Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ELEKTROMAGNETISMUS

učební text

Lubomír Ivánek

Ostrava 2007

Recenze: Ing. Petr Orság,CSc.

Název: Elektromagnetismus – učební text
Autor: Lubomír Ivánek
Vydání: první, 2007
Počet stran: 183

Vydavatel a tisk: Ediční středisko VŠB – TUO

Studijní materiály pro studijní obory El. stroje, přístroje a pohony, Elektroenergetika, Elektronika a sděl. technika, fakulty FEI
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:
Operační program Rozvoj lidských zdrojů
Název: E-learningové prvky pro podporu výuky odborných a technických předmětů
Číslo: CZ.O4.01.3/3.2.15.2/0326
Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava
Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Lubomír Ivánek
© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-1486-5

PRŮVODCE KURZEM

Elektromanetismus

Předmět Elektromagnetismus je vyučován v prvním ročníku následného magisterského studia. navazuje na předmět Fyzika – elektromagnetismus a na další předměty teoretické elektrotechniky – Teorie obvodů I a II. Je vyučován jako předmět povinně volitelný (pro elektrické stroje a přístoje) a předmět volitelný pro další spcializace. Rozsah výuky 2+2. Výuka probíhá 13 semestrů v prezenční nebo 6 tutoriálů v kombinované formě výuky.

Harmonogram průběhu semestru

Prezenční studium

1. týden

Přednáška: Fyzikální představy elektromagnetického pole, integrální a diferenciální veličiny, náboj, intenzity a indukce.

Cvičení: Modelování polí na základě analogií s proudovými poli (polovodivý papír, odporová síť.

2. týden

Přednáška: Maxwellovy rovnice, potenciály

Cvičení: Přímý výpočet polí s použitím Gaussovy věty.

3. týden

Přednáška: Elektromotorické napětí. Zákon o elektromagnetické indukci – možnosti vzniku indukovaného napětí.

Cvičení: Přímý výpočet polí s použitím Ampérova zákona a Biotova-Savartova zákona.

4. týden

Přednáška: Loretzova síla,vodič v elektrickém poli, princip elektrostatického stínění.

Cvičení: Aplikace Faradayova zákona na praktických příkladech.

5. týden

Přednáška: Elektrický proud, závislost odporu na teplotě, vedený a difuzní proud v polovodičích.

Cvičení: experiment – rotující permanentní magnet, závislost indukavaného pole na vzdálenosti.

6. týden

Přednáška: Pole bodového dipólu, polární a nepolární dielektrika, polarizace dielektrika.

Cvičení: Příklady na hehomogenní dielektrikum.

7. týden

Přednáška: Magnetické vlastnosti látek, pole elementární proudové smyčky. Feromagnetika, antiferomagnetika.

Cvičení: Experiment – měření impedance a VA charakteristiky cívky s různými jádry.

8. týden

Přednáška: Prvotní křivka magnetizace, permeabilita, hysterezní smyčka, optimalizace permanentního magnetu.

Cvičení: Příklady s nehomogenním magnetikem.

9. týden

Přednáška: Lidský organismus v elektromagnetickém poli. Projevy ELF v lidském těle. Vliv záření vysokých frekvencí na lidský organismus.

Cvičení: Zkoumání závislosti impedance cívky na frekvenci – laboratorní měření.

10 týden

Přednáška: Hraniční podmínky na rozhraní dvou dielektrik, magnetik, vodičů. Masivní vodič v elektrickém poli.

Cvičení: Výpočty proudových polí a krokového napětí.

11. týden

Přednáška: Kapacita, potenciálové koeficienty.

Cvičení: Výpočty kapacit jednoduchých geometrických útvarů.

12. týden

Přednáška: Vlastní a vzájemná indukčnost. Interference elektrických zařízení.

Cvičení: Výpočty vlastních a vzájemných indukčností jednoduchých uspořádání vodičů.

13. týden

Přednáška: Výkony, energie a práce v elektromagnetickém poli. Rovnice výkonové rovnováhy. Síly v magnetickém poli.

Cvičení: Výpočet výkonů a sil v elektromagnetickém poli.

Kombinované studium

1. tutoriál

Informace o průběhu studia, seznámení s podmínkami zápočtů a zkoušky. Vysvětlení základních pojmů a zákonů elektromagnetismu. Zadání příkladů na přímý výpočet polí.

2. tutoriál

Konzultace výsledků výpočtů přímou metodou, úvod do problému vodivodtí, dielektrik a magnetik, příklady na grafickou relaxaci.

3. tutoriál

Konzultace domácí práce na grafické relaxaci. Vysvětlení řešení elektomagnetických polí s použitím podmínek na rozhraní.

4. tutoriál

Masivní vodiče. Metody výpočtů kapacit u jednoduchých uspořádání elektrod.

5. tutoriál

Výpočty indukčností, aplikace jevu vlastní a vzájemná indukčnost v praktických případech.

6. tutoriál

Rozprava nad pojmy výkon, práce energie. Výpočty sil v magnetismu.

Podmínky pro zápočet: minimálně 6 bodů z aktivit:

- písemný test z přímých metod	0- 5 bodů
- projekt grafické relaxace	0- 15 bodů
- protokoly z laboratorních úloh	0 – 20 bodů

U zkoušky může student získat za dvě otázky 0 – 40 bodů, za test 0 – 20 bodů.

POKYNY KE STUDIU

Pro předmět Elektromagnetismus letního semestru oborů El. stroje, přístroje a pohony, Elektroenergetika, Elektronika a sděl. technika, fakulty FEI jste obdrželi studijní balík obsahující

- integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu
- CD-ROM s doplňkovými animacemi vybraných částí kapitol
- harmonogram průběhu semestru a rozvrh prezenční části
- rozdělení studentů do skupin k jednotlivým tutorům a kontakty na tutory
- kontakt na studijní oddělení

Prerekvizity

Pro studium tohoto předmětu nejsou prerekvizity požadovány.

Cílem předmětu

je seznámení se základními pojmy teorie elektromagnetického pole. Po prostudování modulu by měl student být schopen orientovat se v základní terminologii elektrotechniky, řešit elementární úlohy z elektro/magnetostatického pole, stacionárního a kvazistacionárního pole a měl by znát základní principy šíření elektromagnetických vln.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do bakalářského / magisterského studia oborů El. stroje, přístroje a pohony, Elektroenergetika, Elektronika a sděl. technika studijního programu Elektrotechnika, sdělovací a výpočetní technika, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přeje autor výukového materiálu

Lubomír Ivánek

Obsah

Zadání semestrálního projektu

Pro zadanou konfiguraci elektrod s přiloženým stejnosměrným napětím (určí vedoucí cvičení resp. tutor) zjistěte:

- mapu pole této konfigurace pomocí grafické relaxace (kapacitu uspořádání, a v jednom místě řešené oblasti vektor intenzity elektrického pole),
- alespoň 4 ekvipotenciály se stejným rozdílem potenciálů, rozložení intenzit pole pomocí jednoho z vybraných numerických programů (QFIELD, MEP, Excel apod. – po konzultaci s učitelem).

Výsledky získané těmito metodami (tj. grafickou relaxací a numerickým programem) odevzdá student v jednom protokolu jako semestrální projekt.

Termín odevzdání projektu: nejpozději týden před ukončením výukové části semestru.

Postup při vypracování projektu:

1. Zadanou konfiguraci elektrod si namodelujte v programu QFIELD. Postupujte dle přiloženého manuálu, podobně jako v kapitole 15.4 a 15.5 Vytiskněte si pouze obrysy řešené oblasti s elektrodami na papír velikosti A4 tak, aby řešená oblast zaujímala co největší plochu

tohoto papíru. Čím větší bude vytištěna konfigurace, tím lépe se bude kreslit mapa pole. Vytištěním výstupu z programu QFIELD zajistíme přesnou geometrickou podobnost útvaru řešeného buď Lehmannovou metodou křivočarých čtverečků nebo numerickou metodou.

2. V oblasti mezi elektrodami odhadněte a načrtněte ekvipotenciálu s hodnotou polovičního potenciálního z rozdílu napětí mezi elektrodami.

3. Dalším rozdělením obou vzniklých polooblastí získáte tři ekvipotenciály. Dokreslete siločáry tak, aby vytvářely s těmito ekvipotenciálami „křivočaré čtverečky“.

4. Dokreslete mapu pole dalším rozdělením ekvipotenciál.

5. V jednom libovolně zvoleném bodě vypočtěte a zakreslete složky vektoru **E.**

6. Programem QFIELD zjistěte a vytiskněte rozložení intenzity pole a ekvipotenciál v řešené oblasti.

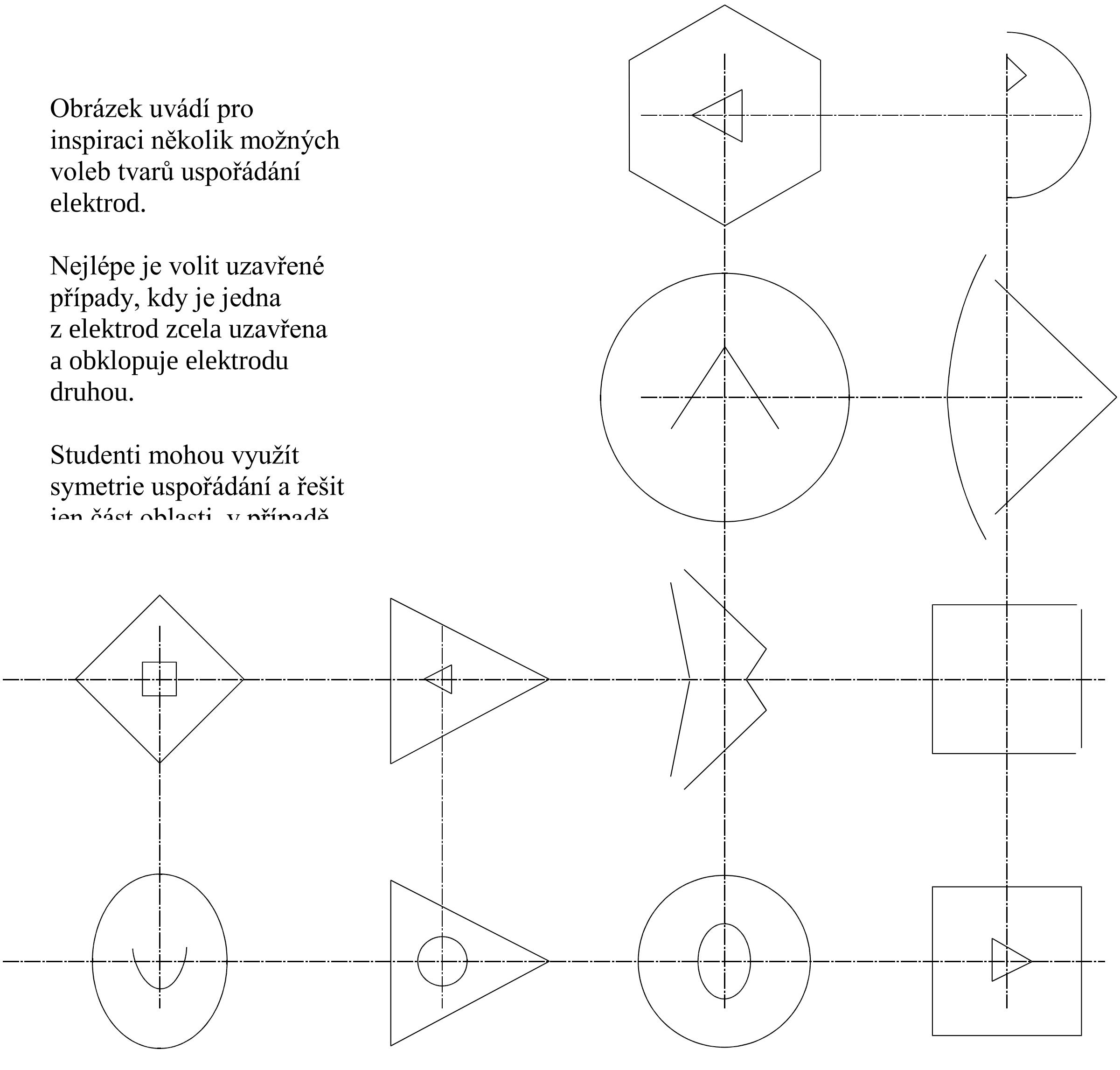
7. Ve stejném prostorovém bodě, jako v případě 5. zjistěte velikost intenzity elektrického pole.

8. Odhadněte kapacitu uspořádání elektrod.

Obrázek uvádí pro inspiraci několik možných voleb tvarů uspořádání elektrod.

Nejlépe je volit uzavřené případy, kdy je jedna z elektrod zcela uzavřena a obklopuje elektrodu druhou.

Studenti mohou využít symetrie uspořádání a řešit jen část oblasti, v případě



CD-ROM

Video

Zvol video na CD, kde se nachází návod na konstrukci „křivočarých čtverečků“.

Další studijní zdroje na internetových stránkách

Stránky MIT:

http://ocw.mit.edu/index.html - hlavní stránka Massachusetts Institute of Technology

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/index.htm#both – hlavní stránka fakulty: Electrical Engineering and Computer Science

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Electromagnetics-and-ApplicationsFall2002/LectureNotes/index.htm - Lecture Notes

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Electromagnetics-and-ApplicationsFall2002/MovieDemonstrations/index.htm - Movie Demonstrations

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Electromagnetics-and-ApplicationsFall2002/DownloadthisCourse/index.htm - Download this Course

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Fall-2005/CourseHome/index.htm problematika Electromagnetics and Applications

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Fall-2005/LectureNotes/index.htm - Lecture Notes

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Fall-2005/Assignments/index.htm - Assignments

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Fall-2005/VideoLectures/index.htm - Video Lectures

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-630Fall-2006/CourseHome/index.htm - Electromagnetics, Fall 2006

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-630Fall-2006/Tools/index.htm - Tools

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-630Fall-2006/Assignments/index.htm - Assignments

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-630Fall-2006/Exams/index.htm - Exams

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-632Electromagnetic-Wave-TheorySpring2003/CourseHome/index.htm - Electromagnetic Wave Theory, Spring 2003

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-632Electromagnetic-Wave-TheorySpring2003/Assignments/index.htm- Assignments

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-632Electromagnetic-Wave-TheorySpring2003/Tools/index.htm - Tools

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-635Advanced-ElectromagnetismSpring2003/CourseHome/index.htm - Advanced Electromagnetism, Spring 2003

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-635Advanced-ElectromagnetismSpring2003/LectureNotes/index.htm - Lecture Notes

	http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-635Advanced-ElectromagnetismSpring2003/Tools/index.htm - Tools
	http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/CourseHome/index.htm - Electromagnetic Fields, Forces, and Motion, Spring 2005
	http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/325D0A17-FDC9-4678-92FE-3F6AEAB3B545/0/final1.pdf - final exam
	http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/Assignments/index.htm -Assignments
	http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/Exams/index.htm - Exams
	http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/Readings/index.htm - Readings
	http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/Videos/index.htm - Videos
Stránky IGTE	http://www.igte.tugraz.at/index_en.html - hlavní stránka Institute for Fundamentals and theory in Electrical Engineering http://www.igte.tugraz.at/index_en.html - animace
AMOS e-learning system	http://www.eamos.cz/amos/index.php -hlavní stránka systému AMOS http://www.eamos.cz/amos/kat_fyz/ - stránka katedry http://www.eamos.cz/amos/kat_fyz/modules/low/kurz_text.php?id_kap=1&kod_kurzu=kat_fyz_5733 – zajímavé materiály pro elektromagnetismus
ÚFI VUT Brno	http://physics.fme.vutbr.cz/ufi.php?Id=15 – hlavní stránka Ústavu fyzikálního inženýrství http://physics.fme.vutbr.cz/ufi.php?Action=0&Id=114 – stránky opor z fyziky, zahrnující i elektromagnetismus
Slavní fyzikové	http://www.edunet.cz/fyzikove/Index.html - něco z historie osobností fyziky, potažmo elektromagnetismu
OU Ostrava	http://artemis.osu.cz/mmmat - jednoduché základy matematiky, pro tento kurz má zvláště význam kapitola 8 – diferenciální operátory

1. ZÁKLADNÍ POJMY Z ELEKTROMAGNETISMU

1.1. Fyzikální představy elektromagnetického pole

Čas ke studiu: 4 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojmy: elektromagnetické pole, foton, korpuskulárně vlnový dualismus.
- pochopit vývoj elektromagnetismu od prvních poznatků po dnešek
- vlastnosti elektromagnetického pole

Výklad

❑ Pojem elektromagnetické pole

Za zhruba dvěstě let bouřlivého rozvoje fyziky se z ní vynořuje několik částí, které si zasluhuji, aby jim bylo věnováno tolik času a prostoru ke zkoumání, že se vyprofilovaly v samostatné vědní obory. Nahlédnutím do kterékoliv učebnice, respektive do vícero knih kurzu fyziky si lze udělat obrázek o rozsahu jednotlivých takto samostatně profilovaných prvků této vědy. Nejrozsáhlejší kapitoly fyziky se zabývají samozřejmě pohybem hmotných částic, dále naukou o teple, astronomií ale také elektromagnetismem a jeho součástí optikou. Během vývoje těchto vědeckých disciplín byla objevena spousta zákonů, které tvoří matematický základ pro zkoumání problému té které disciplíny. Pro pohyb hmotných částic jsou podstatné Newtonovy rovnice, pro astronomii Keplerovy zákony pro elektromagnetismus rovnice Maxwellovy.

Účinky zdrojů elektromagnetismu vytvářejí v jejich okolí elektromagnetické pole. Zobecněný fyzikální pojem pole patří mezi fyzikální pojmy základní a je tedy těžko definovatelný pomocí fyzikálních pojmů obecnějších. Literatura definuje pole jako *časově parametrické zobrazení bodů trojrozměrného prostoru do prostoru fyzikálních veličin, který může být prostorem skalárním, vektorovým nebo tenzorovým, v závislosti na transformačních vlastnostech příslušných fyzikálních veličin vzhledem k ortogonálním transformacím.* Původ slova pole vznikl údajně na základě podobnosti šipek vektorů s klasy obilného pole.

CD-ROM

A1 **Výpisky z učiva – klikni na animaci A1**

Elektromagnetické pole může být jednak různě rozloženo v prostoru, jednak může nabývat různých hodnot v různých časech. Obecně může být tento prostor trojrozměrný. Například od vysílací antény se elektromagnetické pole šíří ve vlnoplochách různých tvarů (válcové, kulové, rovinné) do volného trojrozměrného prostoru.

Každému bodu trojrozměrného fyzikálního prostoru je přiřazena tzv. polní veličina. Podle toho, zda je polní veličina skalár, vektor, tenzor nebo spinor (dvousložkový komplexní vektor, vystupující v rovnicích pro částice se spinem), hovoříme o poli skalárním, vektorovém atd. V podstatě i skalární a vektorové pole jsou poli tenzorovými, protože skalár a vektor jsou vlastně tenzory příslušných řádů.

Například

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

je tenzor permitivity. Zápis má tvar matice, a význam zápisu lze vysvětlit na praktickém použití veličiny:

$$\mathbf{D} = \underline{\underline{\varepsilon}}\mathbf{E} \tag{1.2}$$

$$\begin{vmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

přičemž vektorové veličiny $\mathbf{E}$ a $\mathbf{D}$ jsou vyjádřeny ve složkách

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{u}_x + E_y\mathbf{u}_y + E_z\mathbf{u}_z \quad \text{a} \quad \mathbf{D} = D_x\mathbf{u}_x + D_y\mathbf{u}_y + D_z\mathbf{u}_z \tag{1.4}$$

kde $\mathbf{u}_{x\,(y,z)}$ jsou jednotkové vektory ve směrech souřadnic x, y, a z. Složky E_x, E_y, E_z, D_x, D_y,

D_z jsou veličiny skalární.

V případě elektromagnetických polí jsou polními veličinami především intenzity (např. el. nebo mag. pole), které vyvolají silové působení na příslušnou testovací částici (např. náboj F = E·Q). V širším smyslu může být ale polní veličinou např. potenciál.

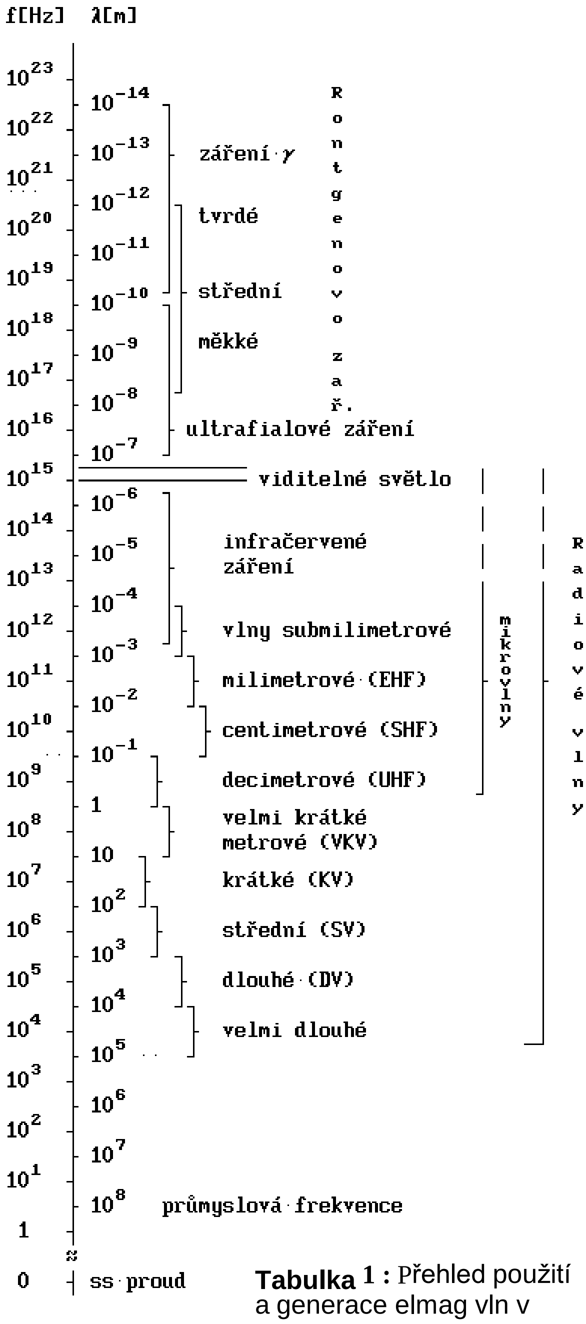
Konkrétně elektromagnetické pole je např. definováno jako *forma existence hmoty, charakterizovaná schopností šířit se ve vakuu rychlostí* 3.10^8 *m/s a vykazující silové účinky na částice s nábojem*, nebo jako *forma hmoty, která má svou objektivní realitu.* Z definic jsou zřejmé některé vlastnosti elektromag. pole. Elekktomagnetické pole se skutečně vyznačuje určitými vlastnostmi

1. ve vakuu se šíří konstatní rychlosti světla

$$c = 1/\sqrt{(\mu_o\varepsilon_o)}, \tag{1.5}$$

2. vykazuje silové účinky na náboj,
3. je formou hmoty,
4. spojitě vyplňuje prostor,

1) může se nacházet nejen ve vakuu ale i v pevném, kapalném nebo plynném dielektriku, vodiči nebo polovodiči,
2) v tomtéž objemu může existovat více různých polí (např. elektromagnetické a gravitační),
3) vyznačuje se tzv. elektromagnetickým pohybem, který můžeme redukovat na nižší formy pohybu, např. na mechanický,
4) je nositelem energie *($W = mc^2$)* a platí pro něj zákon zachování energie, a také zákon zachování hmotnosti, hybnosti apod.,
5) má relativní charakter - můžeme volit různé souřadné soustavy.



Tabulka 1 : Přehled použití a generace elmag vln v závislosti na kmitočtu

Podle účinků na částici s nábojem je zvykem dělit elektromagnetické pole na pole elektrické a pole magnetické. Toto dělení je však pouze formální pro usnadnění výpočtů a uvedená pole jsou nerozlučně spojená. Podle charakteru silového působení potom dělíme elementární částice na částice se záporným a částice s kladným nábojem. Částice, které tuto vlastnost nemají nazýváme elektricky neutrální (neutron, neutrino).

