenosu. Pomocí kurzorů (levé a pravé tlačítko myši) odečteme z grafu pokles přenosu na zlomovém kmitočtu (při 100 Hz by měl být 3 dB) viz obr. 83.

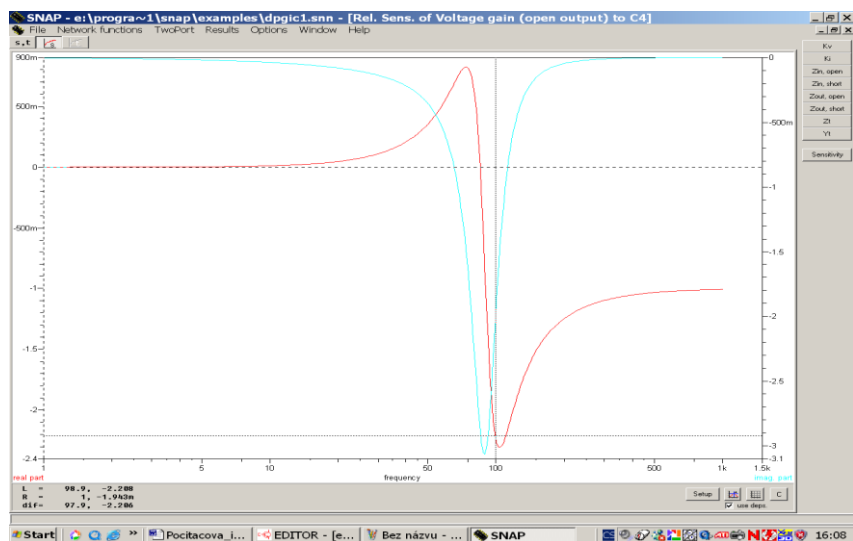


Obrázek 83: Přenosová charakteristika filtru s GIC

Využitím nabídky Sensitivity zobrazíme výběrem prvku C_4 a výběrem systémové funkce (napětový přenos) kmitočtové závislosti relativních citlivostí všech prvků schématu (v grafu vybíráme současné zobrazení reálné a imaginární části citlivosti jako Y_1 a Y_2 přes nabídku Setup). Na obrázku 84 jsou kmitočtové závislosti reálné a imaginární části relativní citlivosti pro C_4 . Odečtením hodnot z grafu pomocí levého kurzoru dostaneme na kmitočtu $f = 100\text{ Hz}$ hodnoty

$$\operatorname{Re} S_{C_4}^K = -2,2 \quad \operatorname{Im} S_{C_4}^K = -2,061 \quad . \quad (299)$$

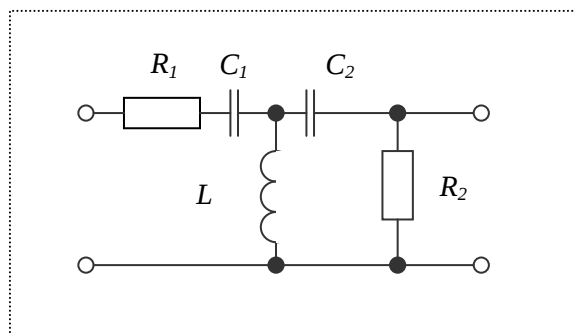
Poznámka: Kurzor se pohybuje po křivce, která je zadána jako Y_1 v nabídce Setup. Proto je dobré nastavit jako Y_1 jednou reálnou a podruhé imaginární část. Číselné hodnoty se zobrazí na obrazovce (obr. 84) vlevo dole L (levý kurzor) R (pravý kurzor) diff (rozdíl mezi kurzory).



Obrázek 84: Kmitočtová závislost reálné a imaginární části citlivosti přenosu K

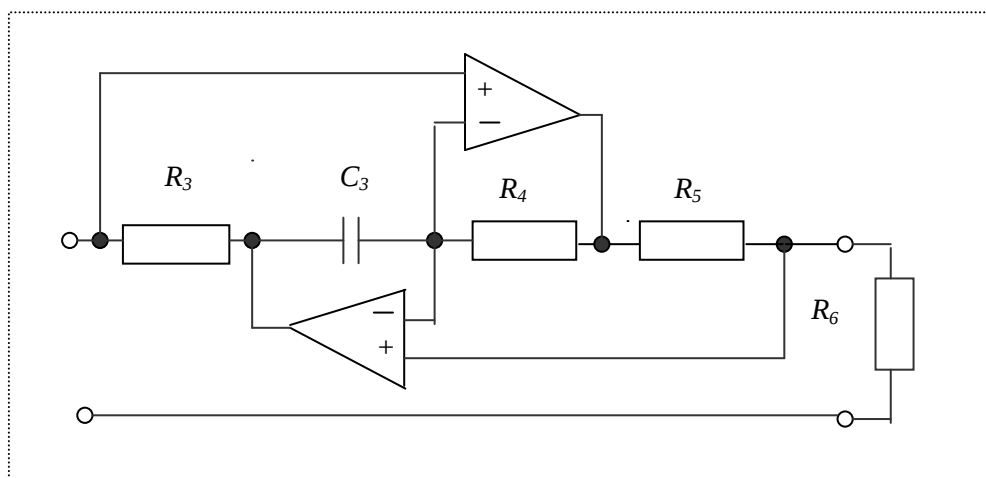
Příklad 5.9.

Na obrázku 85 je filtr horní propust třetího řádu s Čebyševovou aproximací se zlomovým kmitočtem $f_c = 100$ Hz s hodnotami stavebních prvků $R_1 = R_2 = 5\,000\ \Omega$, $C_1 = C_2 = 95\text{ nF}$, $L = 11,18\text{ H}$. Neprakticky velkou hodnotu indukčnosti L realizujte pomocí GIC. Přenosové charakteristiky navrženého filtru zkontrolujte s užitím programu SNAP. S užitím tohoto programu porovnejte modulovou kmitočtovou charakteristiku pro změny hodnoty odporu R_6 a zjistěte z příslušného grafu hodnotu relativní citlivosti napěťového přenosu K . Pro tento prvek na kmitočtu 100 Hz.



Obrázek 85: Horní propust

Indukčnost L lze realizovat zapojením GIC s operačními zesilovači na obrázku 86.