Důležitou vlastností elektromagnetického pole je skutečnost, že je toto pole všudypřítomné. Setkáváme se s ním v běžném životě v řadě forem, ať již jako se světelným nebo tepelným zářením, nebo s vlnami v oblasti radiotechniky apod. Přehled rozsáhlejšího spektra elmag. záření je v tabulce 1. Většinou si uvědomujeme jen existenci polí, která lze zjistit buď přímo lidskými smysly nebo zprostředkovaně pomocí běžně dostupného technického zařízení (radiový přijímač apod.). (Přesto se vyskytly případy, kdy jednotlivci tvrdili, že vnímají rozhlasové stanice i bez přijímače, ale tyto případy nejsou ověřeny.) Elektromagnetické záření zaznamenatelné lidskými smysly má totiž jen omezené spektrum. Je to konečně pro člověka velmi dobré, jinak by jeho nervy byly elektromagnetickým polem přetíženy tak, jako např. hlukem ve městě. Elektromagnetické pole může na organismus ale působit skrytě a tak vyvolávat jeho zdravotní problémy. Neustále více a více jsme obklopování elektromagnetickými vlnami uměle vysílanými nesčetnými vysílacími stanicemi na celém světě. Kromě toho jsme obklopeni atmosférickými přírodními elektromagnetickými poli a jeho poruchami. Životní prostor člověka je tedy naplněn elektromagnetickým polem z řady dílčích zářičů, jejichž účinky nemusí být samostatně lidskému organismu nijak škodlivé, jejich složením však může dojít i k vlivu na tělesné, ale i psychické zdraví člověka. Tuto různých polí přítomných v přírodě nazýváme, analogicky s plynnými nečistotami ve vzduchu, elektromagnetický smog (z anglického smoke + fog). Z elektrického hlediska může vlivem smogu dojít ke vzniku zvýšené *objemové* konduktivity dielektrika.

Čím více je používáno elektrospotřebičů, včetně mobilních telefonů, vysílaček, zapalování aut atd., tí větší je zamoření životního prostředí elektromagnetickým smogem. Provozovatele zařízení sice často tvrdí, že ohrožení lidí a techniky nezapřičinili, protože jejich vysílaný výkon je malý, ovšem uvážíme-li kumulaci velkého množství takovýchto malých zdrojů, jejich výsledné účinky mohou být obrovské. A to jak zatížení lidského organistmu, tak i techniky, především elektronických přístrojů. Rušení se k těmto přístrojům dostává buď elektromagnetickým vlněním z vnějšího prostoru nebo po síti. Hovoříme o potřebě EMC (elektromagnetické kompatibility).

Co působí megnetické pole není úplně zřejmé. Vzhledem k tomu, že zdroji magnetického pole mohou být pouze proudy posuvné nebo vedené, obíhají zřejmě hluboko pod zemskou kůrou proudy ne zcela jasného původu. Indukce magnetického pole se pohybuje od 30μT na rovníku do 70μT na pólech. V našich zeměpisných podmínkách je to asi 45- 50μT. Ve srovná ní s umělými poli s nimiž se každá z nás může setkat je to asi 200 krát více, než je magnetické pole pod typickým vedením vysokého napětí. Zemské magnetické pole se během dne a noci poměrně pravidelně mění - změny jsou o 0,01 μT až o 0,03 μT a jsou způsobeny změnami fotoionizace molekul v horních vrstvách atmosféry. Náhlé změny, přesahující často 10 μT, souvisí s mimořádnou sluneční aktivitou.

Také elektrostatické pole Země má určitou hodnotu, pohybující se při zemském povrchu kolem 120 V/m. Siločáry tohoto pole vstupuji kolmo do povrchu Země. Také tuto hodnotu můžeme srovnat s hodnotou uměle vytvořené intenzity elektrického pole s nímž se v praxi můžeme setkat například pod dráty 12 kV vedení elektrického rozvodu. Hodnota elektrostatického pozadí, tj. přirodní pole země je přibližně třikrát vyšší. Pokládáme-li Zemi za vodič, vyplývá z této hodnoty, že na zemském povrchu je záporný náboj s hustotou zhruba 10^{-3} C/km^2 . Tento náboj vzniká současným působením ionizujících srážek molekul vzduchu s protony ve Van Allenově radiačním pásu a již zmíněnou fotoionizací molekul. I zde se projevují denní čtyřiadvacetihodinové fluktuace obdobné fluktuacím magnetického pole,související. Mohutné fluktuace v ionosféře souvisejí se sluneční aktivitou. Bouřky vyvolávají extrémně silná, místně omezená elektrická pole. Pro vznik typického blesku - na zemi je jich kolem 40 miliónu denně - je potřeba elektrické pole kolem 3MV/m, aby došlo k ionizaci vzduchu. Proudový impuls má při blesku špičkovou hodnotu 10-20 kiloampérů.

❑ Historický vývoj poznatků z elektromagnetismu (Důležité mezníky):

Povídání ke kávě – NEPOVINNÉ

Telefon aneb jak vše začalo...

Alexander Graham Bell vlastně nezamýšlel vynalézt telefon. Původně chtěl vyvinout násobný telegraf, přístroj, který by umožnil najednou přenést více zpráv - Bell přístroj pojmenoval *harmonický telegraf.*

Na dovolené v roce 1874 v Ontariu Bell sestrojil *ušní fonoautograf.* Použil stéblo sena a ucho mrtvého muže. Když Bell mluvil do ucha, stéblo přenášelo zvukové vlny. Bell začal uvažovat o přenosu zvukových vln elektřinou.

V červnu 1875 (2. 6.) zjistil přenos zvuku mezi 2 píšťalami v různých místnostech. Bell zjistil, že se zvuk podobný hlasu přenáší i po přerušení proudu, který byl následně generován slabým magnetickým polem. Princip telefonu byl na světě a Bell mohl v září 1875 začít psát podklady pro podání patentové přihlášky.

15. 2. 1876 ve svých 29 letech si Bell podal patent na **vynález telefonu** (ve stejný den o pár hodin později tak učinil i Elisha Gray). Patent obdržel Bell 7. 3. 1876. V té době ještě přístroj přenášet hlas neumožňoval. První přenos hlasu *Bell* uskutečnil 10. 3. 1876,

kdy jeho spolupracovník Watson uslyšel z přístroje památná slova: "Pane Watsone, přijďte sem. Potřebuji vás."

Alexander Graham Bell představil svůj telefon 25. 6. 1876 na stoleté výstavě v Philadephii (Centennial Exhibition). Telefon se stal hlavním exponátem výstavy uspořádané ke 100. výročí podepsání Deklarace nezávislosti.

zdroj converter.cz In.: http://www.skype.cz/produkty/index.htm

Nejstaršími projevy elektromagnetismu jsou bezesporu účinky elektromagnetického pole Země, které existuje sice od samého počátku Země, ovšem lidé si tyto účinky začali uvědomovat mnohem později, především z nerostem magnetitem (Fe_3O_4), kterýmá schopnost přitahovat nebo odpuzovat železné předměty. Vysvětlení magnetických sil tehdy lidé nenacházeli a podobně jako jiné děje v přírodě je přisuzovali nadpřirozeným silám.

Některé mezníky ve vývoji elektromagnetismu:

- 1.st.n.l., Plinius starší, římský historik a autor encyklopedie "Historia Naturalis" uvádí, jak pasák ovcí a dobytka Magnes na sobě poznal přitažlivé síly magnetické rudy, po které chodil v botách se železnými hřebíky a sponami; jméno tohoto pasáka bylo podle tohoto zdroje základem pro pojmenování magnetu a magnetismu, různé literatury ale odvozují původ slova magnetismus různě

- 2.st.n.l. lékař Galenos používal magnetitových úlomků ve formě zábalů k vyvolání rychlejší perilstatiky střevní při zácpě

- 1840 M.Faraday - zavádí pojem pole do elektrostatiky, jako pomocný pojem. Faraday vytvořil dodnes používanou představu o el. a mag. silových čarách a trubicích

- 1860 ÷ 65 J.C.Maxwell buduje na Faradayových představách teorii elmag pole, předpovídá existenci elektromagnetických vln

- 1887 H.Hertz experimentálně prokazuje existenci elmag. vln

- 1895 A.S. Popov předvedl svůj první přijímač elektromagnetických vln na zasedání Ruské fyzikálně chemické společnosti

- 1899 P.Lebeděv experimentálně prokázal hybnost elektromagnetické vlny (i světelné) a možnost předávat energii jinému tělesu tlakem světelného záření na pevné látky; (v roce 1907 totéž tlakem na plyny - pohybem Crokesova mlýnku)

- 1900 M.Planck položil základ k rozvoji kvantové fyziky, podle něhož je energie oscilátoru s frekvencí n kvantová. Tzn. že energie emitovaná nebo absorbovaná oscilátorem může nabývat jen hodnoty $0, h\nu, 2h\nu$.....

- 1905 A.Einstein publikuje speciální teorii relativity. Opustil představu nevažitelného "etéru" - nositele elektromagnetických dějů v absolutním prostoru; (předtím představa, že síly působí na dálku v prostoru jednou provždy daném a neměnném); uzavřel tak soubor znalostí klasické fyziky

- 1920 pravidelné rozhlasové programy začíná vysílat v Americe stanice v Pittsburgu, v Evropě Marconiho společnost v Chelmsfordu v Anglii

- 1925 V únoru byla ve Strašnicích instalována rozhlasová stanice 0,5kW, dodaná francouzskou firmou SFR

- 1929 Ve Svinově u Ostravy postavena stanice s vysílačem 10 kW vyrobeným v Anglii firmou International Standard Electric Corp

- 1953 1.května první pokusné vysílání televize z vysílače na Petříně.

Vývoj elektrotechniky byl velmi rychlý, zvláště v posledních létech. Generace mého otce poznala televizi až v dospělosti, podobně to bylo s generací mých prarodičů a rozhlasem. Dnes ovládájí obojí bez větších potíží i předškolní děti. Velmi rychle se vyvíjela i oblast teoretické elektrotechniky, nazývaná běžně jako teorie elektromagnetického pole, tedy v podstatě elektromagetismus. Postupně byly jeho zákonitosti objevovány, ale i korigován již ty objevené. Změnily se poznatky o elementárních částečkách vedoucích proud ve vodiči apod. Změnil se ale i pohled na podstatu elektromagnetického pole. Přestože v některých případech stále přijímáme Rutherfordův a Bohrův model atomu, v řadě případů jej musíme opustit. Subatomové částice nejsou stojícími, nebo obíhajícími kuličkami s přesně určenou polohou v každém časovém okamžiku, ale podle kvantové teorie je elektron nepostižitelný v prostoru ani v rychlosti (představujeme si ho spíše jako ohon komety obíhající kolem jádra atomu). Atom již není nedělitelný, ale je složen z několika dalších subnukleárních částic v komplikovaných strukturách. Vlnění pole a částice pak v kvantové teorii nejsou dvě oddělené formy hmoty, které se navzájem vylučují, ale naopak se doplňují a vyskytují se současně. Elektromagnetické záření má jak vlnové, tak i korpuskulární (proud částic) vlastnosti, stejně jako částice má i vlastnosti vlnové – tzv. korpuskulárně vlnový dualismus. Elmag pole se při vyšší frekvenci chová jako částice, při nižší jako pole. Rovnice, které z vývoje elektromagnetismu vzešly nám dnes umožňují exaktně popsat a analyticky nebo za pomocí počítačů pro účely praxe dobře analyzovat a modelovat pole a na tomto základě i provádět optimalizaci el. zařízení.

M.Planck v souvislosti s kvantovou teorií objevil, že výměna elektromagnetické zářivé energie se provádí pouze po celočíselných násobcích určitého minimálního množství energie. Minimální množství (kvantum) energie je pro každou frekvenci (v oblasti viditelného světla pro každou barvu) jiné. Minimální kvantum bylo nazváno *foton.*

Foton

Foton je elementární nedělitelné kvantum elmag záření

$$W = h.f \tag{1.6}$$

h je Planckova konstanta $h = 6{,}625.10^{-34}\ Js$.

Energie fotonu je úměrná jeho frekvenci, analogicky s označením fekvenční závislosti charakteru vlnění v oblasti světla rozličujeme fotóny z různou energií veličinou barva. Dva fotóny s různou energií pohybující se stejnou rychlostí světla se tedy liší barvou (v přeneseném smyslu slova).

Foton existuje pouze v pohybu, přičemž se vždy pohybuje rychlostí světla. Má proto nulovou klidovou hmotnost. Důsledkem jeho neustálého pohybu je však nenulová energie W.

Na základě relativistického vztahu mezi energií a hmotností, tzn.

$$W = mc^2 \tag{1.7}$$

lze fotonu přiřadit také určitou hmotnost (nejedná se však o klidovou hmotnost, která je nulová, ale o setrvačnou hmotnost související s pohybem). Tato energie (a tedy i hmotnost) způsobuje, že na foton působí gravitace dle obecné teorie relativity a on sám gravitačně působí na okolí. Tyto jevy byly potvrzeny pozorováním.

Z tohoto vztahu si každý může vypočíst, jakou hmotnost fotónů jeho mobilní telefon vyzáří za za sekundu $m = W/c^2$ kg fotónů.

Teorie relativity přináší pro výpočet energie pohybující se částice vztah

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{1.8}$$

kde m_0 je hmotnost částice v klidu – v tomto případě je klidová hmotnost fotonu je nulová, tzn. $m_0 = 0$, p je hybnost částice (v tomto případě fotónu).

$$W = \sqrt{p^2 c^2} \overset{!}{=} hf$$

tedy $$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad (1.9)$$

kde λ je vlnová délka $\lambda = c/f$.

Z uvedených vztahů můžeme určit setrvačnou hmotnost fotónu, pokud uvážíme, že $p = mc$, dostaneme

$$m = \frac{hf}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} \qquad (1.10)$$

Z principu korpuskulárně vlnového dualismu lze fotón chápat jako vlnu (charakterizován vlnovou délkou nabývající libovolnou hodnotu, která není omezena ani shora, ani zdola), nebo jako těleso (při záření černého tělesa a při dopadu záření na povrch - fotoelektrický jev). Dopadne-li elektrické záření na volné nabité částice (elektrony) může dojít ke dvěma jevům:

pružně odrazí a opět se rozletí, přičemž dojde k výměně energie a hybnosti mezi fotonem a částicí a ke změně vlnopvé délky záření

má-li dopadající záření velkou vlnovou délku, rozkmitá se částice příslušným vlněním (Comptonův jev), přičemž projevuje foton jak vlnovou, tak částicovou povahu - čím je vlnová délka menší, tím víc se podobá tělesu, čím je větší, tím víc se podobá vlně.

Dopadá-li světlo na lopatku velmi lehkého Crokesova mlýnku (Sluneční mlýn) o hmotnosti m, změní rychlost mlýnku o dv, tzn. že předá lopatkám část hybnosti $m{\cdot}dv = c{\cdot}dm_v = dW/c$, kde dm_v je změna hmotnosti vlny, dW změna její energie. Hybnost vlny je W/c. Označuje-li W energii vlnění za 1 sec, dopadající na 1m plochy, pak je při úplném pohlcení *tlak vlny* roven W/c a při úplném odrazu $2W/c$ (podle zákona zachování hybnosti). Crookesův mlýnek má jednu polovinu lopatky obarvenou černě a druhá je lesklá. Foton je na černé straně pohlcen a předá lopatce mlýnu energii $W = hf$. Na druhé, lesklé, straně se však foton odrazí a tak předá lopatce energii dvakrát větší. Potom se tedy mlýnské kolo začne točit. Jeden foton tak předá hybnost ekvivalentní jeho energii. Z definice hybnosti jako $p = mv$. Podle Einsteinovy rovnice ekvivalence hmoty a energie $W = mc^2$ pak dosadíme do původního vzorce $p = mc = \frac{hf}{c}$. Toto je tedy hybnost předaná fotonem slunečnímu mlýnu.

Fotony vznikají mnoha způsoby, například vyzářením při přechodu elektronu mezi orbitálními hladinami, či anihilaci. Koherentní svazek záření vytvářejí speciální přístroje jako maser a laser. V populárních literaturách se zjednodušeně přibližuje předávaní energie fotónu příkladem míče hozeného z jedné lodičky do druhé. Míči – fotónu – je házejícím v jedné lodičce předána energie, kterou tento předá chytajícímu ve druhé lodičce. Vlivem této energie vykonají obě lodičky pohyb z původního místa.

Σ Shrnutí pojmů 1.1.

Polní veličina popisuje vlastnosti pole, může mít podobu tenzoru, vektoru nebo skaláru.

Elektromagnetický smog - aerokoloidální systém, který vzniká v ovzduší chemickými reakcemi plynných nečistot.

Korpuskulárně vlnový dualismus - elektromagnetické záření má jak vlnové, tak i korpuskulární (proud částic) vlastnosti, stejně jako částice má i vlastnosti vlnové.

Foton je elementární nedělitelné kvantum elektromagnetického záření.

Otázky 1.1.

1. Šíří se elektromagnetické pole vždy rychlosti světla?
2. Jak dělíme pole podle účinků na částici s nábojem?
3. V jakém rozsahu se pohybují hodnoty velikosti zemského magnetického pole?
4. Jaká je klidová hmotnost fotonu?

1.2. Základní fyzikální veličiny a rovnice v elektromagnetismu

Čas ke studiu: 10 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat veličiny diferenciální a integrální
- používat materiálové parametry
- vyřešit příklady, které lze popsat Gaussovou větou
- napsat Maxwellovy rovnice a porozumět jim

Při práci s rovnicemi popisujícími elektromagnetické pole se setkáme především s veličinami diferenciálními (veličiny měrné nebo také hustoty), které popisují stav pole v jednom konkrétním bodě a s veličinami integrálními (bilančními), zachycujícími polní veličinu např. na konečné ploše, v konečném objemu nebo mezi dvěma body čáry. Veličiny jsou soustředěny v tabulce 2.

Tyto tabulky pochopitelně nezahrnují všechny veličiny a parametry, používané v elektromagnetických výpočtech. Jiné dělení je rozděluje vystředěné makroskopické veličiny na:

a) veličiny pole E,B,φ

b) veličiny zdrojové neboli budicí J,ρ apod.

c) veličiny kvantifikující vlastnosti prostředí ε,μ,γ aj.

d) veličiny určité soustavy vyplývající z rozměrů a vlastností jejich částí, např. R,L,C

CD-ROM

Video V1

Video přehrávejte programem Microsoft PowerPoint. Doporučuji volit Shift+F5 pro prezentaci z aktuálního snímku nebo tuto prezentaci zvolit ikonou v levém spodním rohu obrazovky.

Tabulka 2:

Označení diferenciální veličiny	**E**	**H**	**D**	**B**	**J**	ρ	σ	τ
	vektorové veličiny					skalární veličiny		
Název diferenc. veličiny	intenzita elektrického pole	intenzita magnetického pole	elektrická indukce	magnetická indukce	plošná hustota prostorového proudu	objemová hustota náboje	plošná hustota náboje	liniová (čárová) hustota náboje
Jednotka	V/m	A/m	$As/m^2=$ $=C/m^2$	$Vs/m^2 = T$	A/m^2	$As/m^3=$ $=C/m^3$	$As/m^2=C/m^2$	As/m = C/m
Odpovídající integrální veličina	φ, U	φ_m, Um	Ψ_D	Φ	I	Q		
	skalární veličiny							
Název integrální velič.	skalární elektrický potenciál, elektrické napětí	skalární magnetický potenciál, magnetické napětí	indukční tok elektrický	indukční tok magnetický	elektrický proud	elektrický náboj		
Jednotka	V	A	As = C	Vs = Wb	A	C		
Převodní vztah	**E** = -grad φ $\varphi = -\int \mathbf{E}.d\mathbf{l}$	H = -grad φ_m $\varphi_m = -\int \mathbf{H}.d\mathbf{l}$	$\Psi_D = \int D.ds$	$\Phi = \int B.ds$	$I = \int J.ds$	$\rho = \frac{dQ}{dV}$ $Q = \int \rho \cdot dV$	$\sigma = \frac{dQ}{dS}$ $Q = \int \sigma \cdot dS$	$\tau = \frac{dQ}{dl}$ $Q = \int \tau \cdot dl$
	intenzity pole potenciály		hustoty toku toky (proud)			hustoty náboje náboj		

Materiálové parametry jsou v podstatě parametry úměrnosti dvou polních veličin. V matematickém vyjádření :

$$D = \varepsilon \cdot E \qquad (1.11)$$

$$B = \mu \cdot H \qquad (1.12)$$

$$J = \gamma \cdot E \qquad (1.13)$$

Vztah (1.13) je nazýván Ohmův zákon v diferenciálním tvaru.

V tomto kurzu se nebudeme příliš zabývat mikroskopickým polem. Malé změny a jevy jsou většinou pro technickou praxi zanedbatelné. Tyto jevy a jejich kvantitativní účinky nahradíme jistými statisticky středními hodnotami a budeme počítat tedy s *vyhlazenými (vystředěnými) makroskopickými veličinami.* Vystředění provedeme integrováním těchto veličin přes malý zvolený objem a malý časový úsek $2\Delta t$. Integrály potom podělíme tímto objemem a časem. Nejjednodušším příkladem vystředění v objemu je výpočet hustoty náboje. Za elementární náboj považujeme náboj elektronu (resp. protonu). Ten je ale vzhledem k makroskopickému chápání velmi malý, makroskopický náboj vzhledem k němu považujeme za dostatečně velký a lze jej tedy dělit na části dQ v malých prostorech dV. Potom definujeme objemovou hustotu náboje poměrem

$$\rho = dQ \,/\, dV \qquad (1.14)$$

přičemž ρ je tedy průměrná objemová hustota náboje. dQ musí být vyhlazeno i v čase. Zastavme se, ale ještě u požadavků na velikost objemu dV. Je samozřejmé, že abychom mohli vypočíst r jako diferenciální veličinu v jistém bodě, musí být dV co nejmenší, a to takový, aby v něm byly co nejmenší nerovnoměrnosti sledované fyzikální veličiny (tedy dQ). Na druhé straně nesmí být tento objem (podobně u plošné hustoty plocha a liniové hustoty délkový element) nulový nebo tak malý, že by nezahrnoval dostatečně velký počet nabitých částic. (Např. krychlička mědi o hraně 10^{-4} mm obsahuje 10^{8} volných elektronů). Nemluvě již vůbec o případu, kdy by objem dV byl srovnatelný s objemem volného prostoru mezi jednotlivými náboji a zachycoval by jen jeden nebo ani jeden náboj.

Vystředění v objemu lze obecně vyjádřit vztahem

$$A = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} a \cdot dV \qquad (1.15)$$

kde a je mikroskopická veličina, A je makroskopická vystředěná veličina v objemu ΔV.

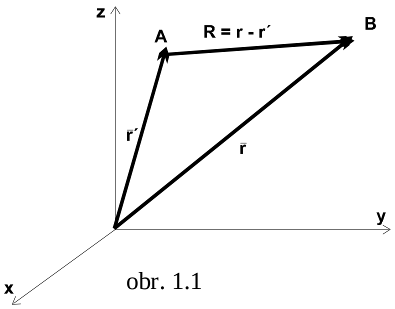
Ještě jeden důležitý problém je spojen s rozměrnosti prostoru a rychlosti šíření vlny. Dojde-li totiž v jednom bpdě peostoru ke změně stavu částice, „dovíme“ se o této informaci ve vzdálenosti rozměr R = r - r’ (v modulu $R = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}\ ]$ až za určitou dobu, za kterou k nám tato informace o změně stavu dorazí – a to rychlosti světla. Změní-li se například v bodě A(r’) v čase t' velikost náboje nebo velikost potenciálu φ_A, bude v bodě B po nějakou dobu stále stejná hodnota, a až za určitou dobu se tato hodnota změní. Tudo dobu nazýváme retardační dobou $\tau = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$

Velmi často se budeme s retardací energie setkávat u šíření vln ve vzdálené oblasti od dipólu. Po odtržení myšlených siločar od dipólu ztrácí dipól na pole znázorněné těmito siločárami vliv. V matematických výrazech je tato skutečnost reprezentována například charakteristickým členem e^{-jkr} , kde k je konstanta šíření. Např. opožděný (retardovaný) skalární potenciál lze zapsat vztahem

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_V \frac{\rho(x', t-(R/c))}{R} \cdot dV \qquad (1.16)$$

nebo $$. \quad \underline{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_V \underline{\rho} \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot dV$$

V souvislosti s veličinami a parametry, vyskytujícími se v rovnicích pro popis polí je třeba si ujasnit ještě pojmy homogenní, lineární a izotropní.



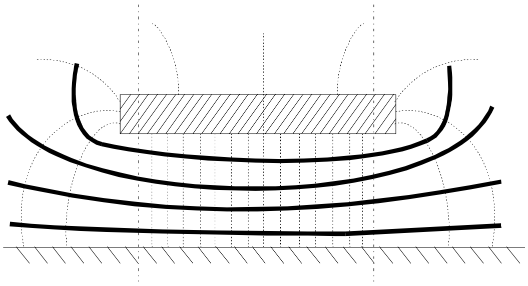
obr. 1.1

Homogenní prostředí je takové, které má materiálové konstanty ve všech bodech sledované oblasti stejné, tedy např. $\varepsilon \neq f(\mathrm{r})$, nebo $\mu \neq f(\mathrm{r})$, popř. $\gamma \neq f(\mathrm{r})$. POZOR! Nezaměňujte pojem homogenní prostředí s pojmem homogenní pole. *Homogenní pole* je takové, které má siločáry, popř. indukční čáry rovnoběžné. Je tedy intenzita, resp. indukce takového pole ve všech bodech stejná a platí $\mathrm{B} \neq f(\mathrm{r})$, $\mathrm{H} \neq f(\mathrm{r})$. I v homogenním prostředí např. vzduchu může být, a ve většině případů i skutečně je pole nehomogenní. Mezi dostatečně rozlehlými deskami kondenzátoru je v části pole homogenní (na obr.1.2 mezi čerchovanými čárami), u okrajů desek se siločáry zakřivují a pole se stává nehomogenní.