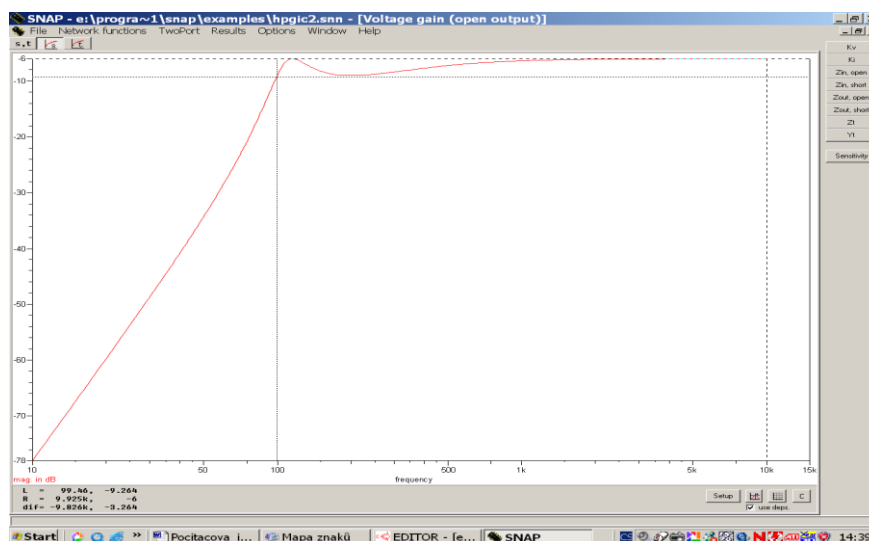


Obrázek 86: Realizace syntetické indukčnosti

Pro hodnotu indukčnosti L platí dle [23] vztah

$$L = \frac{C_3 R_3 R_4 R_6}{R_5} \quad . \quad (300)$$

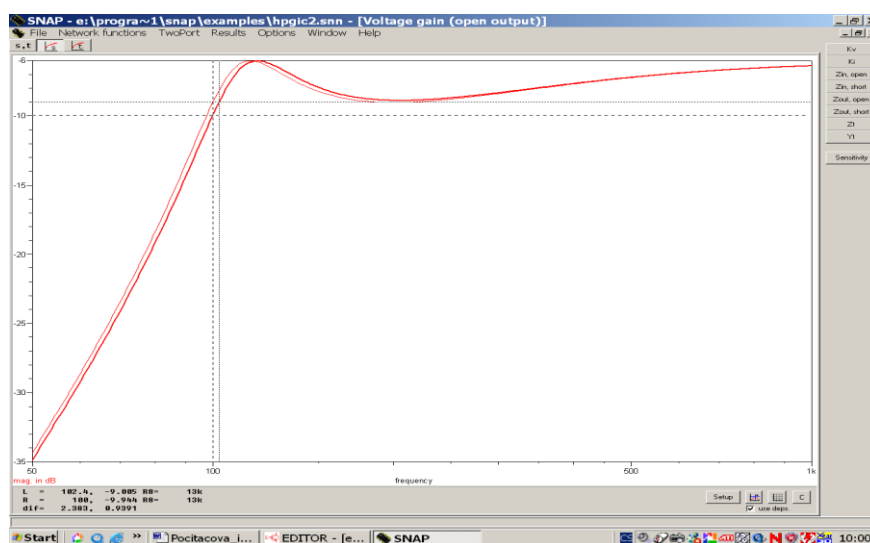
Volíme-li $C_3 = 100 \text{ nF}$, $R_3 = R_4 = R_5 = 8,2 \text{ k}\Omega$, vyjde pro $L = 11,18 \text{ H}$ odpor $R_6 = 13\,634 \Omega$. Využitím programu SNAP zkontrolujeme kmitočtovou charakteristiku napět'ového přenosu horní propusti z obrázku 85 se syntetickou indukčností dle obrázku 86. Tato charakteristika je na obrázku 87.



Obrázek 87: Kmitočtová charakteristika napět'ového přenosu

Poznámka: Na obrázku 87 je pravý kurzor (stisk pravého tlačítka myši) přesunut na $f = 10$ kHz, levý kurzor (stisk levého tlačítka myši) je přesunut na $f = 100$ Hz). Rozdíl úrovní mezi oběma kmitočty je asi 3 dB.

Odporu R_6 zaokrouhlíme na jmenovitou hodnotu 13 k Ω v řadě E24. Pro zjištění vlivu této změny na modulovou kmitočtovou charakteristiku napěťového přenosu použijeme možnost vykreslení více křivek při změněném parametru v programu SNAP. Po zobrazení charakteristiky na obrázku 87 použijeme v nabídce Setup nabídku Step. Zde vybereme R_6 a do polí zadáme from 13 k Ω to 13.634 k Ω steps 1. Vykreslí se právě dvě křivky odpovídající hodnotám 13 k Ω a 13.634 k Ω , pro zlepšení rozlišení lze upravit rozsah kmitočtové osy v nabídce Setup na min 50 max 1 k Ω . Výsledek je na obr. 88.



Obrázek 88: Vliv R_6 na kmitočtovou charakteristiku

Na obrázku 88 silnější křivka odpovídá hodnotě 13 k Ω . Pravý kurzor je nastaven na $f = 100$ Hz a levý na nový zlomový kmitočet $f = 102$ Hz. Rozdíl v útlumech vlivem různých hodnot R_6 na kmitočet 100 Hz je asi 1 dB.

Relativní citlivost odporu R_6 při hodnotě 13,634 Ω je

$$S_{R_6}^K = -2,193 + j2,141 \quad . \quad (301)$$

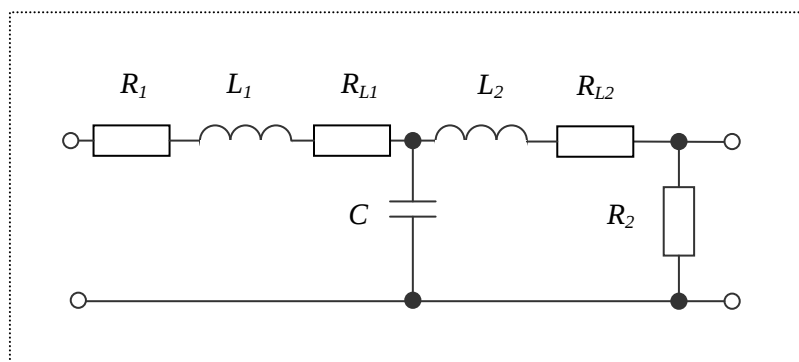
Pro zjištění této hodnoty opět využijme postup v příkladu 5.8. Obdobným postupem by bylo možno zjišťovat citlivosti i pro ostatní stavební prvky. Obecně většinou platí, že struktura, která obsahuje náhradu pasivních prvků (aktivní filtry), je citlivější na změnu hodnot stavebních prvků než ekvivalentní pasivní struktura.

□ Vliv parazitních parametrů součástek.

Parazitní parametry pasivních součástek mohou ovlivňovat přenosovou charakteristiku filtrů. Přítomnost ztrátových odporů obecně zvyšuje útlum v propustném pásmu a snižuje útlum v nepropustném pásmu filtru. Na vyšších kmitočtech může docházet vlivem parazitních reaktancí k nežádoucím rezonancím. Ze ztrátových odporů mívá největší vliv u pasivních R , L , C filtrů ztrátový odpor indukčnosti (kondenzátory mají zpravidla mnohem vyšší činitel jakosti než cívky). Pro posouzení vlivu parazitních parametrů na obvod lze použít vhodného modelu příslušného pasivního prvku dle kapitoly 2. V následujících příkladech si ukážeme vliv odporu vinutí cívky a vliv parazitních kapacit a indukčností na kmitočtovou charakteristiku modulu napěťového přenosu

Příklad 5.10.