Lineární prostředí je takové prostředí které je charakterizováno materiálovým parametrem, který je ve sledovaném rozsahu polních veličin skutečně konstantou, nezávislou na této polní veličině, např. $\varepsilon \neq f(\mathrm{E})$ nebo $\mu \neq f(\mathrm{H})$, $\gamma \neq f(\mathrm{E})$. V grafickém vyjádření jsou potom grafy závislosti *D* na *E* (obr.1.3), resp. *B* na *H* nebo *J* na *E* přímky.

Izotropním prostředím nazýváme takové prostředí, které má materiálové konstanty ve všech směrech stejné. Složka D_x v něm závisí pouze na E_x apod.

$$D_x = f(E_x)$$



obr. 1.2

V prostředí anizotropním závisí každá složka D obecně na všech třech složkách E a materiálový parametr má tvar tenzoru – viz vztah (1.3). Velmi známým případem anizotropie v magnetickém poli jsou různé magnetické vlastnosti ve směru, ve kterém byly válcovány a ve směru kolmém na směr válcování.

Disperzní prostředí je takové prostředí, v němž materiálové parametry závisí na frekvenci.

❑ Elektrický náboj

Jak již bylo řečeno v úvodních definicích jsou elektromagnetické jevy hmotné podstaty. Nejdůležitějším projevem elektricky nabité hmoty jsou potom silové interakce mezi náboji, a to jak náboji v klidu, tak i v pohybu (elektrický proud). *Elektrický náboj* ovšem hmotou, ani žádnou její formou není, ale je vlastnosti některých elementárních částic a to vlastnost mít vlastní elektromagnetické pole. Nelze od částice oddělit, neexistuje bez částice, která náboj nese (jehož vlastnosti je) a nemá tedy ani vlastní hmotnost ani hybnost. Z hlediska elektrotechniky je nejvýznamnější částicí hmoty nesoucí náboj *elektron*. Název elektron použil poprvé B.Franclin a pochází z řeckého slova elektron = jantar – vzniká totiž třením jantaru. (Kladný náboj vzniká třením skla,) Jeho náboj představuje z hlediska klasické elektrodynamiky nejmenší, dále nedělitelné množství elektřiny a je roven

$$e = -\,1{,}602.10^{-19}\ C.$$

Jednotkou je Coulomb *C*, v soustavě SI je *C* = *As*. Samozřejmě, že náboj protonu má stejnou hodnotu, ovšem s kladným znaménkem. Poznání polarity dvou nábojů, navzájem se přitahujících či odpuzujících, pochází z roku 1730 (Dufay) a jejich pojmenování a označení znaménkem je věcí dohody.

Vlastnosti náboje:

a) Náboj nemůže vznikat a zanikat, platí *zákon zachování náboje.* Pokud se v jistém uzavřeném objemu nachází elektrický náboj, nemůže se velikost tohoto náboje měnit jinak, než přitečením nebo úbytkem náboje přes plochu, obklopující tento objem. Pohyb tohoto náboje představuje elektrický proud a změna náboje v objemu za čas je zřídlem hustoty proudu ve smyslu rovnice kontinuity:

$$\mathit{div}\, \mathrm{J} = -\, d\rho / dt \qquad (1.17)$$

Pakliže těleso vykazuje vlastnost mít vlastní náboj je to uskutečněno rozdělením neutrální částice na dva stejné náboje opačné polarity. Náboje mohou opět rekombinovat a hmotné těleso se stává elektricky neutrální, to vyjadřuje konzervativnost náboje.

b) Suma všech hodnot kladných nábojů je v přírodě rovna sumě všech hodnot nábojů záporných, žádný z nich nepřevládá, příroda jako celek je *neutrální*. Podle principu *nábojové symetrie* existuje ke každé nabité částici *antičástice*, lišící se od ní pouze znaménkem.

c) Existuje jisté minimální kvantum náboje - náboj elektronu, které nelze dále dělit. (Podobně, jako nelze například dělit fyzicky desetihaléř, ačkoliv výpočtem např. úroků může vyjít i hodnota nižší než desetihaléř).

d) Ze zákona zachování náboje vyplývá, že náboj je *invariantní* ve všech pozorovaných soustavách. Pozorujeme-li náboj ze soustavy, která se vůči náboje nepohybuje, bude jeho velikost stejná, jako kdybychom jej pozorovali ze soustav, které se vůči náboji pohybují různou rychlostí.

Jak již bylo řečeno, v přírodě nemůže existovat samostatný jediný náboj. Pokud by tomu tak bylo, stejně bychom o jeho existenci nevěděli. Náboj se projevuje totiž silovými účinky na jiné náboje. V případě dvou nábojů již můžeme zjistit i to, zda jsou náboje stejné polarity (odpuzují se) nebo polarity opačné (přitahují se). Tyto silové účinky nemůžeme ještě přesně kvantifikovat. K tomu potřebujeme minimálně tři náboje Q_1,Q_2,Q_3. Potom podle Coulombova zákona ze tří rovnic vypočteme na základě změřených tří sil F_{12},F_{13},F_{23}, a znalosti vzdálenosti nábojů číselné hodnoty tří neznámých nábojů.

$$\left. F_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon R_{12}^2}\cdot \mathbf{u}_{12} \qquad F_{13} = \frac{Q_1 \cdot Q_3}{4\pi\varepsilon R_{13}^2}\cdot \mathbf{u}_{13} \qquad F_{23} = \frac{Q_2 \cdot Q_3}{4\pi\varepsilon R_{23}^2}\cdot \mathbf{u}_{23} \right\} \quad Q_1,Q_2,Q_3$$

Jak již bylo řečeno definujeme v makroskopické teorii tři druhy středních hodnot hustoty náboje

a to v prostoru objemovou hustotu náboje

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \cong \frac{dQ}{dV} \qquad (1.18)$$

na ploše plošnou hustotu náboje

$$\sigma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \cong \frac{dQ}{dS} \qquad (1.19)$$

na vlákně liniovou (čárovou) hustotu náboje

$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \cong \frac{dQ}{dl} \qquad (1.20)$$

Z těchto vyhlazených skalárních veličin můžeme inverzními vztahy vytvořit pole náboje Q nebo další skalární či vektorová pole. Inverzní vztahy pro Q jsou:

$$\mathrm{Q} = \int \rho \cdot dV \qquad \mathrm{Q} = \int \sigma \cdot dS \qquad \mathrm{Q} = \int \tau \cdot dl \qquad (1.21)$$

❑ Intenzita elektrického pole

V souvislosti s nábojem bylo řečeno, že elektromagnetické pole se projevuje prostřednictvím silového působení na náboj. Náboj se pohybuje určitým směrem "tažen" mechanickou silou určité velikosti. Vztah mezi touto silou a nábojem Q je přímo úměrný s konstantou, kterou můžeme označit E, a vzhledem k tomu, že určuje jak intenzívně je náboj vlivem této veličiny tažen nebo tlačen, nazýváme ji *intenzita elektrického pole*. Platí tedy vztah:

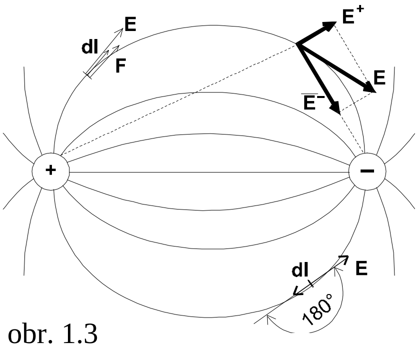
$$F = Q \cdot E \tag{1.22}$$

Intenzitu el.pole můžeme tedy definovat jako *sílu, jíž působí elektrostatické pole v daném bodě na jednotkový kladný zkušební náboj.* Ve vztahu jsou síla **F** a intenzita elektrického pole vektorové veličiny, násobeny skalárem Q, směr a smysl má tedy **E** stejný, jako vektor **F**. Rozměr

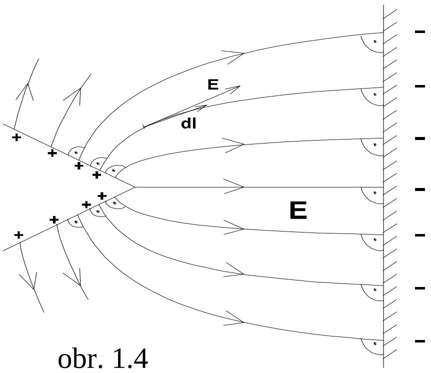
$$[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{newton}{coulomb} = \frac{Ws/m}{As} = \frac{V}{m}$$

Síla na elektron bude působit tedy proti směru elektrostatického pole, které na něj působí. V definici je uveden pojem zkušební náboj, je to náboj jehož hodnota je tak malá, že jím vytvořené pole se nesčítá s vnějším polem intenzity **E.** Vztah pro intenzitu **E** je v tomto případě chápat jako limitu:

$$\mathbf{E} = \lim_{Q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{Q} \tag{1.23}$$



obr. 1.3



obr. 1.4

Pole může být buzeno bodovými náboji nebo nabitými tělesy. U bodového náboje zobrazujeme pole siločárami, vycházejícími kolmo paprskovitě z náboje. Je-li v prostoru přítomno více nábojů, bude v každém bodě výsledná intenzita pole dána vektorovým součtem intenzit od jednotlivých nábojů. Obecně je tedy vektor intenzity v jistém bodě tečnou k siločáře, procházející tímto bodem. Toto platí i pro výslednou intenzitu soustavy nábojů - obr.1.3. Siločáry, vycházející z nabitých těles budou vždy kolmé k povrchům těchto těles, které představují ekvipotenciální plochy - obr.1.4. Obecně jsou siločáry vždy kolmé na ekvipotenciály a vytvářejí spolu tzv. *mapu pole.*

Vztah mezi potenciálem a intenzitou je vyjádřen následujícími inverzními vztahy. Znaménko –bude ještě v dalších kapitolách objasněno:

$$E = -\,grad\ \varphi \tag{1.24}$$

$$\varphi = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \tag{1.25}$$

Jestliže pohybujeme silou **F** nábojem po uzavřené dráze, vykonáme práci rovnou nule, což vyjadřuje *konzervativnost* elektrostatického pole.

$$A = \oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = Q_0 \cdot \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0 \tag{1.26}$$

Pokud provedeme cirkulaci vektoru E po uzavřené dráze bude tato nulová*:*

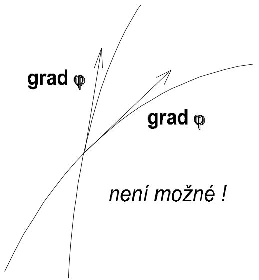
$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

Při pohybu tělesa se zkušebním nábojem Q_o po uzavřené dráze v elektrostatickém poli se nevykoná ani nespotřebuje žádná práce. Žádná práce se nevykoná ani při pohybu po libovolné dráze z jednoho místa ekvipotenciály do jiného místa stejné ekvipotenciály, jako by ekvipotenciála tvořila část integrační dráhy a uzavírala ji. V konzervativním poli nezávisí křivkový integrál na průběhu integrační dráhy.

Siločáry, kterými zobrazujeme elektrické pole jsou myšlené čáry, přesto jim přisuzujeme některé typické vlastnosti:

a) každá siločára začíná na + náboji a končí na - náboji, je tedy orientována. Čím větší je náboj, tím více siločar z něj vychází. Např. u hrotu obr.1.4.

b) siločáry se navzájem odpuzují; každým bodem prochází jen jedna siločára a siločáry se tedy nesmí křižovat. V každém bodě je totiž vektor intenzity pole tečnou k siločáře určující smysl přírůstku potenciálu a pokud by se v jednom bodě siločáry křižovaly, musely by v tomto bodě být dva vektory intenzity pole (obr.1.5) a tedy i dva různé gradienty potenciálu (tedy dva směry největšího přírůstku potenciálu), protože $E = - grad\ \varphi$.

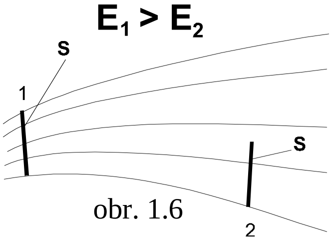


obr. 1.5

c) tvar siločar vyvolává představu, jakoby podél siločar působil podélný tah (napětí), který má snahu zkrátit siločáry a přiblížit k sobě el.náboje - obr.1.3. Siločáry a ekvipotenciály se bez příčiny ostře nelámou, ale jejich tvar se mění pozvolně jako bychom pozorovali řez povrchu nafouknutého balónku.

d) dráhy siločar jsou k nábojům pevně vázány - obr.1.4.

e) siločáry mají kvantitativní význam. Pokud jimi vyznačujeme trubice jednotkového toku, lze z jejich hustoty usoudit na velikost toku ve sledované oblasti. Elektrické pole znázorňujeme tak, že do malé plošky kolmé na směr siločar (obr.1.6) zakreslíme tolik siločar, aby byl podíl tohoto počtu siločar a velikosti plošky úměrný intenzitě pole v místě plošky.



obr. 1.6

U tvarově jednoduchých polí (bodového náboje, nabitého válce, deskového kondenzátoru) lze vypočíst velikost intenzity podle Gaussovy věty elektrostatiky. U složitějších polí se zpravidla počítá intenzita z prioritně počítaných potenciálů.

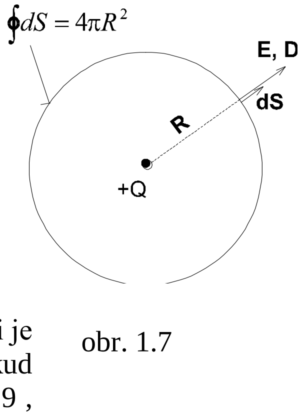
Gaussova věta elektrostatiky má tvar:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = Q \qquad (1.27)$$

případně tvar

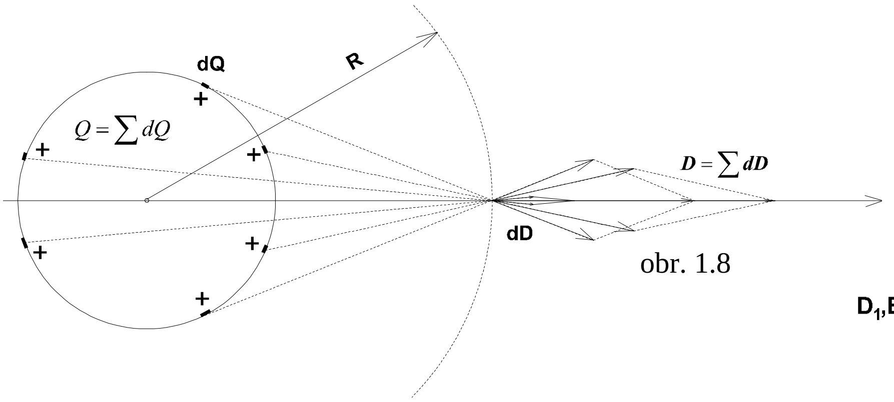
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q}{\varepsilon} \qquad (1.28)$$

Tyto vztahy mají obecnou platnost, ale s výhodou je používáme u problémů, u nichž známe tvar ekvipotenciál a siločar. Např. u bodového náboje, nebo nabité koule vycházejí siločáry paprskovitě z náboje, resp. ze středu koule. Volíme-li potom integrační plochu ve tvaru koule procházející bodem, v němž intenzitu pole hledáme (obr.1.7), budou vektory D (resp. E) a S kolineární a nemusíme do vztahu zahrnovat předpis, s nímž se v závislosti na poloze jednotlivých elementů integrační plochy dS mění úhel mezi těmito vektory.



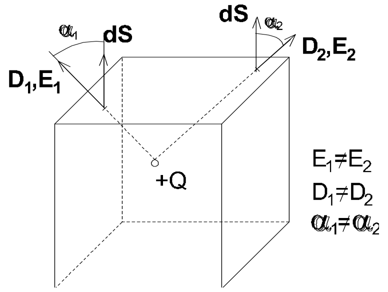
obr. 1.7

Směr výsledného vektoru D (resp. E) u nabitého tělesa je dán superpozicí příspěvků od elementárních nábojů na povrchu tělesa. Např. pro nabitou kouli je superpozice od několika symetrických nábojů vyznačena na obr. 1.8. Pokud bychom volili jako integrační plochu např. krychli obklopující náboj - obr.1.9 , museli bychom u každého elementu plochy dS zahrnout úhel mezi vektory D resp.E a dS. Bude-li integrační plochou plocha koule S = 4πR^2 o poloměru R, můžeme psát pro modul intenzity el.pole:



obr. 1.8

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon} \quad => \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$$



obr. 1.9

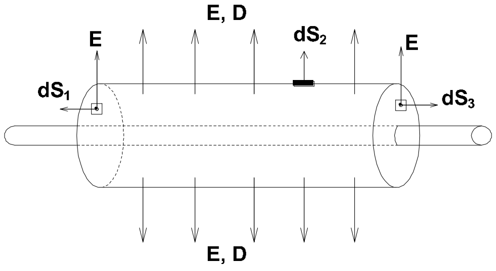
Potenciál dostaneme integrací tohoto vztahu podle *dR* a je tedy

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} + K \qquad (1.29)$$

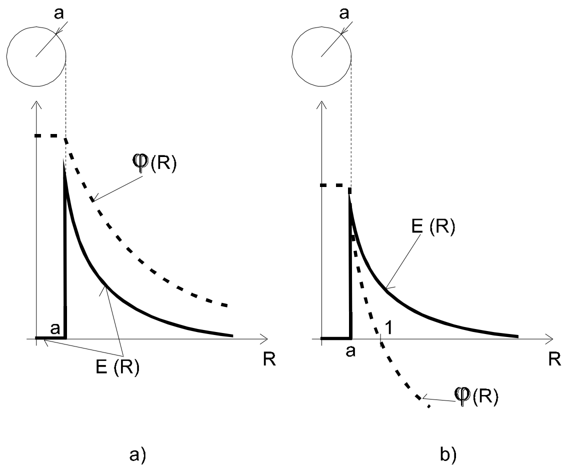
Podobně z nabitého válce vycházejí siločáry paprskovitě od jeho osy v rovinách kolmých na tuto osu obr.1.10. Integrační plochu volíme válec s celkovou plochou *S*, kterou můžeme rozdělit na tři plochy *S* = *S*$_1$ + *S*$_2$ + *S*$_3$, kde podle obr.1.10 jsou *S*$_1$, *S*$_3$ plochy podstav, *S*$_2$ povrch válce. Potom je i levá strana integrálu (1.30) rozpadá na tři integrály:

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \int_{S2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \int_{S3} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \qquad (1.30)$$

Na plochách *S*$_1$ *a* *S*$_3$ jsou na sebe vektory E a dS kolmé a integrály přes tyto plochy jsou rovny nule.



obr. 1.10



a)

b)

Obr.1.11

Na plochách *S*$_1$ *a* *S*$_3$ jsou na sebe vektory E a dS kolmé a integrály přes tyto plochy jsou rovny nule.

Potom je pro modul:

$E\cdot 2\cdot\pi\cdot R\cdot l = Q/\varepsilon$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon \cdot lR} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon R} \qquad (1.25)$$

a po integraci

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon \cdot l}.\ln R + K = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}.\ln R + K$$

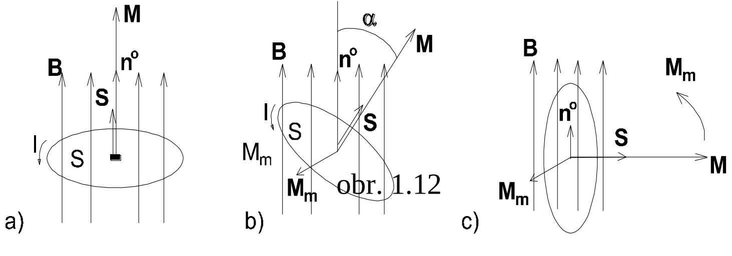
Závislosti *E = E(R) a φ = φ (R*) jsou na obr.1.11a znázorněny pro kouli a na obrázku 1.11b pro válec.

❑ Vektor magnetické indukce

Podobně, jako silové účinky elektrického pole na elektrický náboj kvantifikuje elektrická intenzita, měla by se i veličina, která kvantifikuje silové účinky magnetického pole na náboj v pohybu jmenovat intenzita magnetického pole. V době, kdy byly elektrické veličiny zaváděny byl ale pojem intenzita magnetického pole přisouzen veličině, kterou dnes označujeme H a veličina svazující přímo sílu, velikost a rychlost náboje a účinky magnetického pole byla nazvána vektor magnetické indukce

$$\mathrm{F} = Q{\cdot}v \times \mathrm{B} = I{\cdot}\mathrm{dl} \times \mathrm{B} \qquad (1.31)$$

Síla je vektorovou veličinou, vzešlou z velikosti náboje, vektorového součinu rychlosti a vektoru magnetické indukce, tvoří s nimi tedy ortogonální systém. Vektor magnetické indukce (magnetickou indukci) můžeme potom definovat na základě silového účinku magnetického pole na pohybující se elektrický náboj (tj. na proudovodič): *Absolutní hodnota vektoru magnetické indukce se rovná mechanickému momentu, kterým působí magnetické pole na zkušební elementární smyčku s jednotkovým magnetickým momentem, vychýlenou o 90^o ze směru, který se smyčka snaží v magnetickém poli zaujmout; orientace vektoru B je totožná s tímto směrem - obr.1.12a.*



obr. 1.12

Magnetický moment je definován součinem

$$\mathrm{M} = I{\cdot}\mathrm{s} \qquad (1.32)$$

kde s je vektor kolmý na plochu smyčky s proudem a jeho velikost je rovná ploše smyčky. Mechanický moment, který působí na smyčku protékanou proudem při vychýlení ze směru $\mathrm{n_o}$ o úhel α je

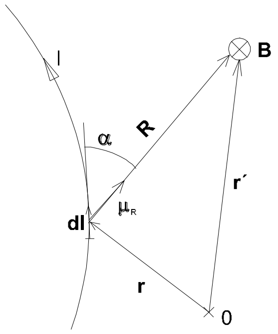
$$M_m = k{\cdot}B{\cdot}I{\cdot}s{\cdot}sin\alpha = k{\cdot}B{\cdot}M{\cdot}sin\alpha \qquad (1.33)$$

ve vektorovém zápisu (pro k = 1 - závisí na volbě jednotek):

$$\mathrm{M}_m = I{\cdot}\mathrm{s} \times \mathrm{B} = \mathrm{M} \times \mathrm{B} \qquad (1.34)$$

Protože jsou M a B vektory na sebe kolmé, je M_m kolmý na rovinu, procházející vektory M a B viz obr. 1.12b,c. (Analogicky, jako v mechanice, kde je moment kolmý na poloměr a sílu a má tedy směr shodný s osou hřídele).

Rozměr vektoru $$[B] = \frac{[M_m]}{[I]\cdot[s]} = \frac{V\cdot a\cdot s}{Am^2} = \frac{V\cdot s}{m^2} = T$$



obr. 1.14

Základní zákon určující stacionární pole B (tj. pole bez časových změn polních veličin), buzené proudem, je zákon Biotův - Savartův (dále BS zákon). Pokud je pole buzeno stacionárním proudem liniovým (obr.1.14), potom má tento zákon tvar:

$$\mathrm{dB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o c^2}\cdot\frac{\mathrm{I}\cdot\mathbf{dl}\times\mathbf{u}_\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mathrm{I}\cdot\mathbf{dl}\times\mathbf{u}_\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2} \qquad (1.35) \qquad (1.31)$$

Vektory dl (element proudovodiče orientován ve směru proudu) a u_R (jednotkový vektor ve směru průvodiče R) určují orientaci vektoru B, který je kolmý na rovinu proloženou těmito vektory. Na rozdíl od vektoru indukce elektrického pole, který má u bodového náboje směr průvodiče R, je B vektor "axiální", tj. leží v rovině kolmé na průvodič - obr.1.15. Podle pomocného Ampérova pravidla pravé ruky určíme směr B od elementu takto: *Element proudovodiče uchopíme do pravé ruky tak, aby palec ukazoval směr proudu (elementu dl), prsty potom ukazují směr intenzity, resp. indukce mag. pole.*

Modul indukce pole podle BS zákona vypočteme:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot dl}{R^2}\sin\alpha \qquad (1.36)$$

kde α je úhel sevřený vektory dl a u_R.