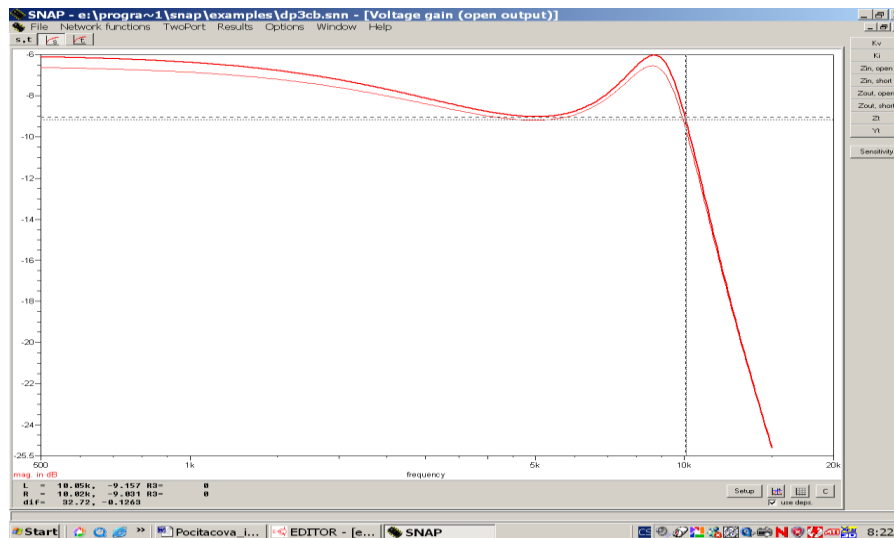
Na obrázku 89 je dolní propust třetího řádu s Čebyševovou aproximací se zlomovým kmitočtem $f_c = 10$ kHz s hodnotami stavebních prvků $R_1 = R_2 = 600 \Omega$, $C = 18,87$ nF, $L_1 = L_2 = 31,9$ mH. S užitím programu SNAP zjistěte o jakou hodnotu se změní útlum v propustném pásmu když cívka L_1 bude mít odpor vinutí $R_{L1} = 75 \Omega$? Jak se změní modulová kmitočtová charakteristika filtru zaokrouhlením hodnot kapacity a indukčnosti na vyráběné hodnoty a uvažováním odporů vinutí cívek?



Obrázek 89: Filtr se ztrátovým odporem vinutí cívky.

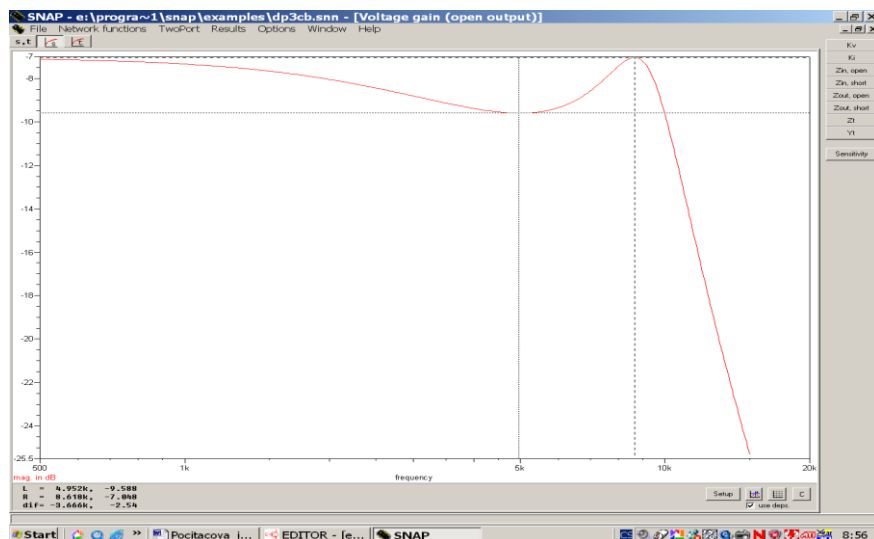


Ve schématickém editoru SNAPu nakreslíme schéma na obrázku 89. Zadáme nejprve přesné hodnoty součástek a hodnoty obou odporů R_{L1} a R_{L2} jako nulové. Po spuštění analýzy zobrazíme graf napěťového přenosu. V nabídce Setup nastavíme rozsah kmitočtů například min 500 max 15k pro lepší rozlišení. V nabídce Setup zvolíme step, vybereme odpor R_{L1} a zapíšeme rozsah změn hodnot from 0 to 75 step 1 a zobrazíme graf. (Tip: Dáme-li zobrazení hned po zadání kmitočtového rozsahu a další zobrazení až po zadání rozsahu změn hodnot R_{L1} , bude původní křivka silnější než druhá.) Po kliknutí na ikonu kurzorů nastavíme pravý kurzor na referenční hodnotu – sedlo původní křivky propustného pásma a levý kurzor na sedlo nové křivky. V levé dolní části obrazovky máme rozdíl útlumů tj. asi 0,126 dB. Tedy povolená hodnota útlumu v propustném pásmu 3 dB je překročena o 0,126 dB. Odpor vinutí cívky tedy přispívá ke zvětšení útlumu v propustném pásmu filtru. Graf je na obrázku 90.



Obrázek 90: Vliv odporu vinutí cívky

U druhého úkolu zaokrouhlíme hodnoty kapacity na $C = 18 \text{ nF}$ a cívek na $L_1 = L_2 = 33 \text{ mH}$ (řada E12). Odpor vinutí (například tlumivka FASTRON radiální vývody) $R_{L1} = R_{L2} = 75 \Omega$. výsledný graf kmitočtové charakteristiky je na obrázku 91.



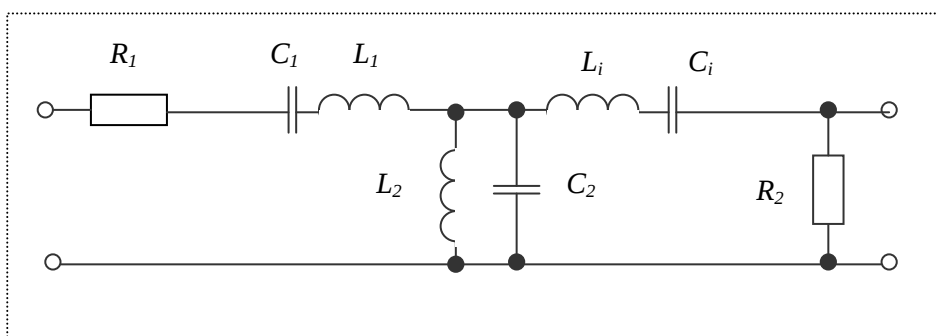
Obrázek 91: Vliv odporů vinutí a zaokrouhlení hodnot prvků

Z grafu lze zjistit, že útlum filtru v propustném pásmu klesl na hodnotu asi 2,56 dB a zlomový kmitočet propustného pásma tj. zvětšení útlumu o 3 dB se posunul k vyšším hodnotám asi na 10,12 kHz. Pokles útlumu je způsoben zmenšením kapacity C , tím je kompenzován vliv odporů vinutí cívek

a zvětšení indukčnosti. Změna zlomového kmitočtu je způsobena snížením kapacity a zvětšením indukčnosti. Změna kapacity zde má převládající vliv a tedy se zvětšil zlomový kmitočet.

Příklad 5.11.