Integrováním po celé smyčce l obdržíme výslednou indukci

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot I\oint_l \frac{\mathbf{dl}\times\mathbf{u}_R}{R^2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot I\oint_l \frac{\mathbf{dl}\times\mathbf{R}}{R^3} \qquad (1.37)$$

Obdobně pro pole buzené proudem, rozloženým po objemu V

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}.I\oint_V \frac{\mathbf{J}\times\mathbf{u}_R}{\mathrm{R}^2}dV = \frac{\mu_o}{4\pi}.I\oint_V \frac{\mathbf{J}\times\mathbf{R}}{R^3}\cdot dV \qquad (1.38)$$

Při buzení pohybujícím se bodovým nábojem má BS zákon tvar:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot\frac{q\mathbf{v}\times\mathbf{u}_R}{R^2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\mathbf{R}}{R^3} \qquad (1.39)$$

Z těchto vztahů je zřejmé že za budicí proudový element můžeme považovat $I.dl$ nebo $q\cdot v$ nebo $J\cdot dV$. Pokud totiž chápeme bodový náboj q jako elementární náboj dQ, potom můžeme psát

$$I\cdot dl = \frac{dQ}{dt}\cdot dl = dQ\cdot\frac{dl}{dt} = dQ\cdot v = q\cdot v \quad (1.40)$$

nebo

$$I\cdot dl = J\cdot dS.dl = J\cdot dV \qquad (1.41)$$

čímž je dokázáno, že proudový element $I\cdot dl = J\cdot dV = q\cdot v$

Na závěr připomeňme, že BS zákon platí jen pro stacionární proudy.

CD-ROM

animace
A1

Animaci přehrávejte programem Windows Media Player. Nejprve „krokujte“ posouváním „vozíčku“ pod zobrazovací plochou. Potom zapněte jedno přehrání a konečně náhodné přehrávání a opakování (v pravém rohu dole).
Animace je převzata z http://www.igte.tugraz.at/index_en.html, doporučuji spuštění dalších animací z této stránky

Magnetické pole v okolí více vodičů v lineárním prostředí počítáme superpozicí účinků jednotlivých vodičů. Na animaci AA je vidět změny magnetického pole v okolí trojfázového vedení, v uspořádání vodičů vedle sebe. v první fázi se zaměřte vždy na jeden bod vně uspořádání v blízkosti krajních vodičů. Průběh pole odpovídá harmonickému buzení (sinus) proudem, včetně změny polarity intenzity pole. Ve druhé fázi si v opakovaném přehrávání cyklu animace všimněte, že maximální hodnoty indukce se jakoby posouvá zleva doprava. Magnetické pole postupuje v horizontálním směru.

CD-ROM

animace A2

Animaci přehrávejte programem Windows Media Player. Nejprve „krokujte“ posouváním „vozíčku“ pod zobrazovací plochou. Potom zapněte jedno přehrání a konečně náhodné přehrávání a opakování (v pravém rohu dole).
Animace je převzata z http://www.igte.tugraz.at/index_en.html, doporučuji spuštění dalších animací z této stránky

Případ je podobný jako u animace AA, jen vodiče jsou ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Všimněte si, že maximální hodnota indukce se posouvá proti směru hodinových ručiček – základ točivého pole.

❑ Elektrický a magnetický indukční tok

V obou případech se z matematického hlediska jedná o tok vektoru (D resp. B) plochou. Elektrický indukční tok Ψ plochou *S* je dán vztahem

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \qquad (1.42)$$

Elektrický indukční tok *uzavřenou plochou S je roven celkovému volnému náboji v objemu V, obaleném touto plochou.* Tuto definici nazýváme také Maxwellův zákon elektrostatiky nebo zobecněná Gaussova věta.

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0 = \oint \rho_0 \cdot dV \qquad (1.43)$$

Elektrický indukční tok znázorňujeme indukčními čárami. Tečny k indukčním čarám udávají směr vektoru indukce D v daném bodě. Elektrický indukční tok udáváme v coulombech. Tok 1C vychází z náboje 1C. V izotropním prostředí mají indukční čáry a siločáry stejný tvar. Hustota indukčních čar k hustotě siločar je v témže místě ε krát větší.

Silový tok je definován vztahem

$$\chi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \qquad (1.44)$$

Silový tok vektoru intenzity uzavřenou (obalovou) plochou se rovná náboji uvnitř plochy dělenému permitivitou prostředí

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (1.45)$$

Magnetický indukční tok (tok vektoru magnetické indukce plochou je dán vztahem:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad (1.46)$$

Pokud integrujeme přes uzavřenou plochu, je výsledný tok roven nule, indukční čáry jsou tedy uzavřené a nemají ani začátek, ani konec. Neexistuje tedy magnetický náboj, ze kterého by indukční čáry vycházely.

Symbol Ψ je v magnet. obvodech často používán pro označení celkového (spřaženého) magnet. toku $\Psi = N \cdot \phi$ kde N je počet závitů, s nimiž je tok ϕ spřažen. Proto je zvykem označovat elektrický indukční tok symbolem Ψ_D .

Maxwellovy rovnice

Povídání ke kávě – NEPOVINNÉ

Stalo se to v Cambridgi v druhé polovině minulého století. Teoretickou fyziku tam tehdy přednášel Stokes. Jednou k němu přišel skládat aspirantskou zkoušku nějaký mladík. Podle Stokesova systému si kandidát mohl z deseti zadaných příkladů vybrat, které chce ve stanovené době řešit. Stokes bez jakýchkoli zábran dával často i úlohy neřešitelné. Chtěl totiž zjistit, zda student pozná, že úloha nemá řešení. Tak třeba dával úlohu nalézt rychlostní rozdělení molekul v plynu. Toto rozdělení nebylo tehdy známé. Bernouli a všichni ostatní předpokládali, že rychlosti jsou přibližně stejné. Jeden mladík, k velkému Stokesovu údivu tuto úlohu vyřešil. Podle názvu kapitoly se asi již domyšlíte, že to nebyl nikdo jiný než Maxwell. Maxwell tedy objevil zákon rozdělení rychlostí molekul v plynu při zkoušce.

Tento pán James Clerk Maxwell, M.A. vydal o něco později, v roce 1873, knihu "A Treatise on Electricity and Magnetism". Na toto Maxwellovo "Pojednání" musíme pohlížet jako na teoretické zobecnění experimentálních prací Faradayových a základ současné elektrodynamiky. V době vydání knihy bylo její chápání obtížné i pro velké vědce (Boltzmann), dnes lze ale Maxwellovy představy o elektromagnetickém poli bez obtíží pochopit. Jak již bylo řečeno, popsal Maxwell elektromagnetické jevy matematicky rovnicemi. Dnes se jeho rovnice používají v poněkud formálně jiné podobě, než jak byly formulovány Maxwellem. Považujme je za axiomy, jejichž fyzikální obsah tvoří základní přírodní zákony, a jejich odvozením se nebudeme zabývat. Nesporný význam Maxwellových rovnic je i v tom, že zůstávají beze změn ve všech pozorovacích soustavách. Některé Maxwellovy rovnice již byly v textu zmíněny [např. (1.20), (1.21), (1.39), (1.41)] aniž byly takto pojmenovány.

Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole používáme ve dvou jejich základních tvarech - diferenciálním (pro polní veličiny ve tvaru hustot, tedy diferenciální polní veličiny) a integrálním nebo také bilančním tvaru pro veličiny integrální. Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru mají platnost omezenou pouze na oblast, v níž jsou materiálové parametry ε,μ,γ konstantní, nebo kde se tyto parametry spojitě mění. Neplatí tedy na ostrém rozhraní dvou prostředí (např. slída - vzduch, vodič - vzduch apod.), kde je musíme doplnit o rovnice, vyjadřující podmínky na rozhraní. Maxwellovy rovnice jsou v diferenciálním tvaru čtyři stejně jako ve tvaru integrálním a mají v diferenciálním tvaru tuto základní podobu:

1. $$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathrm{t}} + \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathrm{t}} + \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{u} - \mathrm{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{P}) \qquad (1.47)$$

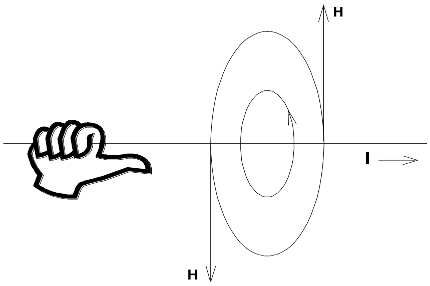
kde P je vektor polarizace, u rychlost. Nejčastěji budeme tuto rovnici používat ve tvaru

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} \qquad (1.48)$$

který nazýváme průtokový zákon nebo také zákon celkového proudu.

Fyzikální interpretace zjednodušené rovnice (1.47): magnetické pole intenzity H v oblasti s proudy je vírové a je průvodním jevem elektrického proudu. Tento proud může být vedený s hustotou J_o nebo posuvný s hustotou $\partial D/\partial t$. Mimo oblast s proudy je rot H = 0 a pole je nevírové.

Opět platí pomocné pravidlo pravé ruky: Uchopíme-li proudový element dlouhého přímého vodiče do pravé ruky tak, že palec ukazuje směr proudu resp. směr proudové hustoty, ukazují prsty pravé ruky směr vektoru H. Přičemž je tento vektor tečnou k siločárám - kružnicím v rovině kolmé na vodič, se středem v ose vodiče viz obr.1.15.



obr. 1.15

Proudová hustota vedeného (kondukčního) proudu v sobě zahrnuje dvě složky a to složku proudu indukovaného vlivem přítomností elektrického pole E v prostředí s nenulovou vodivostí γ (podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru)

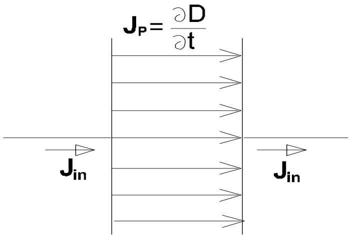
$$\mathbf{J}_{in} = \gamma \cdot \mathbf{E} \tag{1.49}$$

a složku hustoty proudu vnuceného (také nazývaného jako vtištěný nebo externí proud) J_e, který je prostředí vnucen cizím vnějším (externím) zdrojem (např. v anténě). Platí tedy

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_{in} + \mathbf{J}_e \tag{1.50}$$

Člen $\partial D/\partial t$ byl nazván proud posuvný

$$\mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.44)$$



obr. 1.16

Posuvný proud se tedy šíří všude tam, kde probíhá časová změna elektrického pole. Například u deskového kondenzátoru obr.1.16 se šíří v přívodních vodičích proud vedený a v dielektriku mezi deskami proud posuvný. Pokud je ovšem kondenzátor připojen na stejnosměrný zdroj, je časová změna elektrického pole nulová a je tedy nulový i posuvný proud mezi deskami a kondenzátor stejnosměrný proud nepropustí, pomíjíme-li ovšem přechodové jevy při připojování kondenzátoru do ss obvodů, kdy k časové změně dochází.

Po dosazení těchto dílčích složek proudů můžeme napsat první Maxwellovu rovnici v tomto tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{in} + \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_e + \gamma \cdot \mathbf{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.51}$$

Identicky platí div rot v = *0*, kde v je libovolný vektor. Pokud aplikujeme operátor div na rov. (1.50), dostáváme

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} H = \operatorname{div}\left(J_{in} + J_e + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = \operatorname{div}\left(J_e + \gamma \cdot E + \varepsilon \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0$$

V prostoru mimo zdroj je $\operatorname{div}\left(J_{in} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0$

Součet proudu vedeného a posuvného tedy vně zdroje nemá zřídlo, proudové čáry jsou uzavřeny a proud může nanejvýš měnit charakter tak, že částí obvodu teče jako proud vedený (ve vodičích), částí jako posuvný (mezi deskami kondenzátoru, šíření vln vzduchem apod.).

2. $$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.52}$$

Druhou Maxwellovu rovnici také nazýváme zákon elektromagnetické indukce nebo indukční zákon.

Fyzikální interpretace: Časovou změnou mag. pole vzniká vírové elektrické pole. Z formální podobnosti (1.47) a (1.52), nazýváme někdy vztah $\partial B/\partial t$ jako posuvný magnetický proud.

Tyto první dvě Maxwellovy rovnice jsou navzájem nezávislé.

3. $$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\left(\rho_0-\operatorname{div}\mathbf{P}\right) \tag{1.53}$$

Třetí Maxwellovu rovnici budeme nejčastěji používat ve tvaru, který je znám pod názvem Gaussova věta elektrostatiky:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho \tag{1.54}$$

Fyzikální interpretace: Existuje i elektrické pole zřídlové, jako průvodní jev elektrického náboje.

4. $$\operatorname{div}\mathbf{B}=0 \tag{1.55}$$

Fyzikální interpretace: Magnetické pole *B* je nezřídlové.

Tuto rovnici lze odvodit z rov.(1.51) operací div a úpravou:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}E=-\operatorname{div}\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}B$$

protože podle matematické identity je

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}E=\nabla\cdot(\nabla\times E)=E\cdot(\nabla\times\nabla)=0$$

je také $\partial(\text{div B})/\partial t = 0$, a div B = konst., prakticky div B = *0*

Z pohledu na pravé strany rovnic je patrné, že se zde v rovnici 1 a 3 vyskytují na pravé straně budicí veličiny (proudy a náboje). Ve fyzice se proto tyto rovnice často označují jako 1. série, zatímco rovnice druhá a čtvrtá se označují jako 2. série Maxwellových rovnic. Z 1. a 4. Maxwellovy rovnice můžeme dále odvodit rovnici vyjadřující princip kontinuity (spojitosti) el. proudu v diferenciálním tvaru. Za tím účelem aplikujeme div na 1. rovnici:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}H=\operatorname{div}J+\operatorname{div}\frac{\partial D}{\partial t}=\operatorname{div}J+\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}D=\operatorname{div}J+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

obdrželi jsme tedy již známou rovnici (1.11), která říká, že částice s nábojem se nemohou přemísťovat z jednoho bodu do druhého, aniž by nevznikl mezi těmito body elektrický proud, nebo také že zdrojem el. proudu je časová změna objemové hustoty el. náboje. Rovnice platí samozřejmě i pro vnucené veličiny J_e a ρ_e.

Pomocí Gaussovy - Ostrogradského věty (pro obecný vektor v)

$$\oint_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}=\int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\cdot dV \tag{1.56}$$

a Stokesovy věty

$$\oint_l \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}=\int_S \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} \tag{1.57}$$

můžeme transformovat Maxwellovy rovnice z diferenciálního tvaru na tvar integrální a naopak.

Použijeme k tomu dále vztahy

$\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I$ (1.58) $\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=\Psi_D$ (1.59) $\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\Phi$ (1.60) $\int \rho\cdot dV=Q$ (1.61)

Integrální tvar Maxwellových rovnic bude potom vypadat takto:

1. $$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I+\frac{\partial\Psi_D}{\partial t} \tag{1.62}$$

Tento zákon můžeme v literatuře nalézt pod názvy Ampérův průtokový zákon nebo zákon celkového proudu v integrálním tvaru.

Fyzikální interpretace: Cirkulace vektoru intenzity magnetického pole (oběhové magnetické napětí U_{M0}) se rovná celkovému proudu, který teče plochou S, jejíž okraj tvoří cirkulační dráha l. (ψ_D je elektr. indukční tok).

2. $$\oint_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (1.63)$$

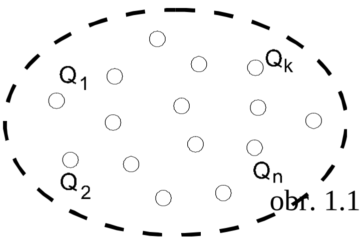
Zákon se nazývá zákon elektromagnetické indukce. Nezáleží zde na integrační dráze, pouze na velikosti změny mag. toku uvnitř této dráhy a pole je konzervativní.

Fyzikální interpretace: Cirkulace vektoru intenzity elektrického pole se rovná záporně vzaté časové změně magnetického toku, tekoucího plochou *s*, jejíž okraj tvoří uzavřená křivka *l*. (Φ je magnetický indukční tok).

Křivka *l* je ve vztazích (1.61) a (1.62) libovolná orientovaná regulární uzavřená křivka v reálném prostoru, *d*l je pak elementární úsek této křivky. Vzhledem k tomu, že na levé straně rovnice (1.61) se vyskytuje skalární součin dvou vektorů, a to H a *d*l, lze z výhodou použít Ampérův zákon v případech, kdy jsou tyto vektory kolineární, tedy tam, kde můžeme průběh siločar určit z jisté symetrie budicích zdrojů. V případě, že tomu tak není, použijeme raději jiný způsob výpočtu, např. Biotův-Savartův zákon.

3. $$\oint_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q_0 \qquad (1.64)$$

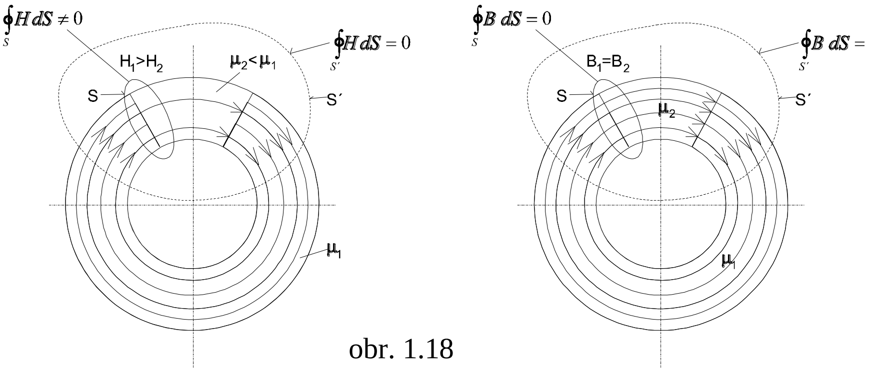
Vztah se nazývá Gaussova věta elektrostatiky. S výhodou se opět používá u symetrií, kdy jsou vektor *d*s (vektor kolmý na element plochy) a siločára kolineární. Obecně je s libovolná orientovaná plocha v reálném prostoru.



obr. 1.17

Fyzikální interpretace: Elektrický indukční tok uzavřenou (obalovou) plochou se rovná volnému náboji uvnitř této plochy. Pokud je v obalové ploše více nábojů Q_k, viz obr.1.17 bude na pravé straně $Q = \sum_n Q_k$.

4. $$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = 0 \qquad (1.65)$$



obr. 1.18

Tento vztah vyjadřuje princip uzavřenosti indukčních čar. Jak se dovíme později, vyplývá z rovnosti normálových složek indukce skutečnost, že na rozhraní dvou prostředí, kolmém k indukčním čárám je v obou prostředích myšlený počet indukčních čar stejný a jsou uzavřeny. Rovnost normálových složek intenzit mag. pole zde ale neplatí a počet myšlených magnetických siločar bude v každém prostředí jiný viz obr.1.18. Na uzavřené ploše v obr. 1.18 se tedy siločáry spojitě uzavírat nebudou. Navrátí-li se ale siločáry z druhého prostředí zpátky do prvého, bude jejich počet opět stejný, jaký do prostředí vstupoval a na čárkovaně označené ploše se siločáry uzavřou.

Fyzikální interpretace: Magnetický indukční tok uzavřenou (obalovou) plochou se rovná nule.

Podobně můžeme pomocí Gaussovy věty transformovat i rovnici kontinuity (1.11) na tvar

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

což je integrální formulace principu kontinuity proudu.

Fyzikální interpretace: Proud vytékající z uzavřené plochy se rovná úbytku náboje uvnitř této plochy.

Rekapitulace Maxwellových rovnic v nejužívanějším tvaru:

diferenciální	*integrální*
$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial \Psi_D}{\partial t}$
$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q_0$
$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

Z diferenciálního tvaru Maxwellových rovnic vyplývá, že elektrické pole může mít charakter pole zřídlového i vírového, kdežto magnet. pole má pouze charakter pole vírového (na pravé straně (1.54) se nevyskytuje zřídlo mag. pole).

Shrnutí pojmů 1.2.

Materiálové parametry jsou parametry úměrnosti dvou polních veličin, charakterizující ovlivnění pole prostředím.

Homogenní prostředí je takové, které má materiálové konstatnty ve všech bodech sledované oblasti stejné.

Lineární prostředí je takové prostředí které je charakterizováno materiálovým parametrem, který je ve sledovaném rozsahu polních veličin skutečně konstantou, nezávislou na této polní veličině

Izotropní prostředí je takové prostředí, které má materiálové konstanty ve všech směrech stejné.

Elektrický náboj je vlastnost některých elementárních částic mít vlastní elektromagnetické pole.

Intenzita elektrického pole je síla, jíž působí elektrostatické pole v daném bodě na jednotkový kladný zkušební náboj.

Siločáry jsou myšlené čáry, kterými zobrazujeme elektrické pole – vektor intenzity elektrického pole je k nim tečnou.

Ekvipotenciály jsou trajektorie spojující místa se stejným polem.

Mapa pole je tvořena ortogonální sítí siločar a ekvipotenciál.

Gaussova věta elektrostatiky má tvar $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q_0$

Absolutní hodnota vektoru magnetické indukce se rovná mechanickému momentu, kterým působí magnetické pole na zkušební elementární smyčku s jednotkovým magnetickým momentem, vychýlenou o 90° ze směru, který se smyčka snaží v magnetickém poli zaujmout; orientace vektoru B je totožná s tímto směrem.

Magnetický moment M = I.s

Elektrický indukční tok Ψ plochou *S* je dán vztahem $\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

Silový tok je definován vztahem $\chi = \int_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

Magnetický indukční tok je dán vztahem $\Phi = \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

Otázky 1.2.

1. Je rozdíl mezi pojmy homogenní prostředí a homogenní pole?
2. Který vztah vyjadřuje matematicky fyzikální zákon zachování náboje?
3. Existuje v přírodě více nábojů kladných nebo záporných?
4. Který vztah vyjadřuje konzervativnost elektrostatického pole?

Úlohy k řešení 1.2.

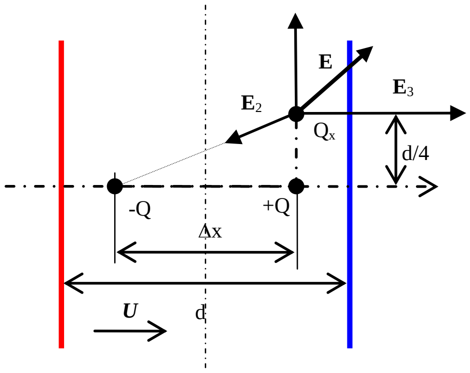
1. Elektron je uvolněn z klidu v homogenním elektrickém poli o intenzitě 2.10^{4} V/m. Vypočítejte jeho zrychlení, vliv gravitace zanedbejte, $m_e = 9{,}17.10^{-31}$ kg.
2. Určete směr a velikost síly, působící na náboj $Q_x = 10^{-11}$C, který je umístěn mezi deskami s napětím $U = 10$V spolu s nábojovým dipólem $+Q$ a $-Q$. $Q = 10^{-12}$C, $d = 0{,}02$m, $\Delta x = 0{,}01$m.
3. Dlouhý vodič s poloměrem r_1 je uložen koncentricky uvnitř dobře vodivé trubky s vnitřním poloměrem r_2 a vnějším poloměrem r_3. Napětí mezi vodičem a trubkou je *U*. Určete plošnou hustotu náboje na povrchu vodiče a na vnitřním a vnějším poloměru trubky. Určete a graficky znázorněte závislosti $D = D(r)$, $E = E(r)$, $\varphi = \varphi(r)$.
4. Vodičem zanedbatelného průřezu, který je stočen do závitu ve tvaru kruhu o poloměru a protéká proud I. Určete intenzitu magnetického pole *H* ve středu závitu.