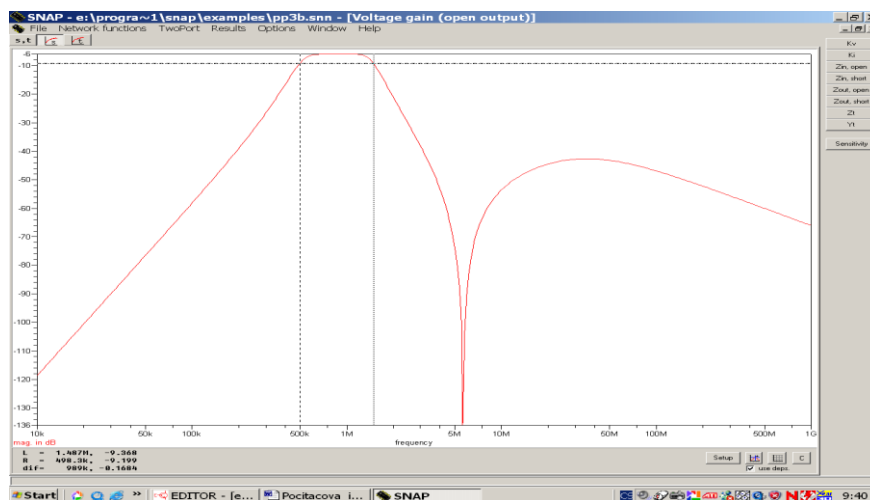
Sledujeme vliv některých parazitních parametrů na modulovou kmitočtovou charakteristiku pásmové propusti navržené v příkladu 5.5 viz obrázek 92. Pro modelování parazitních parametrů u cívek a kondenzátorů uvažujeme jejich R , L , C parazitní parametry postupně vzhledem k omezeným výpočetním možnostem programu SNAP.



Obrázek 92: Pásmová propust

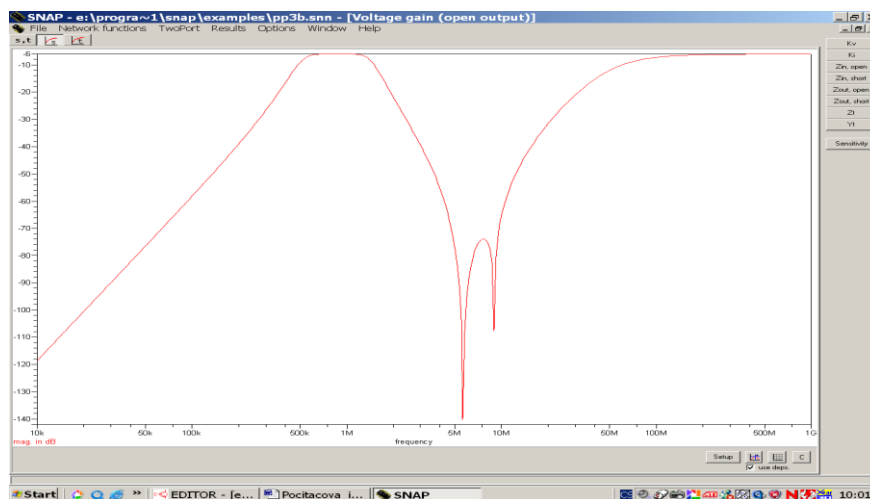


Ve schématickém editoru SNAPu nakreslíme schéma na obrázku 92. Zadáme nejprve přesné hodnoty součástek $R_1 = R_2 = 1\,000\,\Omega$, $L_1 = 0,159\,\text{mH}$, $L_2 = 0,106\,\text{mH}$, $C_1 = 212\,\text{pF}$, $C_2 = 318\,\text{pF}$. Po spuštění analýzy zobrazíme graf napěťového přenosu. Kmitočtová modulová charakteristika má hladký průběh se zlomovými kmitočty 500 kHz a 1500 kHz. Pak k základnímu schématu přikresluje postupně parazitní prvky a jejich hodnoty volíme řádově velké dle kapitoly 2 a sledujeme změny kmitočtové charakteristiky. Významný je například vliv parazitních kapacit paralelně připojených k indukčnostem L_1 , což je na obrázku 93. Uvažované kapacity měly velikost 5 pF.



Obrázek 93: Vliv parazitních kapacit

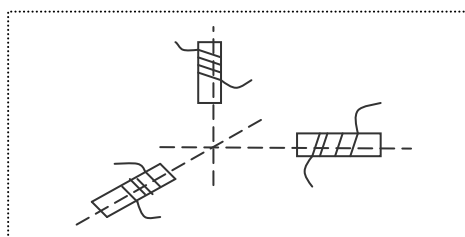
Na obrázku 93 je vidět jednak původní část charakteristiky ohraničená kurzory na 500 kHz a 1,5 MHz a jednak část způsobená vlivem uvažovaných parazitních kapacit u obou indukčností L_1 a L_2 která se projevila poklesem na asi 5,5 MHz a lalokem který snižuje útlum v nepropustném pásmu (rozdíl útlumů původního pásma a laloku je asi 34 dB). Doplní-li se toto schéma ještě o parazitní indukčnost (asi 1 μH) řazenou sériově k C_2 dojde ke vzniku dalšího rezonančního kmitočtu asi na 10 MHz a k ještě většímu poklesu útlumu nepropustného pásma na vysokých kmitočtech viz obrázek 94.



Obrázek 94: Vliv parazitních kapacit a parazitní indukčnosti

Na obrázku 94 je vidět, že pro uvažovaný vliv parazitních prvků dosáhne potlačené pásmo stejné úrovně jako propustné pásmo, což by mohlo být v některých aplikacích nepřijatelné. Je třeba si uvědomit, že v tomto filtru uvažované parazitní prvky a původní prvky, ke kterým jsou řazeny tvoří vlastně parazitní filtr pásmovou zadrž, která svým horním propustným pásmem degraduje vlastnosti horního nepropustného pásma původní pásmové propusti. Z tohoto příkladu je vidět důležitost používání součástek s nízkými parazitními parametry a také omezenost použití součástek pro filtry tam, kde hodnoty parazitních prvků jsou srovnatelné s hodnotami hlavních parametrů součástek.

Poznámka: Je třeba zdůraznit, že R , L , C filtry jsou navrženy také za předpokladu, že neexistují vzájemné vazby magnetickým rozptylovým polem mezi cívkami tvořících filtr. Přítomnost těchto vazeb také ovlivňuje kmitočtové charakteristiky filtru. Pokud účinek rozptylových polí není omezen konstrukční úpravou (stínící kryty, toroidní jádra, vhodná vzdálenost) lze tento jev omezit vhodným umístěním cívek v prostoru tak, aby osy jejich magnetických polí byly vzájemně kolmé viz obrázek 95. Pak jejich vzájemná vazba je teoreticky nulová. Toto lze realizovat ale jen v případě nejvýše tří cívek.



Obrázek 95: Minimální vzájemná vazba mezi cívkami

□ Další námět pro studium.

Problematika tolerancí elektrických obvodů je složitá a stále se vyvíjí. V tomto učebním textu byly podány jen základy pro pochopení a získání celkové představy o dané věci v rozsahu který umožňuje jednosemestrální předmět. Podrobnější informace a speciální aplikace mohou zájemci nalézt například v [24], [25], [26], [27].



Shrnutí pojmů 5.1

Celkovou citlivost obvodu posuzujeme podle kritéria – **součtu kvadrátů relativních citlivostí**. Čím větší je tato hodnota, tím je celkově obvod citlivější než jiný. Aktivní filtry jsou citlivější než jejich pasivní ekvivalenty. Citlivost roste s rostoucím řádem filtru. Citlivost filtru závisí i na použité aproximaci přenosové charakteristiky. Přenosovou charakteristiku filtru ovlivňují **výrobní tolerance součástek**. **Parazitní prvky** způsobují změny přenosových vlastností filtru (nárůst útlumu v propustném pásmu, pokles útlumu v nepropustném pásmu, vznik nových rezonančních kmitočtů).



Otázky 5.1

1. Proč se používá jako kritérium minimalizace citlivosti součet kvadrátů relativních citlivostí a ne pouze jejich součet?
2. Co umožňuje záporná zpětná vazba u zesilovačů z hlediska rozptylu hodnot zesilovacího činitele aktivního prvku?
3. Máme dva kmitočtové filtry stejného řádu a stejného typu aproximace. Jeden je pasivní a druhý aktivní. Který z nich bude mít asi větší citlivost přenosové funkce na změnu parametrů součástek?
4. Popište na příkladech jak se mohou projevit parazitní parametry na vlastnostech obvodu.



Úlohy 5.1

1. Určete který filtr z hlediska typu aproximace má větší citlivost modulové kmitočtové charakteristiky na změny parametrů součástek, zda Butterworth nebo Čebyšev se zvlněním 3 dB. Uvažujte pasivní filtr 3. řádu T strukturu, dolní propust. zlomový kmitočet.
2. Porovnejte citlivost T a Π struktury na zlomovém kmitočtu pro Butterworthovu aproximaci dolní propust 3. řádu. Využijte příkladu 5.6.
3. Porovnejte citlivost dolní propusti 2. řádu Butterworthovy aproximace na zlomovém kmitočtu pro zapojení Deliyannis – Friend a pasivní filtr T.
4. Určete, v zapojení filtru se syntetickou indukčností v příkladu 5.9 zda lze použité hodnoty prvků zaokrouhlit na vyráběné hodnoty a jaké tolerance bude zřejmě třeba volit u použitých součástek pro dodržení předepsané tolerance modulové kmitočtové charakteristiky na zlomovém kmitočtu. Využijte k tomu programu SNAP. Jaké zvolíme tolerance součástek v případě že tolerance modulu napětového přenosu na zlomovém kmitočtu nemá přesáhnout 20 % a cena odporů u 5 % a 10 % je stejná, a máme kondenzátory s tolerancí 5 % a 10 % ?



Průvodce studiem

Ted jste poznali, že zvládnutí teorie tolerancí přináší i prakticky významné poznatky. příklady v této kapitole můžete brát jako inspiraci pro zkoumání vlastností jiných obvodů, které Vás zajímají. Metodika kterou nabízí teorie tolerancí vede k cíli rychleji a spolehlivěji než prostá experimentální metoda pokusů a omylů a tedy stojí za to tu matematiku kolem toho si osvojit a zvládnout. Pokud Vás tento učební text o tom přesvědčil, tak splnil svůj cíl.



KLÍČ K ŘEŠENÍ

Kapitola 1

Úloha 1 Ve vzorci pro napěťový dělič použijte kapacitní reaktance.

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + \frac{C_2}{C_1} = 1 + m \quad m = \frac{U_1}{U_2} - 1$$

Úloha 2

$$R_i R_k = R_0 \cdot q^{i+k}$$

Úloha 3

Použijeme řadu E12 protože kondenzátory se vyrábí podle E12. Hodnoty 100n a 150n jsou vzdáleny v E12 právě o 1 pozici. Proto i nová hodnota odporu bude vzdálena o 1 pozici od původní hodnoty. Aby byl zachován součin bude hodnota odporu o 1 pozici snížena tedy bude $R = 680 \Omega$.

Úloha 4

Například lze využít při výpočtu zesílení u invertujícího, neinvertujícího a rozdílového zesilovače s operačním zesilovačem, nebo při výpočtu hodnot součástí Wheatstoneova můstku pro určitou rovnováhu.

Kapitola 2.1.

Úloha 1

Hustota proudu ve vodiči je $50,95 \text{ mA} \cdot \text{mm}^{-2}$. Hustota Maxwellova proudu je $5 \cdot 10^{-4} \text{ mA} \cdot \text{mm}^{-2}$ (teče plochou a.b). Maxwellův proud není svodový proud dielektrika. Je to proud který teče v časově proměnném elektrickém poli v důsledku elektrostatické indukce nábojů na deskách kondenzátoru i kdyby bylo dielektrikem vakuum.

Úloha 2

Cívka má reaktanci $31,4 \Omega$. Proud odpovídá napětí $U=3,14 \text{ V}$. Rozptylový magnetický tok má časový průběh $\Phi = \Phi_{\max} \sin(\omega t)$. Indukované napětí ve smyčce je $U_i = -\omega \Phi_{\max} \cos(\omega t)$. Jeho

velikost $U_i = 0,314$ V. V případě zmenšení plochy na 0,1 původní hodnoty se zmenší i indukované napětí na 0,0314 V.

Úloha 3

Lineárně roste s rostoucím kmitočtem. Proto je jev výraznější na vyšších kmitočtech.

Úloha 4

Vstupní impedance je 25Ω . Docházelo by k transformování impedancí na kmitočtech splňujících podmínku lichých násobků $\lambda/4$ a obvod by se choval odlišně od předpokladu, že k transformaci nedochází.

Úloha 5

V případě nulového odporu by nenulovou délku mít mohly. V případě nulové indukčnosti a kapacity ne. Indukčnost je vázána na vytvoření magnetického pole kolem vodiče a to se vytvoří protékajícím proudem. Kapacita je vázána na rozdíl napětí mezi vodičem a okolím a to je splněno. I osamocený vodič má elektrickou kapacitu (proti místu s nulovým potenciálem).

Kapitola 2.2.

Úloha 1

Pro 50 Hz je $\tan \delta = 3,18 \cdot 10^{-3}$, $Q = 314$, $R_s = 1 \Omega$, $C_s = 10 \mu\text{F}$. Pro 500 Hz je $\tan \delta = 3,18 \cdot 10^{-4}$, $Q = 3140$, $R_s = 0,01 \Omega$, $C_s = 10 \mu\text{F}$.

Úloha 2

Pro 50 Hz je $\tan \delta = 0,254$, $Q = 3,926$, $R_p = 1\,314 \Omega$, $L_p = 1,065$ H. Pro 500 Hz je $\tan \delta = 2,54 \cdot 10^{-2}$, $Q = 39,2$, $R_p = 1,23 \cdot 10^5 \Omega$, $L_p = 1$ H.

Úloha 3

Pro 50 Hz je $\tan \delta = 3,14 \cdot 10^{-4}$, $Q = 3\,183$, $R_p = 1\,000 \Omega$, $L_p = 1,013 \cdot 10^4$ H. Pro 1 000 Hz je $\tan \delta = 6,28 \cdot 10^{-3}$, $Q = 159$, $R_p = 1000 \Omega$, $L_p = 2,53$ H.