Klíč k řešení

1

Vyjdeme ze známého vztahu $E = \dfrac{F}{Q}$, odtud $F = Q.E$. Podle druhého Newtonova zákona z mechaniky : $F = m.a$. Porovnáním obou vyjádření pro sílu se dostane $m.a = Q.E$, odtud

$$a = \frac{Q.E}{m} = \frac{1{,}60.10^{-19}.2.10^{4}}{9{,}11.10^{-31}} = 3{,}51.10^{15}\,\text{m/s}$$



Obr. 1.19

2 Zkušební náboj Q_x se nachází v poli dvou bodových nábojů $+Q$ a $-Q$. V obrázku jsou vyznačeny směry obou intenzit E_1, E_2. Současně se tento náboj nachází též v poli, které tvoří nabité desky kondenzátoru. Intenzita tohoto pole je vyznačena vektorem E_3.
Výsledná intenzita E v místě náboje Q_x, se určí _superpozicí_ intenzit jednotlivých polí E_1, E_2 a E_3 tj. jako _vektorový součet_ E_1, E_2 ,E_3. Sílu F určíme jako součin $F = Q_x.E$. Vyjádříme postupně souřadnice vektorů E_1, E_2, E_3: $E_{1x} = 0$; $E_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(\frac{d}{4}\right)^2} = \frac{4Q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon d^2}$

$$E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2}\cos\alpha = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2}\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2}} = -\frac{Q\Delta x}{4\pi\varepsilon_0\left(\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)\right)}$$

$$E_{2y} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2}\sin\alpha = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\frac{\frac{d}{4}}{\sqrt{\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2}} = -\frac{Qd}{16\pi\varepsilon_0\left(\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$E_{3x} = \frac{U}{d}$; $E_{3y} = 0$. Superpozicí, tj. součtem jednotlivých složek se dostane

$$E_x = E_{1x}+E_{2x}+E_{3x} = \frac{U}{d} - \frac{Q\Delta x}{4\pi\varepsilon_0\left(\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 436\,\text{V/m}$$

$$E_y = E_{1y}+E_{2y}+E_{3y} = \frac{4Q}{\pi\varepsilon_0 d^2} - \frac{Qd}{16\pi\varepsilon_0\left(\Delta x^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 328\,\text{V/m}$$

Pro sílu dostaneme

$$F_x = Q_x E_x = 4{,}36\cdot 10^{-9}\,\text{N}\ ;\ F_y = Q_y E_y = 3{,}28\cdot 10^{-9}\,\text{N}\ ;\ \beta = \text{arctg}\frac{F_y}{F_x} = arctg\,\frac{3{,}28}{4{,}36} = 37^\circ$$

3 Úlohu řešíme postupnou aplikací Gaussovy věty: $\oiint_S \vec{D}.d\vec{s} = Q$. Gaussova plocha je válec o jednotkové výšce. Tok vektoru D prochází pláštěm válce, tok podstavami je nulový. Normála k povrchu svírá s vektorem D nulový úhel a vektor D je na povrchu válce konstantní. Proto je možné nahradit skalární součin obyčejným součinem, místo vektoru D uvažovat pouze jeho modul a ten vytknout před integrál $D\oiint_S ds = Q$. Výraz se podstatně zjednoduší $D2\pi r = Q$. Odtud

$$D = \frac{Q}{2\pi r}$$

1. Gaussova plocha $S_1 : 0 \le r < r_1$ prochází prvním vodičem. Uvnitř vodiče je $Q = 0$, náboj může být rozložen pouze na povrchu vodičů.

$$D_1S_1 = Q\,;\, Q = 0 \Rightarrow D_1 = 0 \;\;;\, E_1 = 0\,;\, \varphi_1 = \int_r^{r_1} E_1 dr = \int_r^{r_1} 0 dr = C = U$$

2. Gaussova plocha $S_2 : r_1 < r \leq r_2$ prochází dielektrikem mezi vodiči.

$$D_2S_2 = Q\,;\, Q = 2\pi r_1 l\sigma_1 \Rightarrow D_2 = \frac{2\pi r_1 l\sigma_1}{2\pi r l} = \frac{r_1\sigma_1}{r}\,;\, E_2 = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon r}$$

Plošnou hustotu náboje určíme z napětí mezi vodiči:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_2 dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon r} dr = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon}\left[\ln r\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{U\varepsilon}{r_1\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Intensitu pole E_2 vyjádříme pomocí U

$$E_2 = \frac{r_1\sigma_1}{\varepsilon r} = \frac{r_1}{\varepsilon r}\frac{U\varepsilon}{r_1\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{U}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Pro potenciál platí

$$\varphi_2 = \int_r^{r_2} E_2 dr = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_r^{r_2}\frac{1}{r}dr = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[\ln r\right]_r^{r_2} = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{r_2}{r}$$

3. Gaussova plocha $S_3 : r_2 \leq r < r_3$ prochází pláštěm koaxiálu. Náboj Q_{1+} na vnitřním vodiči naindukuje na vnitřním povrchu pláště stejně velký náboj opačného znaménka Q_{2-}.

$$D_3S_3 = Q_{1+} + Q_{2-} = 0 \Rightarrow D_3 = 0\,;\, E_3 = 0 \;\;;\, \varphi_3 = \int_r^{r_3} E_3 dr = \int_r^{r_3} 0 dr = C = 0$$

4. Gaussova plocha $S_4 : r_3 \leq r < \infty$ prochází dielektrikem vně koaxiálu. Náboj Q_{2-} na vnitřním povrchu pláště koaxiálu naindukuje na vnějším povrchu pláště stejně velký náboj opačného znaménka Q_{3+}

$$D_4S_4 = Q_{1+} + Q_{2-} + Q_{3+} = Q_{3+} \Rightarrow D_4 = \frac{2\pi r_3 l\sigma_3}{2\pi r l} = \frac{r_3\sigma_3}{r} \Rightarrow E_4 = \frac{r_3\sigma_3}{\varepsilon r}$$

$$\varphi_4 = \int_r^{r_3} E_4 dr = \frac{r_3\sigma_3}{\varepsilon}\int_r^{r_3}\frac{1}{r}dr = \frac{r_3\sigma_3}{\varepsilon}\left[\ln r\right]_r^{r_3} = \frac{r_3\sigma_3}{\varepsilon}\ln\frac{r_3}{r}$$

Plošnou hustotu el. náboje σ_2 (na vnitřním povrchu pláště koaxiálu o poloměru r_2) a σ_3 (na vnějším povrchu pláště koaxiálu o poloměru r_3) určíme z rovnosti nábojů:

$$2\pi r_1 l\sigma_1 = 2\pi r_2 l\sigma_2 = 2\pi r_3 l\sigma_3 \Rightarrow r_1\sigma_1 = r_2\sigma_2 = r_3\sigma_3$$

odtud po úpravě

$$\sigma_2 = \frac{r_1}{r_2}\sigma_1 = \frac{r_1}{r_2}\frac{U\varepsilon}{r_1\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{U\varepsilon}{r_2\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$\sigma_3 = \frac{r_1}{r_3}\sigma_1 = \frac{r_1}{r_3}\frac{U\varepsilon}{r_1\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{U\varepsilon}{r_3\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

4 Podle zákona Biot-Savartova $dH = \frac{Idl}{4\pi r^2}.\sin\left(dl, r^0\right) = \frac{Idl}{4\pi r^2}.\sin 90^0 = \frac{Idl}{4\pi r^2}$ odtud integrací po kruhové dráze

$$H = \frac{I}{4\pi r^2}\oint dl = \frac{I}{4\pi r^2}2\pi r = \frac{I}{2r}$$

1.3. Potenciály v elektromagnetickém poli

Čas ke studiu: 16 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojmy skalární magnetický potenciál, skalární elektrický potenciál, vektorový magnetický potenciál
- určit zakázanou plochu pro skalární magnetický potenciál
- porozumět tzv. normování potenciálů
- napsat Laplaceovu a Poissonovu rovnici pro jednoduché případy polí
- rozlišit význam pojmů elektromotorické napětí, vnitřní napětí, napětí naprázdno, svorkové napětí
- aplikovat zákon o elektromagnetické indukci
- vysvětlit některé jevy vycházející z Lorentzova síly

Totální potenciály

V úvodu této kapitoly si připomeňme některé matematické identity - diferenciální operace druhého řádu, obecně pro vektor *v* a skalár *S*.

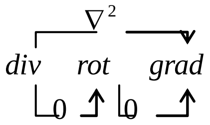
$$div \cdot rot\,\vec{v} = \nabla(\nabla \times \vec{v}) = \vec{v}(\nabla \times \nabla) = 0 \tag{1.66}$$

$$div \cdot grad\ S = \nabla(\nabla \cdot S) = (\nabla \cdot \nabla)S = \nabla^2 \cdot S = \Delta \cdot S \tag{1.67}$$

$$rot \cdot rot\,\vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \nabla) = (\nabla \cdot \vec{v})\nabla - (\nabla \cdot \nabla)\vec{v} = grad \cdot div\,\vec{v} - \nabla^2 \vec{v} = grad \cdot div\,\vec{v} - \Delta\vec{v} \tag{1.68}$$

$$rot \cdot grad\ S = \nabla \times (\nabla \cdot S) = (\nabla \times \nabla)S \tag{1.69}$$

Shrňme si tyto vztahy formou tabulky č. 3:



Skalární magnetický potenciál

Na levých stranách 1 a 2 Maxwellovy rovnice jsou operace rot v. Podle výše uvedené tabulky, pokud bychom nahradili libovolný vektor v vztahem v = grad S, musela by se pravá i levá strana těchto Maxwellových rovnic rovnat nule. Pokusme se to prakticky provést pro první Maxwellovu rovnici s tím, že vektorem v je v tomto případě intenzita H a skalár si označíme symbolem φ_m a nazveme ho skalární potenciál intenzity magnetického pole nebo častěji skalární magnetický potenciál.

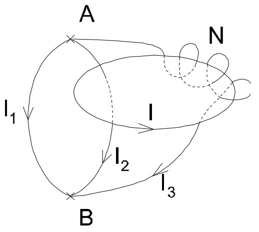
Platí tedy

$$\mathbf{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi_m \tag{1.70}$$

Znaménko mínus je dáno historickými zvyklostmi a bude vysvětleno později. Podobně musí v nevírovém poli platit vztahy

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0 \ \text{ a z toho } \mathbf{B} = -\mathrm{grad}\,\varphi_m \tag{1.71}$$

Protože ale musí platit *rot* H = *rot grad* $\varphi_m = 0$ a prvá Maxwellova rovnice v původním tvaru má na pravé straně hustoty proudu, je třeba omezit použití skalárního magnetického potenciálu jen na oblasti, v nichž neteče ani vedený ani posuvný proud. Většinou se tedy používá v magnetostatických případech (např. mezi póly permanentního magnetu) nebo při pomalých časových změnách mimo proudovodič. Pozor, v nestacionárních polích se mohou ve feromagnetiku indukovat vířivé proudy a musíme je považovat rovněž za proudovodič. Povrch prostředí, v němž mohou téci proudy považujeme za tzv. zakázanou plochu, která nesmí být integrační dráhou proťata.



obr. 1.20

Analogicky s elektrostatickým polem bude platit

$$\int_{\mathrm{Al1B}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} = -(\varphi_{\mathrm{mB}} - \varphi_{\mathrm{mA}}) \qquad (1.72)$$

Tento vztah skutečně platí např. mezi póly permanentního magnetu nebo v poli buzeném smyčkou protékanou stacionárním proudem, ovšem jen tehdy, je-li vedena integrační dráha mezi body A-B stejně jako l_1 na obr.1.20, tedy mimo plochu smyčky. Proveďme nyní integraci po jiné integrační dráze l_2, která protíná plochu smyčky. Tento integrál rozšiřme tak, že k němu připočteme a odečteme integrál po smyčce l_1:

$$\int_{\mathrm{Al2B}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} + \int_{\mathrm{Bl1A}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} - \int_{\mathrm{Bl1A}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} = \oint_{\mathrm{Al2Bl1A}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} + \int_{\mathrm{Al1B}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} = -\mathrm{I} - \varphi_{\mathrm{mB}} + \varphi_{\mathrm{mA}} \qquad (1.73)$$

Volme nyní místo nulového potenciálu v bodě *B*, tedy $\varphi_{mB} = 0$.

Potom je v bodě *A* potenciál

$$\varphi_{\mathrm{mA}} = \int_{\mathrm{l2}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} + \mathrm{I} \qquad (1.74)$$

Obecně však může integrační dráha obepínat proudovodič a tedy protínat plochu smyčky několikrát (N - krát) obr.1.20, potom by byla hodnota potenciálu v bodě A

$$\varphi_{\mathrm{mA}} = \int_{\mathrm{l2}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} \pm \mathrm{NI} \qquad \textbf{\textit{(1.75)}}$$

znaménko + platí v případě, že mezi směrem proudu a orientací integrační čáry platí relace dané Ampérovým pravidlem pravé ruky. V opačném případě platí znaménko -.

Magnetický skalární potenciál tedy není jednoznačnou funkcí polohy, ale má povahu cyklického potenciálu. Jednotlivé hodnoty potenciálů se liší navzájem o *NI*, tj. o konstantu, která není funkcí polohy. Mnohoznačnou funkci lze převést na jednoznačnou zavedením další zakázané plochy, což je v tomto případě přehrada, přes kterou nemůže křivka spojující body A-B přejít a která tak brání integrační dráze v několikanásobném oběhu proudovodiče a protnutí plochy smyčky. Při výpočtu intenzity mag. pole ze skalárního magnetického potenciálu nemá uvedená mnohoznačnost praktický význam, protože derivováním konstanty *NI* dostáváme nulu:

$$\mathbf{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi_{\mathrm{m}}$$

$$\mathbf{H}' = -\mathrm{grad}(\varphi_{\mathrm{m}} + \mathrm{N}\cdot\mathrm{I}) = -\mathrm{grad}\,\varphi_{\mathrm{m}} - \mathrm{grad}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{I} = -\mathrm{grad}\,\varphi_{\mathrm{m}}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}'$$

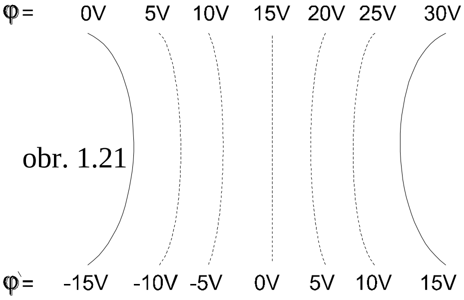
❑ Skalární elektrický potenciál

Podobně jako v předcházejícím odstavci dosaďme za vektor v intenzitu E. Skalární veličinu *S* označme φ a nazvěme ji skalární elektrický potenciál. Potom musí platit (1.18) $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ a protože na pravé straně Maxwellovy rovnice musí být nula, je skalární elektrický potenciál definován v místě kde $\partial B/\partial t = 0$. Geometrická místa konstantních (stejných) potenciálů jsou ekvipotenciály (ekvipotenciální čáry nebo plochy). V kapitole 1.2.2 bylo řečeno, že v konzervativním poli nezávisí křivkový integrál na integrační dráze a byl zde také uveden ke vztahu (1.70) inverzní vztah (1.19) $\boldsymbol{\varphi} = -\int \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$

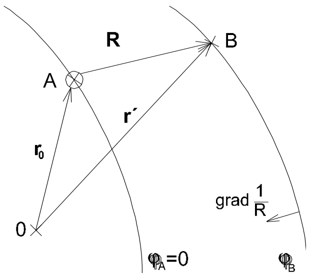
Po provedení tohoto integrálu dostáváme integrační konstantu, např. K, která může nabývat nekonečně mnoho hodnot v závislosti na okrajových podmínkách. Pokud bychom chtěli vypočíst z tohoto potenciálu opět intenzitu, byla by tato podle vztahu

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\left(\boldsymbol{\varphi} + \mathrm{K}\right) \tag{1.76}$$

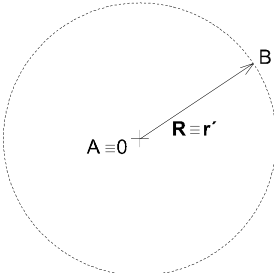
vždy stejná, nezávisle na velikosti konstanty *K*. Podle obr.1.21 bychom v síti ekvipotenciál mohli libovolnou konstantou libovolně posouvat číselné hodnoty těchto ekvipotenciál. Každému bodu ale potřebujeme přiřadit určitou jednoznačnou hodnotu skalární veličiny, kterou je právě skalární elektrický potenciál. Proto musíme skalární elektrický potenciál(jakož i všechny dále uvedené potenciály) normovat, tzn. určit vztažný bod v němž známe hodnotu potenciálu. Tento vztažný bod můžeme volit libovolně. Nejčastěji to bývá místo nulového potenciálu (např. v nekonečnu). Potom ale můžeme řešit integrál (1.19) jako určitý s tím, že integrujeme od souřadnice (polohového vektoru) vztažného bodu (nejčastěji nulového potenciálu) - na obr.1.22 označen r_o, do bodu, v němž zjišťujeme velikost potenciálu. Při praktických výpočtech s jednoduchou symetrií (válcovou, kulovou) často ztotožňujeme bod *A* s bodem *O*, potom je přímo $R = r'$ (obr.1.23).



obr. 1.21



obr. 1.22



obr. 1.23

Pro fyzikální definování potenciálu zkoumejme jaká práce se musí vykonat přemístěním náboje po určité křivce *l* z bodu *A* do bodu *B*:

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{A-B}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \cdot \int_{\mathrm{A-B}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{1.77}$$

Bude-li bod A místo nulového potenciálu a *Q* jednotkový náboj, můžeme formulovat definici:

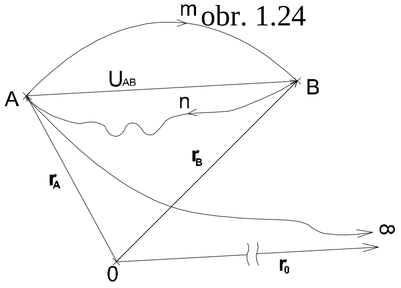
Skalární elektrický potenciál v daném místě (zde např. B) se rovná práci,kterou vykonají síly pole při přemístění jednotkového kladného zkušebního náboje z daného místa do místa nulového potenciálu (do nekonečna)

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{B}} = -\int_{\infty}^{\mathrm{B}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \text{ neboli obecně } \boldsymbol{\varphi}(\mathrm{R}) = -\int_{\infty}^{\mathrm{R}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{1.78}$$

Další z možných definic:

Elektrický skalární potenciál se rovná práci, kterou vykonají vnější síly při přemísťování jednotkového kladného zkušebního bodového náboje z místa nulového potenciálu (z nekonečna) do daného místa.

Jestliže má být přenášen náboj z místa nulového potenciálu do bodu *B* musí na něj působit vnější síly, do místa s nulovým potenciálem se pak z bodu *B* přesunuje (nebo je na něj působeno) silami pole. Analogicky lze případ přirovnat k narůstání potenciální energie soustavy tělesa upevněného na gumě. Přesunujeme-li těleso vnějšími silami tak, že přitom napínáme gumu je práce vykonána na úkor energie vnějších sil. Jestliže se těleso pohybuje zpátky působením sil gumy je to provedeno na úkor energie soustavy s gumou (pochopitelně guma, na rozdíl o d přemísťování náboje, nemá nulovou délku a vykazuje jistou hysterézi).


obr. 1.24

Zapíšeme-li integrál (1.19) jako určitý s mezemi r_A, r_B, tedy probíhá-li integrační čára po libovolné trajektorii (*m*,*n* apod.) mezi body A-B obr.1.24, můžeme tento integrál nazvat elektrické napětí mezi body A-B.

$$U_{AB} = \int_{rB}^{rA} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{rA}^{rB} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \qquad (1.79)$$

Elektrické napětí je veličina skalární, ale orientovaná $U_{AB} = - U_{BA}$ a závisí od polohy bodu. Integrační dráhu je ale možné volit tak, aby procházela místem nulového potenciálu voleném v nekonečnu a integrál (1.73) rozložit na integrály dva:

$$U_{AB} = \int_{rA}^{\infty} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{\infty}^{rB} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{\infty}^{rA} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{\infty}^{rB} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \varphi_B - \varphi_A \qquad (1.80)$$

V elektrostatickém poli tedy můžeme napětí mezi dvěma body vyjádřit jako rozdíl potenciálů těchto bodů.

❑ Vektorový elektrický potenciál

Ve 3 a 4 Maxwellově rovnici je na levé straně operace *div* v. Podle tabulky diferenčních operací druhého řádu lze, pokud se bude rovnat pravá strana rovnice nule, zapsat vektor *v* jako rotaci dalšího vektoru. Pro Maxwellovu rovnici *div* D = *0* tento vektor označíme symbolem C a nazveme jej vektorový potenciál indukce elektrického pole nebo vektorový elektrický potenciál. Bude tedy platit vztah

$$\mathbf{D} = \mathrm{rot}\,\mathbf{C} \qquad (1.81)$$

a vektorový elektrický potenciál lze použít pouze v oblasti, v níž je objemová hustota náboje nulová a tedy i pravá strana definiční rovnice nulová. Definiční vztah se zpravidla rozšiřuje Coulombovou podmínkou ve tvaru

$$\mathrm{div}\,\mathbf{C} = 0 \qquad (1.82)$$

Vektorový elektrický potenciál se v praxi příliš neužívá a proto se o něm více nebudu zmiňovat.

❑ Vektorový magnetický potenciál

Ve čtvrté Maxwellově rovnici zavedeme vektor *A* - tzv. vektorový potenciál indukce mag. pole nebo krátce vektorový magnetický potenciál, jako rotaci vektoru *B*.

$$B = \mathrm{rot}\,A \qquad (1.83)$$

opět s doplňkovou Coulombovou podmínkou

$$\mathrm{div}\,A = 0 \qquad (1.\ 84)$$

Takto zavedený potenciál nemá omezenou platnost, protože čtvrtá Maxwellova rovnice má na pravé straně vždy nulu a není potřeba žádnou veličinu zanedbávat. Vektorový magnetický potenciál má široké praktické využití a to především z těchto důvodů:

a) je definován v celé oblasti, včetně proudovodičů,

b) má jednodušší vztah ke zdrojům než vektor mag. indukce,

c) snižuje počet proměnných, protože má jen ty složky, které má proud, budící tento potenciál,

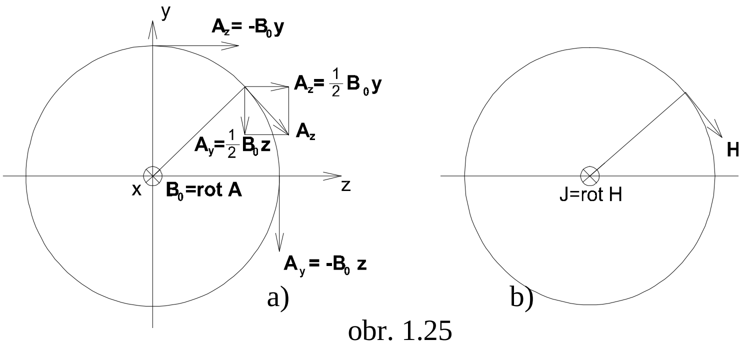
d) tok vektoru *B* plochou transformuje z plošného integrálu $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ na křivkový $\Phi = \int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ (místo dvou integrálů jen jeden).