Úloha 4

$C_p = 100$ pF, $R_p = 1/(\omega C_p \tan \delta) = 3\,180 \Omega$.

Úloha 5

$L_s = 100 \mu\text{H}$, $R_s = \omega L_s / Q = 837 \Omega$.

Kapitola 3.1.

Úloha 1.

Napište výraz pro napětí U_2 . Protože v rovnováze můstku je jmenovitá hodnota tohoto napětí nulová, nelze užít koeficientů relativní citlivostí. Použijeme buď absolutních nebo semirelativních citlivostních

koeficientů Q_{Ri}^{U2} . Citlivostní koeficienty nabývají maximálních hodnot když všechny odpory v můstku jsou stejně velké, jak lze zjistit z podmínky když první derivaci těchto koeficientů položíme rovnu nule. Pro tyto hodnoty odporů je $|Q_{Ri}^{U2}| = 0,25$.

Úloha 2.

Časové konstanty jsou $\tau_1 = CR_2$, $\tau_2 = CR_2(R_1+R_3)/(R_1+R_2+R_3)$. Citlivostní koeficienty jsou $S_C^{\tau_1} = S_{R2}^{\tau_1} = S_C^{\tau_2} = 1$, $S_{R1}^{\tau_2} = R_1R_2/[(R_1+R_3)(R_1+R_2+R_3)] = 0,137$, $S_{R2}^{\tau_2} = (R_1+R_3)/(R_1+R_2+R_3) = 0,409$, $S_{R3}^{\tau_2} = R_2R_3/[(R_1+R_3)(R_1+R_2+R_3)] = 0,453$, Tolerance jsou $\delta_{\tau_1} = 22,36 \%$, $\delta_{\tau_2} = 20,95 \%$

Úloha 3.

Limitní přenosy jsou $K(0) = R_3/(R_1+R_2+R_3)$, $K(\infty) = R_3/(R_1+R_3)$. Citlivostní koeficienty jsou $S_{R1}^{K0} = -R_1/(R_1+R_2+R_3) = -0,095$, $S_{R2}^{K0} = -R_2/(R_1+R_2+R_3) = -0,59$, $S_{R3}^{K0} = (R_1+R_2)/(R_1+R_2+R_3) = 0,685$, $S_{R1}^{K\infty} = -R_1/(R_1+R_3) = -0,232$, $S_{R3}^{K\infty} = R_1/(R_1+R_3) = 0,232$. Tolerance jsou $\delta_{K0} = 9,09 \%$, $\delta_{K\infty} = 3,28 \%$

Úloha 4.

Největší citlivost mají kapacita C a R_2 . Protože tolerance časových konstant jsou větší než tolerance přenosů je lepší začít výpočet u tolerancí časových konstant. Je naděje, že pak budou hodnoty tolerancí přenosů splněny. Volíme nejbližší vyráběnou toleranci $\delta_C = 10 \%$. Vypočteme pro požadovanou $\delta_{\tau_1} = 12 \%$ potřebnou toleranci $\delta_{P2} = 5 \%$. Pak ve vztahu pro požadovanou $\delta_{\tau_2} = 12 \%$ volíme $\delta_{P2} = \delta_{P3} = 5 \%$, protože jejich citlivosti jsou srovnatelné a vypočítáme toleranci $\delta_{P1} = 84,7 \%$, kterou zaokrouhlíme na vyráběnou hodnotu 20% . Pro vypočtené tolerance vstupních parametrů provedeme kontrolu dosažených tolerancí výstupních veličin, zda je splněno zadání. Vyjde $\delta_{\tau_1} = 11,18 \%$, $\delta_{\tau_2} = 10,8 \%$, $\delta_{K0} = 4,9 \%$, $\delta_{K\infty} = 4,78 \%$

Kapitola 3.2.

Úloha 1.

$K=1+R_2/R_1$ citlivostní koeficienty jsou $S_{R1}^K = -S_{R2}^K = -R_2/(R_1+R_2)$

Úloha 2.

$K = -R_2/(R_1(1+pCR_2))$ citlivostní koeficienty jsou $S_{R1}^K = -1$, $S_{R2}^K = 1/(1+pCR_2)$, $S_C^K = -pCR_2/(1+pCR_2)$

Úloha 3.

Do výrazu pro K dosadíte jmenovité hodnoty a pak hodnoty odporů změněné například o 10% . Hodnoty citlivostí by se měly blížit přesným hodnotám tj. $2/3$ a $-2/3$.

Kapitola 3.3

Úloha 1.

Přenos získáme nejsnáze aplikací vztahu pro nezatížený napěťový dělič.

$K = R_2/[p^2 LCR_2 + p(CR_1 R_2 + L) + R_1 + R_2] = P/Q$. Citlivosti $S_{R1}^K = -R_1(1 + pCR_2)/Q = -1/2 + j1/(2(2)^{1/2})$,
 $S_{R1}^K = R_2[1/P - (p^2 LC + pCR_1 + 1)/Q] = 1/2 - j/(2(2)^{1/2})$, $S_L^K = -L(p^2 CR_2 + p)/Q = -1/2 - j/((2)^{1/2})$,
 $S_C^K = -C(p^2 LR_2 + pR_1 R_2)/Q = -1/2 - j/((2)^{1/2})$. Do vztahu pro výpočet tolerance modulu přenosu dosadíme podle pravidla 3 jen reálné části citlivostí. Vyjde $\delta_K = 10 \%$.

Úloha 3.

Citlivosti jsou $S_{R4}^K = 0,89$, $S_{h_{22e}}^K = -0,107$, $S_{h_{21e}}^K = 1$, $S_{h_{11e}}^K = -1$. tolerance $\delta_K = 28,7 \%$. Je vidět, že v tomto zapojení zesilovače mají R_4 , h_{21e} , h_{11e} velký vliv na δ_K .

Úloha 4.

Relativní citlivosti jsou zde konstanty rovny 1. Vzhledem k vyráběným tolerancím kondenzátorů a odporů je vhodné volit $\delta_C = 10 \%$ a $\delta_R = 5 \%$. Pak je $\delta_t < 12 \%$.

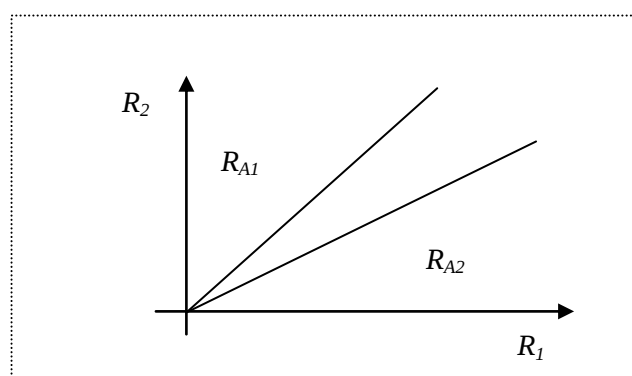
Úloha 5.