Zatímco rozložení vektorového potenciálu A definuje jednoznačně pole vektoru B, neodpovídá určitému B jediné možné rozložení vektorového potenciálu A. Např. podle Prof. Haňky je pole se složkami $B_x = B_o = konst,\ B_y = 0,\ B_z = 0$ viz obr.1.25 popsat potenciálem v těchto kombinacích jeho složek:

$$\begin{aligned}
&a)\quad A_X = 0 \quad A_Y = -B_0 \cdot z \quad\ \ A_Z = 0 \\
&b)\quad A_X = 0 \quad A_Y = 0 \qquad\qquad\ A_Z = B_0 \cdot y \quad , \\
&c)\quad A_X = 0 \quad A_Y = -\tfrac{1}{2} B_0 \cdot z \quad A_Z = \tfrac{1}{2} B_0 \cdot y
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_X & \mathbf{u}_Y & \mathbf{u}_Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_X & A_Y & A_Z \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial A_Z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z} \right)}_{B_X} \cdot \mathbf{u}_X + \underbrace{\left(\frac{\partial A_X}{\partial z} - \frac{\partial A_Z}{\partial x} \right)}_{B_Y} \cdot \mathbf{u}_Y + \underbrace{\left(\frac{\partial A_Y}{\partial x} - \frac{\partial A_X}{\partial y} \right)}_{B_Z} \cdot \mathbf{u}_Z$$

Po provedení rotace s hodnotami složek *A* ve všech případech, tj. a) b) i c) obdržíme složky $B_x = B_o,\ B_y = 0,\ B_z = 0$. Všechny případy zadaného vektorového potenciálu popisují tedy stejné pole *B*. Podle obr.1.25a pro R = 1 je zřejmé, že liniemi takového potenciálu budou (analogicky jako u indukčních čar obr.1.25b) kružnice se středem v ose *x*. Ke každému *A* můžeme přičíst gradient libovolné skalární funkce *Ψ*:



obr. 1.25

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\Psi \tag{1.85}$$

Aplikujeme-li potom na tento nový potenciál za účelem výpočtu magnetické indukce operaci rotace

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}' = \mathrm{rot}(\mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\Psi) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} + \mathrm{rot} \cdot \mathrm{grad}\,\Psi = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

dostáváme stejnou mag. indukci jako bychom ji počítali z vektorového potenciálu A. Vektorový magnetický potenciál je třeba ve stacionárním poli opět normovat. Podobně jako je v elektrickém poli možné vyjádřit potenciál v přímo pomocí budicí veličiny (náboje) např. $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \displaystyle\int_V \frac{\rho}{R} \cdot dV$,

máme snahu vyjádřit i vektorový potenciál přímo pomocí budicí veličiny - proudu, resp. proudového elementu. Za tím účelem využijeme vztah (1.31)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{u}_R}{R^2} \cdot dV \tag{1.86}$$

Pro další úpravy tohoto vztahu si připomeňme identitu při operacích s obecným vektorem v a obecným skalárem *S*.

$$\mathrm{rot}(\mathrm{S}\cdot\mathbf{v}) = \mathrm{S}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \mathrm{grad}\,\mathrm{S}\times\mathbf{v} \qquad (1.87)$$

jiný zápis: $\nabla\times(\mathrm{S}\cdot\mathbf{v}) = \mathrm{S}\cdot\nabla\times\mathbf{v} + \nabla\mathrm{S}\times\mathbf{v}$ (1.88)

Z tohoto zápisu vyjádřeme druhý člen pravé strany pro konkrétní skalár *S* ➔ *1/R* a konkrétní vektor *v* ➔ *J* :

$$\nabla\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)\times\mathbf{J} = \nabla\frac{\mathbf{J}}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{R}}\underbrace{\nabla\times\mathbf{J}} \longrightarrow \mathrm{rot}\,\mathbf{J} = 0 \Rightarrow \mathbf{J}(\mathrm{r}') \text{ nezávisí na } r \text{ viz obr. 1.26} \qquad (1.89)$$

Z vektorové algebry je známá funkce $\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) = -\frac{\mathbf{u}_\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2}$ výraz za integrálem (1.86) je tedy

$$\left[\mathbf{J}\times\left(\frac{\mathbf{u}_\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2}\right)\right]\mathrm{dV} = \left\{\mathbf{J}\times\left[-\nabla\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)\right]\right\}\mathrm{dV} = \left[\nabla\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)\times\mathbf{J}\right]\mathrm{dV} = \left(\nabla\times\frac{\mathbf{J}}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{dV} = \mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{J}}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{dV}$$

Konstantu před integrálem můžeme přesunout až za rot, takže lze rovnici (1.86) psát:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\mathrm{V}\frac{\mathbf{J}}{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{dV} = \mathrm{rot}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\mathrm{V}\frac{\mathbf{J}}{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{dV} \qquad (1.90)$$

Z definičního vztahu B = rot A vyplývá, že pro objemový proud je

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\mathrm{V}\frac{\mathbf{J}}{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{dV} \qquad (1.91)$$

pro osamělý pohybující se náboj

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\mathrm{q}\cdot\mathbf{v}}{\mathrm{R}} \qquad (1.92)$$

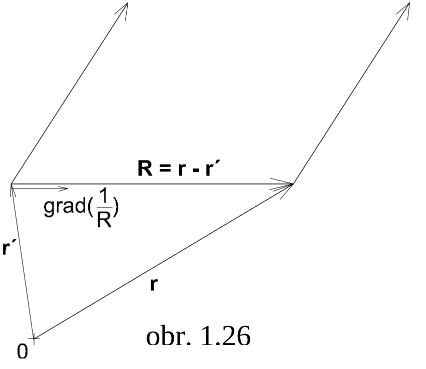
pro liniový proud

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{I}\oint_\mathrm{l}\frac{\mathbf{dl}}{\mathrm{R}} \qquad (1.93)$$

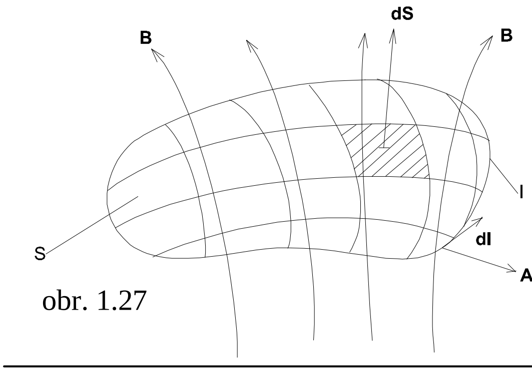
pro plošný proud

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\mathrm{S}\frac{\mathbf{K}}{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{dS} \qquad (1.94)$$

kde *R* je vzdálenost od proudového elementu k referenčnímu bodu, v němž vektorový potenciál hledáme. Vzhledem k tomu, že za integrálem je skalární součin skaláru a vektoru, odpadá požadavek kolinearity členů za integrálem, jak tomu bylo u Gaussovy věty, u zákona celkového proudu apod. Jak je vyznačeno na obr.1.26, má vektorový potenciál směr proudové hustoty, kterou je buzen.



obr. 1.26



obr. 1.27

Praktický význam má vektorový potenciál např. při výpočtu magnetického toku:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \qquad (1.95)$$

Tok vektoru B plochou *S* (tedy magnetický indukční tok) je roven cirkulaci vektoru A po okrajové křivce *l* plochy *S*, přičemž plocha *S* může být jakkoli zakřivena. Indukci B tedy pro výpočet toku není třeba vůbec počítat. Na obr.1.27 je toku *Φ* (orientovanému skaláru) přiřazena čítací šipka ve směru *dS*, tj. kladné normály n k ploše *S*.

❑ Vektorový potenciál proudové hustoty

Pro úplnost se ještě pokusme použít podobný princip odvozování potenciálu u rovnice kontinuity (1.11). Zde je možno definovat pro stacionární proudové pole, v němž nedochází k časové změně objemové hustoty náboje, vektorový potenciál proudové hustoty. Označíme jej symbolem T. Protože se s tímto potenciálem v praxi příliš nesetkáme, nebudu jej dále rozvádět.

❑ Laplaceova a Poissonova rovnice

Při řešení elektromagnetického pole v jisté oblasti obvykle hledáme rozložení potenciálů v této oblasti. Pak vycházíme z Poissonovy nebo Laplaceovy rovnice. Při odvození těchto rovnic vycházíme zpravidla z Maxwellových rovnic nebo z definičních rovnic pro potenciály. Tak například aplikujeme-li operaci div na vztah E = - grad *φ*, dostaneme

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{\varphi}\right) = -\rho \qquad /\cdot \tfrac{1}{\varepsilon} \qquad (1.96)$$

Z identity pro obecný vektor v a skalár *S*:

$\mathrm{div}\,(S\cdot v) = S\cdot\mathrm{div}\,v + v\cdot\mathrm{grad}\,S$ přičemž $(v \Rightarrow \mathrm{grad}\,\varphi,\ S \Rightarrow \varepsilon)$

$\mathrm{div}\,(\varepsilon\cdot\mathrm{grad}\,\varphi) = \varepsilon\cdot\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\varepsilon$

Uvážíme-li, že $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \Delta\varphi$ a $\varepsilon = \mathrm{konst.}$ => $\mathrm{grad}\,\varepsilon = 0$ je:

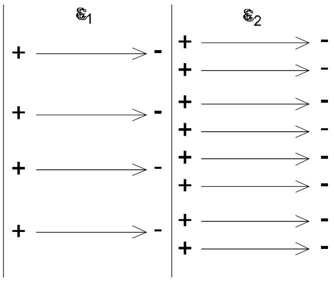
$\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ => Poissonova rovnice (1.97)

$\Delta\varphi = 0$ => Laplaceova rovnice (1.98)

V nehomogenním poli, kde ε ≠ konst. je z rovnice

$\mathrm{div}\,D = \mathrm{div}\,(\varepsilon\cdot E) = \varepsilon\cdot\mathrm{div}\,E + E\cdot\mathrm{grad}\,\varepsilon = \rho$ (1.99)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}.\mathrm{grad}\varepsilon \qquad (1.100)$$



obr. 1.28

Na pravé straně tedy jakoby přibyl další zdroj, způsobený nehomogenitou prostředí. Pole je zřídlové nejen v místě, kde se nachází náboj *ρ*, ale i tam, kde je grad $\varepsilon \neq 0$. Siločáry vznikají nebo zanikají všude tam, kde se mění permitivita dielektrika viz obr.1.28. Protože siločáry vycházejí z náboje, musí být na pravé a levé straně rozhraní jiný počet nábojů.

Podobně bychom z rovnice $\mathrm{div}\,(\mu\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_m) = 0$ pro konstantní *μ* obdrželi Laplaceovu rovnici pro φ_m

$\Delta\varphi_m = 0$ (1.99)

a dále z rov div $J^e = -\partial\rho^e/\partial t$, tedy div $(\gamma\cdot\text{grad}\ \varphi) = -\partial\rho^e/\partial t$ dostaneme pro konstantní γ opět Laplaceovu rovnici $\Delta\varphi = 0$.

Dále upravme podobně rovnice rot H = rot (νB) = J a B = rot A, kde $\nu = 1/\mu$ je reluktivita. Tedy

$$\text{rot}\,(\nu\,\text{rot A}) = \text{J} \qquad (1.100)$$

za použití identity rot $(S\cdot\text{v}) = S\cdot\text{rot v} - [\text{v x grad } S]$ položíme $S \Rightarrow \nu$, v => rot A. Potom můžeme psát:

$$\nu\cdot\text{rot rot A} - [\text{rot A x grad } \nu] = \text{J}$$

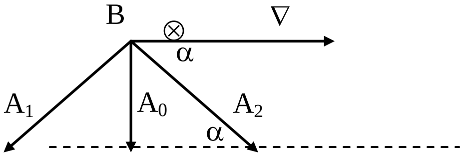
Podle další identity rot rot v = grad div v - Δv bude $\nu\cdot\text{grad div A} - \nu\Delta\text{A} + [\text{grad } \nu \text{ x rot A}] = \text{J}$

Zavedeme Coulombovu kalibrační podmínku div A = 0 .... - $\nu\cdot\Delta\text{A} + [\text{grad } \nu \text{ x rot A}] = \text{J}$ pro konstantní ν

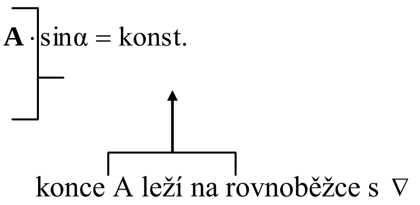
$$\Delta\text{A} = -\,\mu\cdot\text{J} \;\Rightarrow\; \text{Poissonova rovnice} \qquad (1.101)$$

Pokud není μ konstantní je výhodnější řešit přímo rovnici (1.100).

Vysvětleme si nyní ještě oprávněnost doplňující Coulombovy podmínky div A = 0 nebo jinak zapsáno $\nabla\cdot\text{A} = 0$. Podívejme se nejprve na obrázek 1.25a. Aby platilo B = rot A neboli B = ∇ x A, musí symbolický vektor ∇ spolu s vektorem A ležet v rovině kolmé na B (B, ∇ ,A tvoří pravoúhlý systém), např. v takové relaci, jaká je zachycená na obr.1.29:



obr.1.29



Zápis pomocí modulů $\qquad$ B = ∇ x A = $|\nabla|\cdot\text{A}\cdot\sin\alpha\cdot\text{B}_o$ = konst.

Jak již bylo ukázáno, mohou dát různé kombinace vektorového potenciálu A jednoznačnou hodnotu indukce B. Aby B = rot A nabývala jednoznačnou hodnotu, musí také ∇.A.$\sin\alpha$ nabývat jen jednu hodnotu, zatímco div A = ∇.A = ∇.A.$\cos\alpha$ může nabývat libovolných hodnot, tedy například i nulových. Podmínce div A = ∇.A = 0 vyhovuje z obrázku jen vektor A_o, čímž jsme z daných možností vybrali jen jednu a volbu vektoru A jsme omezili.

Podobným způsobem, jako z rovnice (1.101), lze odvodit z rovnice rot$(\frac{1}{\varepsilon}\,\text{rot C}) = 0$ Laplaceovu rovnici

$$\Delta\text{C} = 0 \qquad (1.102)$$

a z rovnice rot$(\,{}^{1}\!/_{\gamma}\,.\ \text{rot T}) = \text{rot E}^e = \text{J}^e_m$, kde J^e_m lze formálně interpretovat jako proudovou hustotu vnucených fiktivních proudů magnetických nábojů (blíže v další kapitole), lze odvodit Laplaceovu rovnici

$$\Delta\text{T} = 0 \qquad (1.103)$$

❑ Redukované potenciály

Potenciály uvedené v kapitole 1.3.1 jsou přiřazeny k úplným základním polním veličinám a proto byly nazvány totální. Tyto úplné polní veličiny lze však rozdělit dále na složky a potenciály přiřazené jen těmto určitým složkám vektorových veličin nazveme redukované potenciály. Tyto potenciály nejsou v běžné praxi příliš používány a proto zde budou uvedeny jen stručně.

Ve stacionárním magnetickém poli rozložme vektor intenzity mag. pole na dvě složky:

$$H = H^P + H^V \qquad (1.104)$$

potom

$$\text{rot } H = \text{rot}(H^P + H^V) = \text{rot } H^P + \text{rot } H^V = J \qquad \text{kde}$$

a) H^P je potenciální složka $H^P = -\text{ grad } \varphi_m$

a platí pro ni $\text{rot } H^P = 0$ (1.105)

φ_m je redukovaný skalární magnetický potenciál intenzity stacionárního magnetického pole.

b) H^V je složka vírová $\text{rot } H^V = J$ (1.106)

z formální podobnosti rovnice $\text{rot } T = J$ je zřejmé, že H^V lze ztotožit s totálním potenciálem T. Dosaďme

$$\text{div } B = \text{div } (\mu\cdot H) = \text{div } \mu(H^P + H^V) = \text{div } (\mu\cdot H^P) + \text{div } (\mu\cdot H^V)$$

$$\text{div } B = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div } (\mu\cdot\text{grad } \varphi_m) = \text{div } (\mu\cdot H^V)$$

Analogicky z rov.: $\text{div } (\varepsilon\cdot\text{grad } \varphi) = -\rho$

položíme: $\text{div } (\mu\cdot\text{grad } \varphi_m) = -\rho_m$ (1.107)

kde $\rho_m = -\text{ div } (\mu.\ H^V)$ je objemová hustota fiktivních magnetických nábojů (příslušná složce H^V). Tyto náboje ve skutečnosti neexistují a jsou zavedeny formálně jen pro některé výpočty. Rozklad na složky H^P a H^V není jednoznačný (libovolnou část H^P můžeme zahrnout do H^V). Je tedy třeba určovat doplňující podmínky. U stacionárního magnetického pole v lineárním prostředí můžeme na obě složky aplikovat princip superpozice, přičemž H^V je složka buzená proudy s danými proudovými hustotami ve vakuu a nazývá se také zdrojová složka, H^P je vyvolaná magnetizací magnetik a nazýváme ji magnetizační složka.

V elektrostatickém poli rozložme vektor elektrické indukce na dvě složky:

$$D = D^S + D^Z \qquad (1.108)$$

potom $\text{div } D = \text{div}(D^S + D^Z) = \text{div } D^S + \text{div } D^Z = \rho$

kde

a) D^S je solenoidální složka $D^S = \text{rot } C$

a platí pro ni $\text{div } D = 0$ (1.109)

C je zde redukovaný vektorový potenciál elektrické indukce

b) D^Z je zřídlová (nesolenoidální) složka indukce $\text{div } D^Z = \rho$

Aplikujme rot na E : $\text{rot } E = \text{rot } \frac{1}{\varepsilon} D = \text{rot } \frac{1}{\varepsilon} D^S + \text{rot } \frac{1}{\varepsilon} D^Z = 0$ a tedy

$$\text{rot } (\frac{1}{\varepsilon} \text{ rot } C) = -\text{ rot } (\frac{1}{\varepsilon} D^Z)$$

z formální podobnosti J = rot B můžeme zavést tzv. proudovou hustotu fiktivních proudů magnetických nábojů, označenou J_m

$$J_m = -\ \mathrm{rot}(\frac{1}{\varepsilon} D^Z) \qquad (1.110)$$

nebo

$$J_m = \mathrm{rot}\ (\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\ C) \qquad (1.111)$$

Z těchto rovnic lze za použití doplňkové Coulombovy podmínky odvodit Poissonovu rovnici

$$\Delta C = -\ \varepsilon . J_m \qquad (1.112)$$

Jako u intenzity mag. pole je i zde rozklad nejednoznačný. Libovolnou část D^S lze zahrnout do D^Z .V elektrostatickém poli, v lineárním prostředí můžeme aplikovat princip superpozice obou složek, přitom D^Z je buzena náboji s objemovou hustotou *r* a nazýváme ji zdrojová složka, D^S vznikla polarizací prostředí a nazývá se polarizační složka. Také redukované potenciály jsou nejednoznačné a je potřeba je normovat.

❑ Elektromotorické napětí

Mějme dva bodové náboje Q_1, Q_2. V místě bodového náboje Q_2 bude intenzita pole vybuzená nábojem Q_1:

$$E = Q_1 / 4\pi\varepsilon R^2 .$$

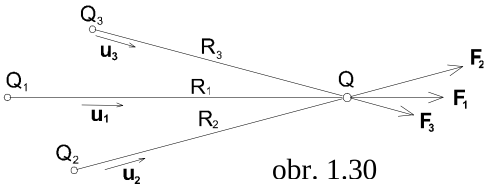
Na náboj Q_2 bude tedy působit silou

$$F = E.Q_2 = \frac{Q_1.Q_2}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{u}_R = \frac{Q_1.Q_2}{4\pi\varepsilon R^3}\mathbf{R} \qquad (1.113)$$

Tento vztah je nazýván Coulombův zákon. Co do smyslu působení sil se souhlasné náboje odpuzují, náboje různé polarity se přitahují. Směr sil je shodný se směrem spojnice obou nábojů. Pro větší počet nábojů sčítáme účinky jednotlivých nábojů vektorově. Na jednotkový zkušební náboj působí od *n* nábojů mechanická síla, kterou můžeme využít na stanovení intenzity elektrického pole coulombovské povahy

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon R_i^2}\mathbf{u}_{Ri} \qquad (1.114)$$

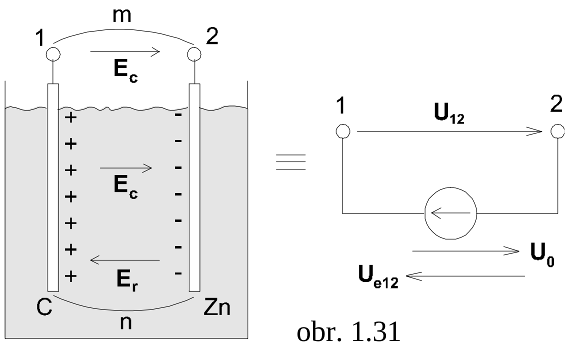
kde u_{Ri} jsou jednotkové vektory od jednotlivých nábojů ke zkušebnímu náboji obr.1.30. Po rekombinaci kladných a záporných nábojů elementárních částic toto pole vymizí. Uvedené silové působení nábojů v klidu je jediným silovým projevem elektrického nevírového pole. V případě vírového pole působí na zkušební náboj i jiné síly než Coulombovy. Nazývají se rozdělující síly a označují se F_r . Limita jejich poměru ke zkušebnímu náboji se nazývá rozdělující (vnucenou nebo pomocnou) intenzitou el. pole E_r. Platí pro ni vztah:



obr. 1.30

$$Er = \lim_{Q \to 0} \frac{\mathbf{F}_r}{Q} \qquad (1.115)$$

Tato síla již není působená interakcí různých nábojů jen v souvislosti se vztahem (1.106), tedy nevede k neutralizaci nábojů a vyrovnávání potenciálů, ale naopak vede k rozdělení nábojů různé polarity v el. zdrojích. Vede zde k přeměně jiné energie na energii elektrickou. V závislosti na druhu elektrického zdroje se chemickými reakcemi rozdělí elektrolyt na záporné a kladné ionty. Celková intenzita je zde dána součtem intenzity coulombovské a rozdělující $E = E_c + E_r$. V elektrických generátorech jsou tyto síly vyvolané pohybem nábojů (el. proud) v magnetickém poli, v transformátorech časovou změnou magnetického pole, čili elektromagnetickou indukcí. Dále to mohou být síly termoelektrické, piezoelektrické apod. Např. ve Van de Grafově generátoru jsou to mechanické síly, které unášejí separované náboje, lnoucí na izolačním pásu směrem ke sběrné elektrodě. Obecně lze říci, že u všech zdrojů se později rozdělené náboje opět působením coulombovských sil vyrovnávají ve vnějších pracovních obvodech.



obr. 1.31

Z těchto úvah a vztahu (1.108) lze definovat elektromotorické napětí U_e jako míru práce, kterou konají rozdělující síly elektrického pole při přenosu jednotkového kladného náboje po dané dráze. Matematicky zapsáno:

$$Ue_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_r.\mathbf{dl} \tag{1.116}$$

kde E_r vypočteme ze vztahu (1.115).

Osvětleme si aplikaci vztahu (1.116) blíže na příkladu galvanického článku obr.1.31, sestávajícího ze tří funkčních komponent - elektrolytu a elektrod (z uhlíku a zinku). Na uhlíkové elektrodě se začínají vylučovat vlivem sil elektrochemické povahy kladné, na zinkové záporné náboje. Řekněme, že všechny vlivy způsobující vylučování nábojů připíšeme účinku jediné náhradní rozdělující intenzity E_r. Na elektrodách se objevily rozdílné náboje, které jsou ovšem příčinou vzniku coulombovské intenzity E_c ve směru od kladného k zápornému náboji a tedy proti směru E_r. Na rozdíl od E_r existuje E_c všude, kde jsou opačné náboje, tedy i mimo elektrolyt.

Ve stavu naprázdno, kdy je článek odpojen od zátěže a kdy je ukončena disociace elektrolytu na ionty, musí být intenzita

$$E = E_r + E_c = 0 \tag{1.117}$$

jinak by v elektrolytu tekl proud o hustotě $J = \gamma.E$. Pro elektromotorické napětí v takto vykompenzovaném stavu potom platí pro integrál po uzavřené dráze *1m2n1*

$$\oint_{1m2n1} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \oint_{1m2n1} \mathbf{E}_c\cdot\mathbf{dl} + \oint_{1m2n1} \mathbf{E}_r\cdot\mathbf{dl} = \int_{1m2} \mathbf{E}_c\cdot\mathbf{dl} + \int_{2n1} -\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{dl} + \int_{1m2} \mathbf{E}_r\cdot\mathbf{dl} + \int_{2n1} \mathbf{E}_r\cdot\mathbf{dl}$$

Vzhledem k tomu, že $\int_{1m2} \mathbf{E}_r\cdot\mathbf{dl} = 0$ zbývá pouze poslední integrand, který je roven zápornému elektromotorického napětí definovanému podle (1.116)

$$Ue_{21} = - Ue_{12} = \int_{2n1} \mathbf{E}_r\cdot\mathbf{dl} = -\int_{2n1} \mathbf{E}_c\cdot\mathbf{dl} = \int_{1n2} \mathbf{E}_c\cdot\mathbf{dl} = U_{12} = U_v \tag{1.118}$$

kde $U_v = - U_{e12}$ je označeno tzv. vnitřní napětí zdroje na dráze *n* a je co do hodnoty rovné elektromotorickému napětí, stanovenému přes vnitřek zdroje U_{e12}. Vně elektrolytu mezi rozpojenými svorkami 1-2 je elektrostatické pole s intenzitou E_c. Napětí naprázdno je

$$U_o = \int_{1-m-2} \mathbf{E}_c\cdot\mathbf{dl} \tag{1.119}$$

Obvodové napětí podél uzavřené dráhy *1-m-2-n-1* (obr.1.31) s přihlédnutím ke skutečnosti, že pole coulombových sil je nevírové a

$$\oint \mathrm{E_c} \cdot \mathrm{dl} = \int_{1m2} \mathrm{E_c} \cdot \mathrm{dl} + \int_{2n1} \mathrm{E_c} \cdot \mathrm{dl} = 0 \qquad (1.120)$$

je potom

$$\oint_{1m2n1} \mathbf{E} \cdot \mathrm{dl} = \int_{1m2} \mathbf{E}_c \cdot \mathrm{dl} + \int_{2n1} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_r) \cdot \mathrm{dl} = \int_{1m2} \mathbf{E}_c \cdot \mathrm{dl} + \int_{2n1} \mathbf{E}_c \cdot \mathrm{dl} + \int_{2n1} \mathbf{E}_r \cdot \mathrm{dl} = \int_{2n1} \mathbf{E}_r \cdot \mathrm{dl} = \mathrm{U_{e21}} = -\mathrm{U_{e12}} \qquad (1.121)$$

Obvodové napětí podél dráhy procházející zdrojem (obr.1.31) je tedy rovno záporné hodnotě elektromotorického napětí zdroje. U zdroje naprázdno je podle (1.110) rovno

$$\int_{2n1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{2n1} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_r) \cdot \mathbf{dl} = 0$$

a obvodové napětí je

$$\int_{1m2n1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{1m2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{dl} = \mathrm{U_o} = \int_{2n1} \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{dl} = \mathrm{U_{e21}} = -\mathrm{U_{e12}}$$

Potom je tedy

$$Uo = Uv = -Ue_{12} \qquad (1.122)$$

Absolutní hodnota obvodového napětí po uzavřené křivce *1m2n1* procházející zdrojem elektrické energie se vždy rovná absolutní hodnotě elektromotorického napětí zdroje a to i u zatíženého zdroje, kde

$J = \gamma E = \gamma(E_r + E_c) \neq 0$ Obvodový integrál bude mít opět tvar

$$\oint_{1m2n1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \oint_{1m2n1} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{dl} + \oint_{1m2n1} \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{dl} = \int_{2n1} \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{dl} = -\mathrm{U_{e12}} \qquad (1.123)$$

Výraz $\oint_{1m2n1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -U_{e12}$ můžeme interpretovat jako součet úbytků napětí na jednotlivých zatěžovacích odporech zapojených na dráze *1m2n1*, včetně vnitřního odporu zdroje, představuje vztah (1.115) zobecnění druhého Kirchhoffova zákona. Napětí jsou veličiny skalární, proto nemají směr a smysl. Přesto je však označujeme šipkami, jak je to na obr.1.31. Smysl šipky svorkového napětí (vnější šipka zdroje) značíme od vyššího potenciálu k nižšímu, tedy od + k - tzn. proti proudu, který teče zatíženým zdrojem (zdrojový systém značení). Vnitřní šipka reprezentuje směr rozdělující intenzity, tedy od - k +. V teorii obvodů se pojem elektromotorické napětí téměř neužívá a místo něj používáme veličinu vnitřní napětí, které je rovno napětí naprázdno.

❑ Zákon o elektromagnetické indukci

Mění-li se magnetické pole $\Psi = N \cdot \Phi$, spřažené s vodivou smyčkou C_e (příp. cívkou) v čase, indukuje se ve smyčce elektro-motorické napětí (Faradayův indukční zákon):

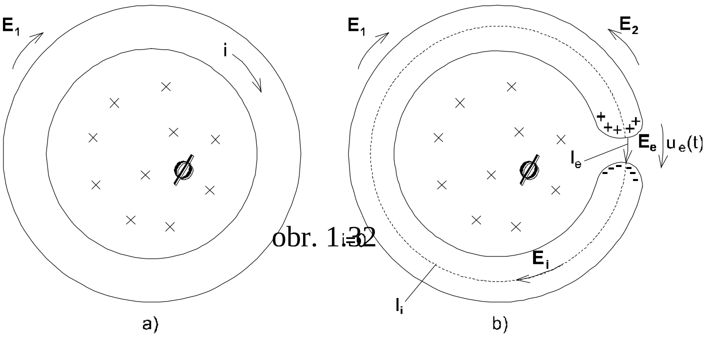
$$u_e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Psi}{dt} \qquad (1.124)$$

V Maxwelových rovnicích již bude $rot\ E \neq 0$, pole není stacionární nýbrž kvazistacionární a není tedy jen potenciální. Platí

$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ a s časovou změnou přestává být pole konzervativní.

Z Maxwellovy rovnice můžeme psát

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -rot\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$



obr. 1.32

Časová derivace je zde až za rotací, protože je v tomto případě jedno, zda derivujeme nejprve podle času nebo podle prostorových souřadnic. Převedením na homogenní rovnici

$$\underbrace{rot(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})}_{-\text{ grad } \varphi} = 0$$

$$\mathbf{E} \;=\; \text{- } grad\ \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad\qquad grad\ \varphi = -\,\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (1.125)$$

Nárůst nebo pokles potenciálu (*grad φ*) je tedy dán jak intenzitou elektrického pole, tak i časovou změnou pole magnetického. Intenzita magnetického pole má vírový i potenciální charakter a nelze ji vyjádřit gradientem potenciálu φ. Od stacionárního pole se však liší jen zdrojem a tvarem, nikoliv fyzikální podstatou. Obě modifikace pole představují sílu, působící na náboj. Lze je spolu superponovat a mohou se vzájemně i rušit. Výsledné pole může mít jak část zřídlovou, pro kterou platí div ε_oE = ρ_o, tak část vírovou popsanou rovnicí *rot E* = - $\partial B/\partial t$. Většinou existují současně a vytvářejí jednotné výsledné pole např. podle obr.1.32a. Zde je vidět, že smyčkou, jejíž plochu protíná časově proměnné magnetické pole, protéká proud. Jestliže smyčku přerušíme, přerušíme samozřejmě i tento proud, ve smyčce je $J = 0$ a tedy i na dráze l_i je $E_i = 0$. Aby výsledná intenzita byla ve vodiči skutečně nulová, musí působit proti E_1 další intenzita E_2 stejné velikosti, tak aby

$$E_i = E_1 + E_2 = 0 \qquad (1.126)$$

Tato intenzita má zřejmě povahu coulombovského pole od nábojů, soustředěných podle obr.1.32b na rozpojených koncích závitu. Intenzitu mezi rozpojenými konci závitu ve vzduchu označme E_e.

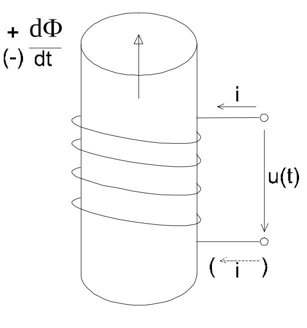
Potom platí

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{li} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} + \int_{le} \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

a tedy

$$u = \frac{d\Phi}{dt} \qquad (1.127)$$

Celé elektromotorické napětí se tedy koncentruje na svorkách rozpojeného závitu. Kdybychom mezi svorky zapojili odpor, byly by na svorkách opět náboje, jak bylo řečeno v souvislosti s rozhraním dvou vodivých oblastí. Pro určení šipky napětí vícezávitové cívky obr.1.33 platí pravidlo: *Tok Φ musí být souhlasný s tokem, který by způsobil proud, vtékající do cívky svorkou, ze které směřuje čítací šipka napětí. Je-li šipka napětí opačného směru, je u = - dΦ/dt.*



Tok *Φ* může být buzen i proudem, který prochází vlastní cívkou. Tímto tokem se indukuje na svorkách cívky další napětí, zřejmě orientované tak, aby bránilo změně napájecího napětí cívky. Tomuto jevu říkáme samoindukce.

obr. 1.33

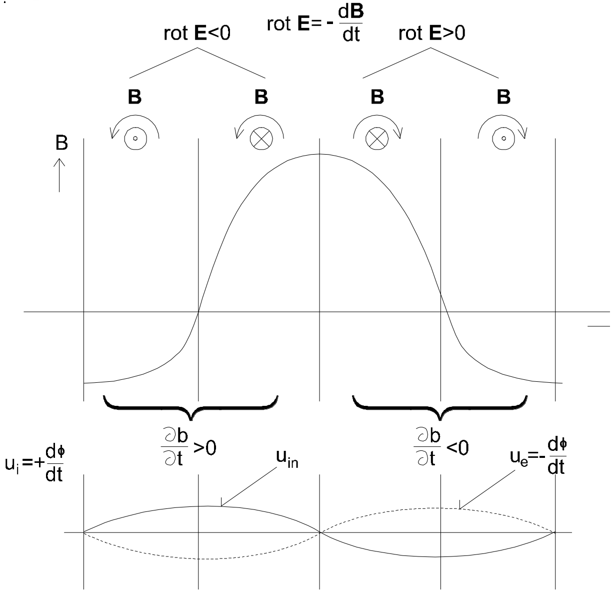
V technické praxi se s vírovým vektorem *E* setkáváme ve dvou velkých oblastech:

1. vytváří indukované napětí v uzavřených vodivých smyčkách (el. stroje a přístroje, měřicí zařízení),
2. šíří se prostřednictvím elektromagnetických vln.

V této kapitole nás bude zajímat pouze bod 1.

Vzájemná závislost *rot E* indukce *B*, času a indukovaného napětí znázorňuje obr.1.34.

Matematické vysvětlení vzniku indukovaného napětí je zřejmé z Maxwellových rovnic. Jistě nás ale zajímá i zdůvodnění fyzikální. To vychází z vlastnosti všech energetických systémů nacházejících se v přírodě, a to té vlastnosti, že každý systém se snaží zachovat si minimální energii a brání změnám, o které se snaží vnější vlivy. Pokud tedy protíná vodivou smyčku stejnosměrný mag. tok, nedochází v systému k časové změně a není tedy třeba zmíněnou "obranu" systému proti změně aktivizovat. Bude-li se magnetický tok ve smyčce měnit, začne smyčka produkovat magnetické pole, orientované proti časové změně, která změnu vyvolala. Aby mohla vodivá smyčka produkovat magnetický tok, musí jí protékat proud, musí v ní tedy být indukovaná intenzita pole. Integrál součinu této intenzity a délkového elementu po části smyčky je potom indukované napětí.



obr. 1.34

Směr indukovaného napětí podle (1a) se řídí Lencovým pravidlem: Smysl indukovaného napětí je takový, že proud jím vyvolaný chce zabránit změně pole která ho způsobila a "snaží" se udržet pole v čase konstantní. Křivka C_e je libovolná křivka, ale časově proměnný magnetický tok ji musí protínat. Naproti tomu intenzita pole E takto indukovaná je i v místě, kde žádná vodivá smyčka není.

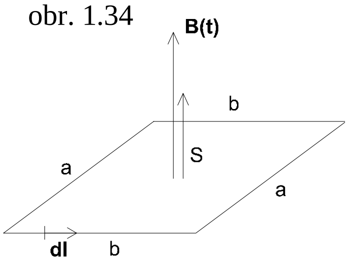
Časová změna magnetického toku může vzniknout buď změnou B nebo změnou s, protože dΦ = d(B.s). Na obr.1.35 je např. pevná smyčka v časově proměnném poli B(t) = B_o·sin ωt. Pro indukované napětí zde bude platit vztah (1.126). Plocha smyčky se může měnit např. otáčením smyčky obr.1.36 kolem své osy. Tímto pohybem v magnet. poli působí na volné náboje síly schopné vyvolat průchod elektrického proudu. Vzniká pohybová složka intenzity pole

$$E = v \times B \qquad (1.128)$$

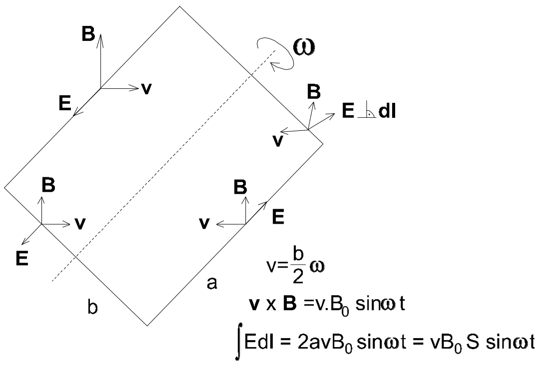
a pro pohybující se smyčku pak platí

$$\boldsymbol{u_p} = \oint \mathbf{E}\cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = -\frac{\boldsymbol{d}\Phi}{\boldsymbol{dt}} = \oint\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} \qquad (1.129)$$

Na úsecích stran b je intenzita E kolmá na element integrační dráhy dl a tyto úseky se neuplatní. Pro v = b/2·ω je



obr. 1.35



$$\mathrm{v \times B = v \cdot B_o \cdot \sin \omega t}$$

a $$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = 2a\cdot v\cdot B_o\cdot \sin \omega t = \omega\cdot B_o\cdot s\cdot \sin \omega t$$

Ke stejnému výsledku bychom došli, kdybychom fixovali smyčku, na kterou bychom působili pohybujícím se otáčivým magnetickým polem.

Změnou B nebo s tedy dostáváme jakoby dvě složky indukovaného napětí transformační u_t z časové změny magnetického toku a pohybovou u_p, vznikající pohybem smyčky v magnetickém poli.

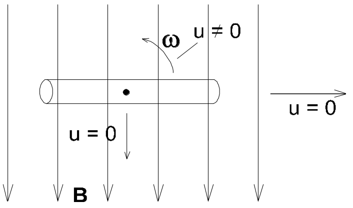
Není-li smyčka po obvodu fixní, např. má-li kluzné kontakty, je vhodné počítat obě části indukovaného napětí odděleně takto:

$$u = u_t + u_p = -\frac{d\Phi}{dt} + \oint_C (\mathbf{v}\ x\ \mathbf{B}).d\mathbf{l} \qquad (1.130)$$

obr. 1.36

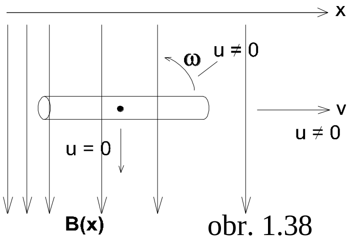
Ke změně plochy smyčky může dojít také pohybem samotné smyčky jako celku nebo jen jejich částí, tedy deformací smyčky. Existuje několik možností indukce napětí:

a) Smyčka se pohybuje v homogenním poli B



Podle obr.1.37 se v homogenním poli napětí indukuje pouze při otáčení cívky, kdy se mění průmět její plochy, kolmý na vektor magnetické indukce. Otáčí-li se závit rovnoměrnou rychlostí, má indukované napětí sinový průběh. Tento princip se používá u ss strojů, kdy se střídavé napětí usměrňuje komutátorem.

b) Smyčka se pohybuje v nehomogenním časově stálém poli B



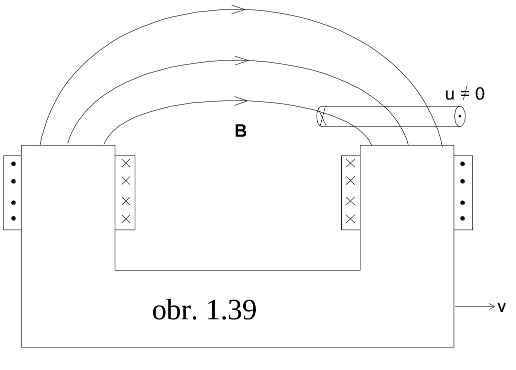
obr. 1.38

Podle obr.1.38 se při pohybu cívky ve směru kolmém na siločáry bude měnit indukce procházející cívkou a při pohybu otáčivém kolem osy cívky se bude měnit jak plocha, tak i indukce. V těchto případech se tedy bude indukovat v cívce napětí. Napětí se indukovat nebude, pohybuje-li se cívka ve směru vektoru indukce.

c) Pole B se časově mění, smyčka je fixní

Tento případ byl již dostatečně probrán. Indukuje se transformační napětí.

d) Budicí vinutí se pohybuje a unáší s sebou vlnu magnetického pole



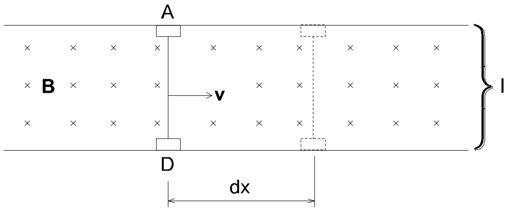
obr. 1.39

Magnetický obvod (např. rotor el. stroje) se pohybuje (obr.1.39) a unáší sebou magnetické pole. Toto protíná fixní cívku (např. ve statoru el stroje) a indukuje v ní napětí. V el. strojích se unášená vlna otáčí a mluvíme o točivém poli. Běžící vlnu magnetického pole lze vybudit i pevnými budicími cívkami, napájenými např. trojfázovým proudem. V laboratorních cvičeních je tento případ demonstrován na úloze zjišťující indukované napětí od otáčejícího se permanentního magnetu.

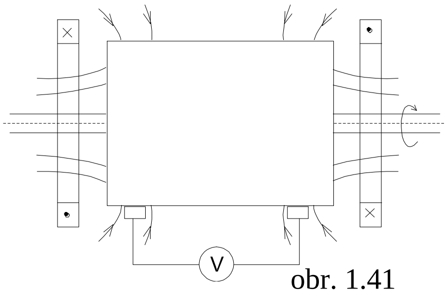
e) Smyčka s kluznými kontakty

Jak již bylo řečeno indukuje se napětí změnou indukce nebo plochy. Jestliže se v obr.1.40 posune v magnetickém poli B příčný trámec, který se pohybuje po kluzných kontaktech na kolejničkách, o délku dx, změní se plocha o $l \cdot dx$, změna toku je $d\Phi = B \cdot l \cdot dx$ a indukované napětí bude

$$u = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

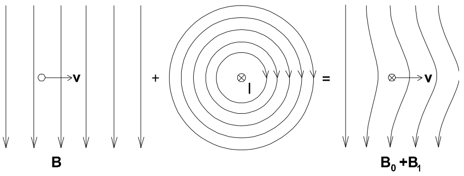


obr. 1.40



obr. 1.41

Skalární součin jsme mohli použít proto, že vektory B, l, v jsou na sebe kolmé. Navineme-li toto uspořádání na válec, dostáváme homopolární (unipolární) stroj obr.1.41. Masivní železný rotor se otáčí v magnetickém poli, protínajícím axiálně celý jeho obvod. Dosáhneme tím na sběracích kartáčích sice nízká ss napětí (několik voltů), ale velké proudy (až desetitisíce ampérů).



obr. 1.42

Jestliže chceme pohybovat vodičem v magnetickém poli rychlostí v - obr.1.42, indukuje se ve vodiči proud ve směru $E = v \times B$, který rovněž vytváří své magnetické pole. Superpozicí se ve směru pohybu obě pole sčítají, na druhé straně vodiče odčítají. Jak bylo řečeno, výsledné pole má takový tvar, jakoby vodič "hrnul" siločáry před sebou a musel překonávat jejich příčný tlak. Indukovaný proud má tedy opět takový smysl, aby bránil změně, která jej vyvolala. Obecně lze říci, že při jakémkoliv pohybu vodivého tělesa v magnetickém poli při němž vlákna vodiče protínají linie pole, se v tělese indukují proudy, které se snaží pohyb zabrzdit.

CD-ROM

animace
A3

Animaci přehrávejte programem Windows Media Player. Nejprve „krokujte“ posouváním „vozíčku“ pod zobrazovací plochou. Potom zapněte jedno přehrání a konečně náhodné přehrávání a opakování (v pravém rohu dole).
Animace je převzata z http://www.igte.tugraz.at/index_en.html, doporučuji spuštění dalších animací z této stránky

V této animaci je nakreslen stator buzený buď stejnosměrným proudem nebo permanentním magnetem. V 18 zubech otáčejícího se rotoru se mění velikost magnetického pole, a pokud bychom do drážek těchto zubů navinuli cívky, indukovalo by se v nich napětí. Toto napětí může být vyvedeno přes komutátor nebo kroužky k napájení dalších elektrických zařízení.

V obrázku si všimněte v prvé řadě rozložení siločar pole buzeného statorem. Při animaci pozorujte nejprve jeden vybraný zub a měnící se pole v něm, potom celý stroj komplexně.

CD-ROM

animace A4

Animaci přehrávejte programem Windows Media Player. Nejprve „krokujte“ posouváním „vozíčku“ pod zobrazovací plochou. Potom zapněte jedno přehrání a konečně náhodné přehrávání a opakování (v pravém rohu dole).
Animace je převzata z http://www.igte.tugraz.at/index_en.html, doporučuji spuštění dalších animací z této stránky

Animace znázorňuje stejný stroj z A3 v 3D zobrazení.

❑ Lorentzova síla

Síla působící na náboj v elektrostatickém poli je popsána, jak již bylo řečeno vztahem $Fe = Q{\cdot}E$, síla na náboj pohybující se v magnetickém poli rychlosti v je $F_m = Q{\cdot}(v \; x \; B)$. Celkovou elektromagnetickou sílu působící na náboj ve zvolené pozorovací soustavě nazýváme *Lorentzova síla*:

$$F = F_e + F_m = Q(E + v \, x \, B) \qquad (1.131)$$

Práce vykonaná Lorentzovou silou F při přemístění částice s nábojem Q rychlostí v po orientované dráze l mezi body 1 a 2 je

$$A = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = Q \cdot \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + Q \cdot \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l} = Q \cdot \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (1.132)$$

Magnetická složka síly F_m je kolmá na v a B (vektorový součin $v \; x \; B$ nemá směr shodný s dl) a mění (zakřivuje) směr pohybu částice, kdežto práci koná pouze elektrická složka F_e, která má směr elementu dl.

Integrál $\int E \; dl = U$ je roven elektrickému napětí podél orientované dráhy l. Lze tedy podle (1.124) rozšířit fyzikální interpretaci definice napětí mezi body 1 - 2 jako práci, kterou vykoná elektrická složka Lorentzovy síly při přemístění bodového kladného jednotkového náboje z bodu 2 do bodu 1 po orientované dráze l. Provedeme-li integraci po uzavřené křivce, nazýváme $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ *oběhové elektrické napětí.*

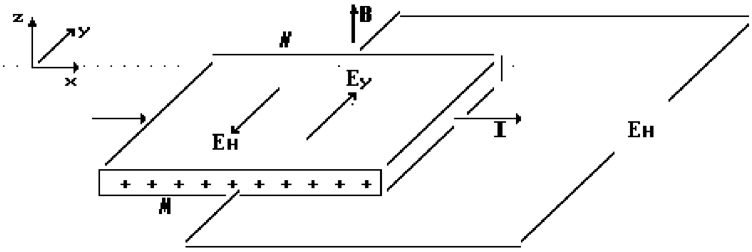
Lorentzovými silami je vysvětlena řada jevů, jako např. Hallův jev, magnetorezistence, magnetostrikce (změna objemu tělesa silami pole) apod. Dále se budeme zabývat dvěmi z nich.

❑ Hallův jev

Umístíme-li do magnetického pole B vodivou nebo polovodivou destičku protékanou podélně proudem s hustotou J, bude na pohybující se volné náboje působit Lorentzova síla a její magnetická složka bude zakřivovat tvar dráhy nábojů. Na bocích destičky obr. 1.43 se objeví elektrické (tzv. Hallovo) pole s intenzitou

$$\mathbf{E}_H = R_0 \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} \qquad (1.125)$$

kde R_0 je Hallova konstanta. Předpokládáme-li, že transport náboje v destičce zabezpečují pouze elektrony s určitou rychlostí v_x, bude se jejich dráha silou $F = - e{\cdot}E_H = - e{\cdot}[v \; x \; B]$ zakřivovat, čímž se strana M začne nabíjet kladně, strana N je nabita záporně. Tím, že se přesunují



kladné náboje na stranu *M* a záporné na stranu *N*, vytváří se automaticky Coulombovské pole E_y, jehož účinek působí proti přesunování nábojů mag. polem.

V ustáleném stavu platí:

$$F_y = e(- E_y + | v \times B |) = 0 \qquad (1.133)$$

$$E_H = E_y = | v \times B | = v_x \,.\, B_x \qquad (1.134)$$

a výsledná složka síly v příčném směru (*y*) bude nulová. Elektrony se pohybují tedy jen ve směru *x*, jako by tomu bylo bez vlivu magnetického pole. Je tedy $v_y = v_z = 0$ a vektorový součin v (1.126) se bude rovnat $| v \times B | = v_x B_z$. Z rovnice (1.126) potom pro intenzitu Hallova pole dostáváme vztah

$$E_H = E_y = v_x \,.\, B_z \qquad (1.135)$$

Uvážíme-li, že je v destičce hustota proudu $J_x = -n{\cdot}e{\cdot}v_x$ a tedy $v_x = - J_x / n{\cdot}e$ můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{E}_H = -\frac{\boldsymbol{J}_X \cdot \boldsymbol{B}_Z}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}} = \boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{J}_x \cdot \boldsymbol{B}_z \qquad (1.136)$$

kde n je hustota nosičů náboje (v jednotkovém objemu) *e* náboj elektronu. Porovnáním s rovnicí (1.125) dostáváme vztah pro Hallovu konstantu

$$R_0 = -\frac{1}{n \cdot e} \qquad (1.137)$$

Analogický vztah (s opačným znaménkem) je možno odvodit i pro případ vodičů s kladnými nosiči náboje (děrová vodivost). V případě magneticky uspořádaných látek je vztah pro intenzitu Hallova pole složitější:

$$E_H = J\,(R_o B \;+\; R_1 M\,) \qquad (1.138)$$

kde R_1 je anomální Hallova konstanta a *M* je magnetická polarizace. Z této rovnice je vidět, že anomální příspěvek k Hallovu napětí je úměrný magnetické polarizaci a vnější pole s indukcí *B* má pouze za úkol zmagnetizovat danou látku.Příklad konstant pro feromagnetické kovy:

Kov	n / atom	R_o	R_1 (295 K)
Fe	3,0	2,45	+ 790
Co	-0,5	-13,3	+ 250
Ni	-1,2	-5,6	- 750
Gd	-2,1	-9,5	- 1,1 . 10^5

Záporné hodnoty n/atom souvisí s děrovou vodivostí. Pokud se týče závislostí na teplotě, je R_o téměř nezávislé, naproti tomu R_1 vykazuje značnou teplotní závislost. Hallův jev se využívá v Hallových sondách pro měření intenzity resp. indukce magnetického pole. V laboratorních cvičeních se můžete s těmito sondami setkat v měřicích přístrojích IMAGMETR.