Komplexní admitance rezonančního obvodu je $Y = R/[R^2 + (\omega L)^2] + j\{\omega C - \omega L/[R^2 + (\omega L)^2]\}$. Z podmínky $\text{Im } Y = 0$ vyjde rezonanční kmitočet $\omega_r = [(L - CR^2)/(CL^2)]^{1/2}$, Impedance v rezonanci vyjde $Z_r = L/(CR)$, činitel jakosti $Q = \omega_r L/R = [(L - CR^2)/(CR^2)]^{1/2}$. Relativní citlivosti pro ω_r a Q počítáme dle pravidla 1. Vyjde $S_L^{\omega_r} = (2CR^2 - L)/(2(L - CR^2)) = -0,498$, $S_C^{\omega_r} = -L/(2(L - CR^2)) = -0,5$,
 $S_R^{\omega_r} = -2CR^2/(2(L - CR^2)) = -0,0036$, $S_L^Q = L/(2(L - CR^2)) = 0,5$, $S_C^Q = -L/(2(L - CR^2)) = -0,5$,
 $S_R^Q = -L/(L - CR^2) = -1$, $S_L^{Z_r} = 1$, $S_C^{Z_r} = -1$, $S_R^{Z_r} = -1$. Nejvíce je ovlivněna Z_r , nejméně je ovlivněn ω_r změnou odporu R .

Kapitola 4.1

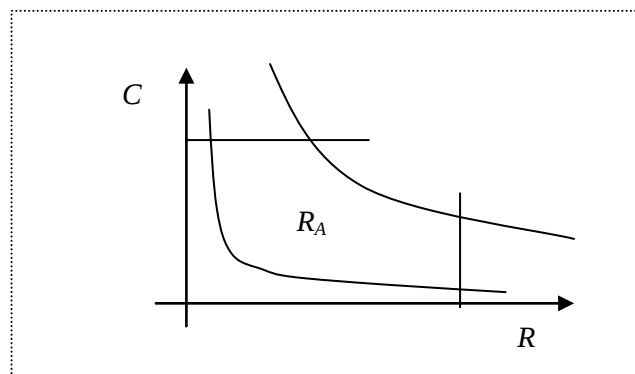
Úloha 1.

Prostor přijatelnosti obsahuje dva vzájemně oddělené prostory.



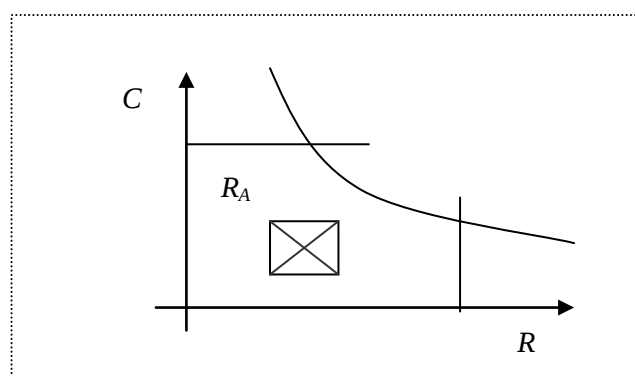
Úloha 2.

Zlomový kmitočet je $f_c = 1/(2 \pi RC)$. Prostor přijatelnosti je konkávní.



Úloha 3.

Prostor přijatelnosti je konkávní a obsahuje zakázaný prostor.



Kapitola 5.1

Úloha 1.

Využijte vztahy z příkladu 5.6. a dosad'te normované hodnoty z tabulky 6. Kritéria L vyjdou:

$L_1 = \Sigma(\operatorname{Re} S_x^K)^2 = 7,91$ a $L_2 = \Sigma(\operatorname{Im} S_x^K)^2 = 9,08$ V porovnání s výsledkem z příkladu 5.6 lze říci, filtr stejného typu s Čebyševovou aproximací je citlivější než s aproximací Butterworthovou.

Úloha 2.

Napětový pro Π strukturu je $K = U_2/U_1 = R_2/[p^3 R_1 R_2 C_1 C_2 L + p^2(R_2 C_2 L + R_1 C_1 L) + p(R_1 R_2 C_2 + R_1 R_2 C_1 + L_1) + R_1 + R_2]$, Nejcitlivějším prvkem je indukčnost L , $S_L^K = -1-j$, kritéria L jsou $L_1 = \Sigma(\operatorname{Re} S_x^K)^2 = 1,75$ a $L_2 = \Sigma(\operatorname{Im} S_x^K)^2 = 2,25$ což jsou stejné hodnoty jako u T struktury. T a Π struktura mají celkově srovnatelnou citlivost. Rozdíly jsou pouze v citlivostech prvků na určitých pozicích.

Úloha 3.

Pro pasivní filtr volíme zapojení dle obr. 61. Napětový přenos je $K = R_2/[p^2 L C R_2 + p(C R_1 R_2 + L) + R_1 + R_2]$ Citlivosti vyjdou $S_{R1}^K = -1/2 + j1/(2(2^{1/2}))$, $S_{R2}^K = 1/2 - j1/(2(2^{1/2}))$, $S_L^K = -1/2 - j1/(2(2^{1/2}))$, $S_C^K = -1/2 - j1/(2(2^{1/2}))$, kritéria L vyjdou $L_1 = \Sigma(\operatorname{Re} S_x^K)^2 = 1$ a $L_2 = \Sigma(\operatorname{Im} S_x^K)^2 = 1,25$. Při výpočtu prvků Delyiannisova – Friendova filtru lze použít postupu jako u příkladu 5.7. jen je třeba volit $K_0 = 1$ při výpočtu normovaných hodnot prvků, aby oba srovnávané filtry měly stejnou hodnotu přenosu při $\omega = 0$ a pak počítat citlivostní koeficienty. Kritéria L vyjdou $L_1 = \Sigma(\operatorname{Re} S_x^K)^2 = 1,875$ a $L_2 = \Sigma(\operatorname{Im} S_x^K)^2 = 2$ Z výsledků je vidět, že Delyiannisova – Friendova struktura je citlivější na změnu parametrů součástek.

Úloha 4.

Zvolíme zaokrouhlené hodnoty $R_1 = R_2 = 5K1$, $C_1 = C_2 = 100n$, $R_5 = 13K$. Ostatní hodnoty není třeba zaokrouhlovat. Dle analýzy SNAPu se téměř nezmění poloha zlomového kmitočtu 100 Hz, Poněkud klesne útlum v propustném pásmu, což je ale přijatelné. Reálné části relativních citlivostí na $f = 100$ Hz: $S_{R1}^K = -0,449$, $S_{R2}^K = 0,555$, $S_{R3}^K = S_{R4}^K = -S_{R5}^K = S_{C3}^K = 2,035$, $S_{C1}^K = S_{C2}^K = 1,068$. Z velikosti koeficientů lze odhadnout, že nejméně přísné tolerance lze volit u R_1 a R_2 , dvakrát přísnější tolerance je třeba volit u C_1 a C_2 , a čtyřikrát přísnější je třeba volit tolerance u C_3 , R_3 , R_4 , R_5 . Pro toleranci modulu napětového přenosu 20 % na 100 Hz je třeba volit tolerance s ohledem na běžnou dostupnost a cenu u R_3 , R_4 , R_5 $\delta = 1$ %, u C_3 $\delta = 5$ %, u C_1 a C_2 je $\delta = 10$ %, u R_1 , R_2 volíme $\delta = 5$ %.



Další zdroje

1. MIKULEC M., HAVLÍČEK V.: *Základy teorie elektrických obvodů 1*, ČVUT, Praha, 1997, ISBN 80-01-01620-X
2. MIKULEC M., HAVLÍČEK V.: *Základy teorie elektrických obvodů 2*, ČVUT, Praha, 2002, ISBN 80-01-02462-8
3. DOLEČEK J.: *Moderní učebnice elektroniky díl 1*, BEN, Praha, 2005, ISBN 80-7300-146-2
4. DOLEČEK J.: *Moderní učebnice elektroniky díl 4*, BEN, Praha, 2006, ISBN 80-7300-185-3
5. MAYER D.: *Úvod do teorie elektrických obvodů*, SNTL, Praha, 1981
6. BRIŠ R., LITSCHMANNOVÁ M.: *Statistika I. Pro kombinované a distanční studium*, elektronické skriptum VŠB TU Ostrava, [citováno 1.června 2007], <<http://www.am.vsb.cz/~lit40/STA1/statistika-ks.html?butt2=Statistika1+-+kombinovan%E9+studium>>
7. LIKEŠ J., MACHEK J.: *Matematická statistika*, SNTL Praha, 1988
8. Charles Renard, [citováno 1.června 2007], <http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Renard>
9. VOKURKA J.: *Teorie elektromagnetického pole*, skripta ČVUT Praha, 1991, ISBN 80-01-00516-X
10. FAKTOR Z.: *Transformátory a cívky*, BEN Praha, 1999, ISBN 80-86056-49-X
11. VAJDA J.: *Oscilátory UKV*, Amatérské rádio 8, 1970, s.303,, Magnet Press Praha, ISSN 0322-9572
12. ŽDÁREK J.: *Povrchový jev*, [citováno 1.června 2007], <http://moon.felk.cvut.cz/~pjv/Jak/_phys/f234/html/skef.htm >
13. KŘIŠŤAN L., VACHALA V.: *Příručka pro navrhování elektronických obvodů*, SNTL Praha, 1981
14. BOUŠEK J.: *Pasivní součástky*, [citováno 1.června 2007], <<http://www.umel.feec.vutbr.cz/~bousek/eso/prvky9x.pdf>>
15. BODE H.W.: *Network analysis and feedback amplifier design*, Van Nostrand, New York 1945
16. HUELSMANN L.P., ALLEN P.E.: *Introduction to the theory and design of active filters*, McGraw-Hill, 1980
17. GEHER K.: *Theory of network tolerances*, Akademiai Kiado, Budapest, 1971
18. BIOLEK D., KOLKA Z.: *SNAP* [počítačový program], verze 2.61, Vojenská akademie Brno, [citováno 1.června 2007], <<http://snap.webpark.cz/?X>>
19. SPENCE R., SOIN R.S.: *Tolerance design of electronic circuits*, Imperial College Press, London, 1997, ISBN 1-86094-040-4
20. HÁJEK K., SEDLÁČEK J.: *Kmitočtové filtry*, BEN, Praha, 2002, ISBN 80-7300-023-7
21. HAJOŠ Z.: *Filtre v televíznej technike*, Alfa, Bratislava, 1988
22. PUNČOCHÁŘ J.: *Operační zesilovače*, BEN, Praha, 1996, ISBN 80-901984-3-0

23. DAVÍDEK V., LAIPERT M., VLČEK M.: *Analogové a číslicové filtry*, ČVUT, Praha, 2000, ISBN 80-01-02178-5
24. NOVÁK M.: *Teorie tolerancí soustav*, Academia, Praha, 1987
25. CREVELING C.M.: *Tolerance design. A handbook for developing optimal specifications*, Addison-Wesley, 1997, ISBN 0-201-63473-2
26. BOYD R.R.: *Node list tolerance analysis, Enhancing SPICE capabilities with Mathcad*, Taylor and Francis, 2006, ISBN 0-8493-7028-0
27. BOYD R.R.: *Tolerance analysis of electronic circuits using Matlab*, CRC Press, 1999, ISBN 0-8493-2276-6

Rejstřík

Brutonova transformace, 128

citlivost

- absolutní, 46
- relativní, 48
- semirelativní, 48

citlivostní invarianty, 74

činitel jakosti

- cívky, 38
- kondenzátoru, 30

dvojná kapacita, 128

filtry

- Butterworthovy, 110
- Čebyševovy, 110
- návrh dolních propustí, 110
- návrh horních propustí, 113
- návrh pásmové propusti, 115
- návrh pásmové zádrže, 117

funkce

- cenová, 86
- obvodová, 6
- systémová, 6

hodnota

- jmenovitá, 7
- normalizovaná, 10

interval spolehlivosti, 53

kmitočtové a impedanční normování, 109

matice citlivostí, 57

metoda

- deterministická, 94
- jednoduché aproximace, 96
- Monte Carlo, 97
- nejhoršího případu, 95
- regionalizace, 95
- statistická, 94
- vzorkování, 94

minimalizace citlivostí

- počtem součástek, 101
- volbou struktury, 109

zpětnou vazbou, 103

normální rozdělení, 53

obecný impedanční konvertor, 128

obvod

- s rozloženými parametry, 21
- se soustředěnými parametry, 21

obvodový model, 25

- cívky, 32
- kondenzátoru, 26

odchylka

- absolutní, 7
- relativní, 8

odpor

- diferenciální, 18
- ekvivalentní sériový, 30
- statický, 18
- zakončovací, 111
- ztrátový (cívky), 34, 38
- ztrátový (kondenzátoru), 29

parametr

- hlavní, 25
- obvodový, 6
- parazitní, 25, 134
- vstupní, 6

prostor

- přijatelnosti, 86
- tolerancí, 86

SNAP, 82, 128, 129

struktura

- Delyiannis-Friend, 124
- příčková, 110
- Sallen-Key, 125

syntetická indukčnost, 128

tolerance

- definice, 8
- nejhoršího případu, 54
- nesouměrné, 8
- souměrné, 8
- výstupní veličiny, 54

veličina

L, 100

obvodová, 6

výstupní, 6

výtěžnost, 85

zákon

Kirchhoffův druhý, 20

Ohmův, 17

ztrátový úhel

cívky, 38

kondenzátoru, 30

Obsah

POČÍTAČOVÁ IDENTIFIKACE OBVODŮ	1
1. ÚVOD.....	5
1.1. Základní pojmy, řady normalizovaných hodnot.....	5
2. ROZDÍLNOST CHOVÁNÍ REÁLNÉHO A IDEÁLNÍHO OBVODU.....	17
2.1. Meze platnosti základních zákonů.....	17
2.2. Modely chování pasivních součástek.....	25
3. ANALYTICKÉ METODY VÝPOČTU TOLERANCÍ.....	46
3.1. Citlivostní koeficienty.....	46
3.2. Metody stanovení citlivostních koeficientů.....	62
3.3. Vlastnosti citlivostních koeficientů.....	70
4. NUMERICKÉ METODY VÝPOČTU TOLERANCÍ.....	85
4.1. Přehled užívaných technik.....	85
5. NÁVRH ELEKTRONICKÝCH OBVODŮ.....	100
5.1. Vliv citlivostí a parazitních parametrů.....	100
KLÍČ K ŘEŠENÍ.....	139
Další zdroje	145
Rejstřík	147
Obsah.....	149