❑ Magnetorezistence

Z působení Lorentzovy síly vychází také jev magnetorezistence, tj. změny elektrického odporu vodiče vlivem magnetického pole. Jev byl objeven v r.1883 Tomlinsonem a kvantitativně lze popsat vztahem:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho(0)} = \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)} \qquad (1.139)$$

kde $\rho(B)$ je měrný odpor v magnetickém poli, $\rho(0)$ bez pole.

Zakřivováním dráhy pohybujících se nábojů vzniká opět v ustáleném stavu rovnováha vlivu pohybové složky intenzity pole od vnějšího magnetického pole a intenzity coulombovského pole od rozdělených nábojů. Zdálo by se tedy, že coulombovské pole zcela kompenzuje účinek magnetického pole B a proces transportu náboje a tedy ani elektrický odpor vodiče by v ustáleném stavu neměl být vnějším mag. polem ovlivněn. Ve skutečnosti ale rovnováha opačných vlivů platí pouze pro vodiče, které se pohybují určitou "střední" rychlostí. Všechny ostatní nosiče s rychlostí odlišnou od střední budou vnějším polem ovlivněny. Ovlivněn bude transport nábojů, tedy proud, což se projeví jako změna elektrického odporu vodiče.

Velikost magnetorezistence tedy závisí na typu rozdělení rychlosti nosičů náboje. To je důležité hlavně u polovodičů, u nichž platí Maxwellovo rozdělení rychlosti nosičů, zmíněné v úvodu kapitoly 1.2.5 a vyjádřené funkcí

$$f_0 = C \cdot e^{-(mv^2/2kT)} \tag{1.140}$$

kde $C = n \cdot (m/2\pi kT)^{3/2}$, m je hmotnost částice, v rychlost a k Boltzm. konst.

S rostoucí intenzitou magnetického pole většinou magnetorezistence roste. Příčná magnetorezistence (kdy B je kolmé na J) je ve slabých polích úměrná B^2.

Magnetorezistenci feromagnetických látek zkoumal poprvé Kelvin v r. 1884, později další fyzikové. Zjistili, že mezi magnetorezistivitou a magnetickou polarizaci nasycení dané látky platí vztah

$$\frac{\Delta\rho}{\rho(0)} = aM_S^2 \tag{1.141}$$

kde a je konstanta, $\Delta\rho$ je změna měrného odporu v poli B, které vyvolalo ve vzorku magnetickou polarizaci M_s.

Shrnutí pojmů 1.3.

Zakázaná plocha je myšlená přehrada, která

a) nedovoluje použití skalárního magnetického potenciálu ve vodiči;

b) brání integrační dráze v několikanásobném oběhu proudovodiče a protnutí proudovodné smyčky.

Skalární magnetický potenciál je definován vztahem $\varphi_{\mathrm{mA}} = \int_{12} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$

Skalární elektrický potenciál v daném místě (zde např. B) se rovná práci:

a) kterou vykonají síly pole při přemístění jednotkového kladného zkušebního náboje z daného místa do místa nulového potenciálu (do nekonečna) nebo

b) kterou vykonají vnější síly při přemísťování jednotkového kladného zkušebního bodového náboje z místa nulového potenciálu (z nekonečna) do daného místa.

Vektorový magnetický potenciál pro objemový proud je $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}}{R} \cdot dV$, pro osamělý pohybující se náboj $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \mathbf{v}}{R}$, pro liniový proud $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_l \frac{d\mathbf{l}}{R}$, pro plošný proud $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{K}}{R} \cdot dS$.

Otázky 1.3.

1. Proč volíme zakázanou plochu na povrchu vodiče?
2. Kde nachází praktického využití magnetický skalární potenciál?
3. Proč je zvykem značit elektrické napětí šipkou, když se jedná o veličinu skalární?
4. Má aplikace vektorového magnetického potenciálu podobná omezení jako je tomu u skalárního magnetického potenciálu?

Klíč k řešení

O 1. Uvnitř vodiče teče, nebo se může indukovat, proud a v první Maxwellové rovnici není na pravé straně nula.

O2. Například ve vzduchové mezeře elektrických strojů, v mezeře obvodu elektromagnetu . Počítáme s ním i při řešení magnetických obvodů s permanentními magnety, u magnetických obvodů pro buzených stejnosměrným proudem nebo střídavým proude, pokud jsou konstruovány z tenkých plechů a můžeme v tedy zanedbat indukovaný proud v magnetiku.

O3. Elektrické napětí je tzv. orientovaná veličina. Šípka směřuje od vyššího (kladnějšího) potenciálu k nižšímu.

O4. Na pravé straně rovnice rot **B** = 0 není žádná veličina, kterou bychom museli při definování vektorového magnetického potenciálu vyloučit. Tento potenciál je tedy definován bez omezení platnosti.

1.4. Jednota elektromagnetického pole

Čas ke studiu: 1 hodina

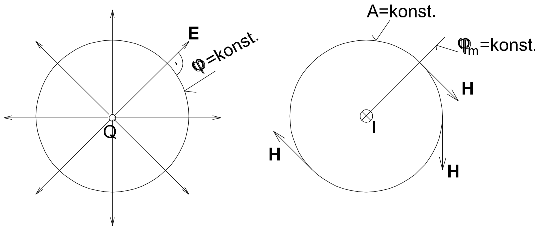
Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- využít formální podobností rovnic k určování průběhů siločar a ekvipotenciál
- argumentovat problém jednoty elektrických a magnetických jevů
- definovat pole statické, stacionární, kvazistacionární, nestacionární

❑ Závěry vyplývající z formální podobnosti rovnic

Ekvipotenciální plochy jsou geometrická místa konstantního potenciálu. Při pohybu náboje po hladině ekvipotenciály elektrostatické pole nekoná žádnou práci. Průsečnice nákresny s ekvipotenciálními hladinami jsou ekvipotenciální čáry. Doplněním o soustavu jednotkových siločar dostáváme grafický obraz - mapu - pole. Ekvipotenciály a siločáry tvoří pravoúhlou soustavu. Všimněme si podobnosti tvaru ekvipotenciál a siločar u různých typů polí v souvislosti s formálními podobnostmi vztahů, popisujícími tato pole.

Jak bylo řečeno jsou u elektrostatického pole, v němž platí $E = -\,grad\ \varphi$, siločáry kolmé na ekvipotenciály. Např. u bodového náboje mají siločáry tvar paprsků, vycházejících z náboje a ekvipotenciály tvar kružnic kolem tohoto náboje. Na základě formální podobnosti rovnice pro E a rovnice $H = grad\ \varphi_m$ lze usuzovat, že např. u proudovodiče obr.1.44 mají ekvipotenciály tvar paprsků (ekvipotenciální plochy tvar rovin) vycházejících z vodičů. Jsou tedy opět kolmé na siločáry, které, jak již bylo uvedeno, mají tvar kružnic kolem vodiče.



obr. 1.44

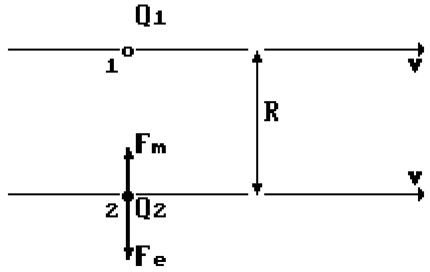
Vyjdeme-li z poznatků, že tvar ekvipotenciál vektorového magnetického potenciálu je totožný s tvarem magnetických indukčních čar, přičemž A má stejný směr jako proudová hustota J, můžeme z formální podobnosti rovnic

$$B = rot\ A \qquad\qquad D = rot\ C \qquad\qquad J = rot\ T$$

vyvodit závěr, že tvar ekvipotenciál $C = konst.$ je totožný s tvarem indukčních čar D a tvar ekvipotenciál $T = konst.$ s tvarem proudových trubic J. V izotropním prostředí je tvar siločar totožný s tvarem indukčních čar. Protože jsou v tomto prostředí magnetické i elektrické siločáry kolmé na ekvipotenciály patřičného skalárního potenciálu, budou také indukční čáry B a siločáry kolmé na ekvipotenciály φ_m, indukční čáry D kolmé na ekvipotenciály φ a konečně J kolmé na ekvipotenciály φ. Podobně budou vzájemně kolmé i ekvipotenciály dvojic A - φ_m, C - φ, T - φ.

❑ Jednota elektrických a magnetických jevů

Všimněme si prostého jevu. Nachází-li se v bodě 1 obr.1.45 bodový náboj Q_1, je v bodě 2 ve vzdálenosti R elektrické pole o intenzitě $E = Q_1 / kR^2$, kde v soustavě SI je $k = 4\ \pi\,\varepsilon$. Jestliže se v bodě 2 nachází náboj Q_2, vznikne mezi oběma náboji mechanická síla elektrostatického původu.



Obr.1.45

$$F_e = Q_2 \cdot E = \frac{Q_1.Q_2}{k.R^2} \qquad (1.142)$$

kde k = 4 π ε

Pohybuje-li se náboj Q_1 rychlostí $v \ll c$, a náboj Q_2 je fixován na jednom místě, vznikne v bodě 2 (podle BS zákona, kde proudový element je v.Q_1), ve vzdálenosti R ještě magnetické pole $B_1 = (\mu/4\pi).(vQ_1/R^2)$. Jeho směr a smysl se řídí pravidlem pravé ruky. Dosadíme za $\mu = 1/c^2.\varepsilon$ bude

$$B_1 = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{Q_1}{k.R^2} \qquad (1.143)$$

kde c je rychlost světla. Pohybuje-li se náboj Q_2 v bodě 2 rovnoběžně s nábojem Q_1 stejnou rychlostí v, působí na něj síla elektromagnetického původu. Jak je dobře známo, bude se rovnat

$$F_m = Q_2 . v \, x \, B_1 \tag{1.144}$$

s modulem

$$F_m = \frac{v^2}{c^2} . \frac{Q_1.Q_2}{k.R^2} \tag{1.145}$$

Celková síla mezi náboji pohybujícími se rovnoběžně se tedy bude rovnat

$$F = F_e + F_m \tag{1.146}$$

$$F = F_e - F_m = \frac{Q_1.Q_2}{k.R^2}(1 - \frac{v^2}{c^2}) \tag{1.147}$$

Je vidět, že základní sílu vytváří elektrostatická interakce a že od ní se odčítá síla magnetické interakce (člen s koeficientem v^2 / c^2), která vzniká při pohybu nábojů Q_1 a Q_2 v magnetickém poli. Předpokládejme nyní, že se pozorovatel také pohybuje, a to stejnou rychlostí a rovnoběžně s náboji a rozdílová rychlost ve vztahu (1.147) $v = 0$. Tady narážíme na paradox, neboť tento pozorovatel bude na rozdíl od nepohybujícího se pozorovatele ($v \neq 0$) popisovat sílu vzájemného působení částic jako elektrostatickou. Vztah (1.142) přejde při $v = 0$ na Coulombův výraz pro síly v elektrostatickém poli. Pro něj, jako by magnetické pole neexistovalo. Dnes se tento paradox jednoduše vysvětluje teorii relativity. Přesto, že se formálně sice účinky elektrické a magnetické často dají separovat, v podstatě existuji v neoddělitelné jednotě.

Pokud bychom si přece jen formálně rozdělili elektromagnetické pole na elektrické a magnetické, lze mezi jejich silovými účinky (a podobně i účinky gravitačního pole) vysledovat jisté podobnosti. Tak především je to u všech tří polí princip ubývání síly se vzdáleností. U gravitačního a elektrického pole i podobný průběh vektorů jimi působených sil. U el. a mag. pole je podobné i přitažlivé a odpudivé působení sil v klidu. Je zde však jeden zásadní rozdíl. Nikomu se v podmínkách makroskopických nepodařilo nalézt ani připravit magnetický náboj ani kladný, ani záporný. Existují vždy ve dvojici. Nejjednodušší konfigurace magnetického náboje je tedy těsná dvojice (dipól) dvou nábojů stejné velikosti a opačných znamének. Zatímco jsou tedy el. i mag. jevy jinak symetrické, v tomto vykazují nesymetrii.

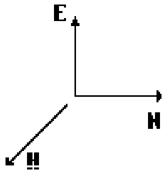
Pokud se dostanou do pohybu náboje elektrické, začnou budit kromě pole elektrického i pole magnetické, které je tím větší, čím rychleji se náboje pohybují, tzn. je větší $I = dQ/dt$ a tedy je větší i J a následně $rot\, H = J$. Pokud se dostane do pohybu magnet nebo pohybuje-li se vodič v tomto poli, působí kromě magnetického pole i časovou změnu tohoto magnetického pole a tedy i pole elektrické $rot\, E = - \partial B/\partial t$. Obě pole jsou tedy vzájemně provázána.

V představách fyziků zhruba v první polovině 19.stol. (Volt, Ohm, Ampér, Oersted, Faraday) vládlo přesvědčení, že působení elmag pole nastává *okamžitě v celém prostoru* současně. Podle toho by silové působení letící el. nabité kuličky v daném místě a čase bylo dáno polohou kuličky v témže okamžiku. Ve skutečnosti bylo ale prokázáno, že silové pole je zpožděno za letícími náboji (podobně jako zvuk za nadzvukovým letadlem) a šíření elektromag. vzruchů je postupné. V matematických zápisech jsou veličiny svázány časovými derivacemi a podobně jako např. u proudu a napětí u cívky se zde projevuje setrvačnost. Přemístíme-li rychle nabitou částici v prostoru, pole se kolem něj vytváří postupně a zpráva o tom, že náboj "dorazil" se bude šířit konečnou rychlostí. Daného bodu dosahuje tím později, čím je bod vzdálenější. Odstraníme-li znovu náboj, silové pole ještě existuje, dokud do jeho okolí "nedorazí zpráva", o zmizení náboje.

Na základě těchto úvah nás může napadnout otázka: Pokud mohou pole jistou dobu existovat v jistém místě i po oddálení náboje, nemohou existovat i bez něho, tedy v prostoru, kde náboj není? Toto ale již odvodil Maxwell. Ve svých rovnicích přece říká, že teče-li např. anténou vnucený proud časově proměnné frekvence, budí tento proud v okolí antény magnetické pole H, rovněž časově proměnné. Toto pole je již v prostoru mimo anténu, tedy mimo budicí proud. Změnou takto vybuzeného pole vzniká podle rov.(1.49) časově proměnné pole elektrické E, tedy i posuvný proud $\varepsilon . \partial E/\partial t$, který je zdrojem pro časově proměnné pole magnetické atd. Prostorem se tedy šíří elektromagnetické pole ve formě rádiových vln, v nichž jsou v jednotě spojeny jak složka elektrická, tak složka magnetická. Elektromagnetické vlny ovšem jsou i "sídlem" energie a jsou schopny ji přenášet. Tok zářivé energie jednotkou plochy za jednotku času kvantifikujeme vektorem *N*, který nazýváme Poyntingův (též zářivý) vektor.

$$N = E \times H \qquad (1.148)$$

Poyntingův vektor vyjadřuje jak velká energie prochází plochou k níž je vztažen a jeho směr je tedy totožný se směrem přenosu energie. V rovinné elektromagnetické vlně jsou spolu vektory N,E,H svázány prostorově ortogonálně podle obr.1.46.



Obr.1.46

Elektromagnetické vlny jsou i nositeli dalších vlastností typických pro látku (hmotu): hybnosti, setrvačnosti, momentu hybnosti. Jsou tedy vlny hmotné povahy, což dokázal P.N.Lebeděv změřením tlaku světla. Sjednocení nauky elmag pole s optikou dalo vůbec možnost vysvětlení řady záhad, jako je odraz světla, lom hranolem, průchodnost sklem a neprůchodnost kovy, svícení zahřátých těles, barvy předmětů apod.

❑ Rozdělení klasické elektrodynamiky

Přestože jsou veškeré elektromagnetické jevy resp. způsoby silového působení v nerozborné jednotě, kategorizujeme klasickou elektrodynamiku z praktických hledisek pomocí určitých kritérií do několika skupin s velmi blízkými vlastnostmi. Nejpodstatnějším kritériem je časová změna polních veličin, popř. možnost zanedbání jistých časových změn nebo přítomnost proudu v řešené oblasti. Tato kapitola je zpravidla zařazována v učebnicích hned na jejich začátcích. Zde ji úmyslně zařazuji až za kapitolu o jednotě elektromagnetických jevů, aby bylo následující dělení chápáno pouze jako formální, tedy jako pomocné kritérium. Dělení klasické elektrodynamiky tedy bude vypadat takto:

1. Pole *statické* je takové, u něhož zanedbáme všechny časové změny polních veličin (jsou konstantní v čase) a předpokládáme, že v oblasti neteče proud. Základní vztahy:

pole elektrostatické	*pole magnetostatické*
rot E = 0	rot H = 0
div D = ρ	div B = 0
D = ε.E	H = B / μ

Objektivně existující elektromagnetické pole se jeví pozorovateli jako elektrostatické tehdy, je-li těleso s elektrickým nábojem, jehož pole vyšetřujeme vůči němu nehybné. Pozorovateli pohybujícímu se spolu se soustavou nabitého tělesa se pole tohoto náboje jeví jako elektrostatické, ale pozorovateli, spojenému se soustavou, vůči níž se těleso pohybuje se jako elektrostatické nejeví. Pokud by se vůči němu nabité těleso pohybovalo např. po kruhové dráze ustálenou rychlostí, jevilo by se mu jako pole stacionární.

2. Pole *stacionární* (ustálené nebo stacionární proudové pole) je takové, u něhož zanedbáváme všechny časové změny polních veličin (jsou konstantní v čase) a předpokládáme, že v oblasti teče proud v čase konstantní. Základní vztahy:

v dielektriku	*ve vodiči*	*stacionární pole magnetické*
$rot\,E = 0$	$rot\,E = 0$	$rot\,H = J$
$div\,D = \rho$	$div\,J = 0$	$div\,B = 0$
$D = \varepsilon.E$	$J = \gamma.E$	$H = B / \mu$

Základní rozdíl z hlediska energií:

- statické pole je pole bez přeměny energií

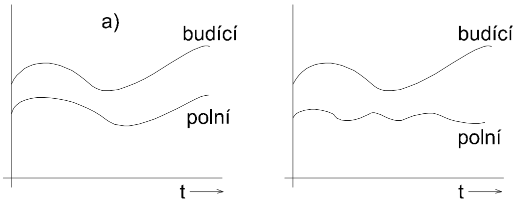
- u stacionárního pole dochází k přeměně el. energie, např. v teplo

V některých literaturách se pod pojem stacionární pole zahrnuje i pole statické.

3. Pole *kvazistacionární* je takové, u něhož lze zanedbat všechny časové změny polních veličin kromě $\partial B/\partial t$ a lze předpokládat, že v oblasti může téct pouze proud vedený (je-li mnohem větší než proud posuvný). Základní vztahy jsou tedy stejné jako u pole stacionárního, kromě rovnice

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

4. Pole *nestacionární* (časově proměnné) je takové pole, u něhož v obecném případě nezanedbáváme ani časové změny, ani proud a Maxwellovy rovnice zde platí v plném tvaru. Ve zvláštních případech však můžeme v dílčích podoblastech řešené oblasti zanedbat proud vedený proti posuvnému - v dielektriku. Obecně lze předpokládat, že v případech 1,2,3 se při malých časových změnách průběhy budicí veličiny zdrojů a polní veličiny téměř sledují (obr.1.47a) V nestacionárním poli se většinou nesledují (obr.1.47b).



obr. 1.47

Shrnutí pojmů 1.4.

Jednota elektromagnetických jevů – nelze od sebe oddělit tato pole, např. účinky bodového náboje umístěného na stole před námi (samozřejme na hmotném tělese) mohu chápat z mého hlediska jako účinky pole elektrostatického. Pro oběkt, pohybující se kolem stolu se jeví tento náboj jako pohyblivý a tedy vykazující i účinky magnetické.

Pole statické – neuvažujeme průchod proudu ani časové změny zkoumaných veličin-

Pole stacionární – uvažujeme průtok vedeného proudu, zanedbáme časové změny veličin – použití u proudových polí.

Pole kvazistacionární – jako předchozí, ale uvažujeme časovou změnu veličin magnetického pole – použití u indukčních strojů, výpočtů indukčností apod.

Pole nestacionární – neklademe žádná omezení. Ve velmi vodivém prostředí zanedbáváme posuvný proud, v dielektriku proud vedený.

2. VLIV PROSTŘEDÍ NA ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

2.1. Elektrostaticky nabitý ideální vodič ve vakuu

Čas ke studiu: 3 hodiny

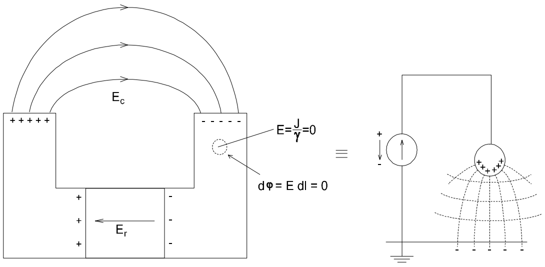
Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete

- umět zdůvodnit, proč je intenzita a indukce elektrického pole ve vodiči nulová
- vědět proč je potenciál na celém vodivém předmětu konstantní
- umět vysvětlit princip elektrického stínění

Výklad

Ve vakuu, tedy v prostředí s ε_o a μ_o se elmag pole šíří rychlostí světla. Pole může být buzeno bodovými náboji, diskrétně rozloženými náboji (které ovšem vystřeďujeme a jsou reprezentovány svými hustotami), nebo nabitými vodivými tělesy. V praxi je pole nejčastěji buzeno plošnými volnými náboji na povrchu elektrod. Jako volné označujeme náboje částic (elektronů nebo iontů), které se mohou odpoutat od atomů nebo molekul, přemísťovat se mezi nimi a propůjčovat tělesům kladný nebo záporný náboj. Pole je při takovémto buzení určeno tvarem elektrod a prostředím mezi nimi. Podle toho, jak se vytvoří ustálené plošné náboje na povrchu vodičů, můžeme rozlišit dva typické příklady:

do vodiče je vložen zdroj napětí



obr. 2.1

Vložíme-li do rozpojeného vodiče zdroj obr.2.1, na jehož svorkách jsou vlivem vnuceného (přídavného) pole rozdělující intenzity E_r udržovány kladné a záporné náboje, vzniká ve zdroji automaticky i pole coulombovské E_c, jehož zdrojem jsou volné náboje, a které je orientováno od + k - nábojům, tedy proti poli vnucenému, tj. poli rozdělujících sil. Vodiče připojené na svorky jsou rozpojeny, tedy přerušeny vakuem, a neprotéká jimi proud $J = \gamma.E = 0,\ \ \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow$ uvnitř vodiče je $E = 0$, na vodiče nepůsobí žádná vnější síla a nejsou v pohybu. Protože uvnitř vodiče platí

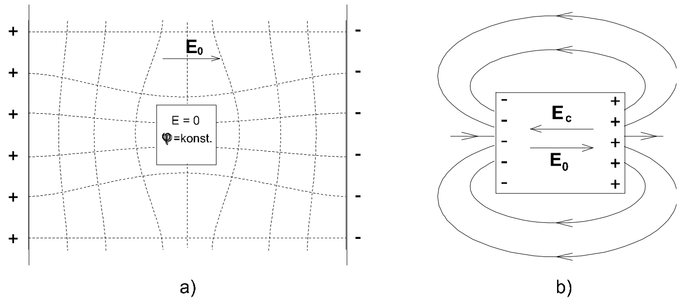
$$div\,E = div\,0 = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \tag{2.1}$$

nemůže se uvnitř vodiče ani nacházet volný náboj, ale veškerý volný náboj je soustředěn na povrchu vodiče s plošnou hustotou $\sigma = D$. Dále je ze vztahu

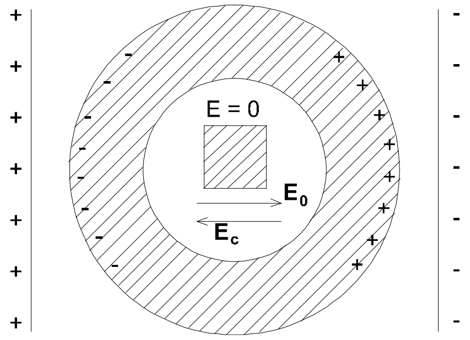
$$d\varphi = -\,E{\cdot}dl = -\,0{\cdot}dl = 0 \tag{2.2}$$

zřejmé, že uvnitř vodiče se potenciál nemění a celý vodič je na stejném potenciálu. Kolem vodiče se ve vakuu vytvoří elektrické pole se siločárami vycházejícími kolmo z elektrod, které si můžeme představit jako výslednou superpozici siločar od jednotlivých elementárních bodových nábojů na povrchu elektrod. Hustota siločar a tedy i velikost intenzity pole v blízkosti elektrody bude tím větší, čím je poloměr křivosti povrchu menší. Největší bude tedy kolem hrotů a ostrých hran. Na tuto skutečnost je třeba dbát u pevnostního dimenzování při návrhu el. zařízení pro vysoká napětí.

Vodič je vložen do elektrického pole

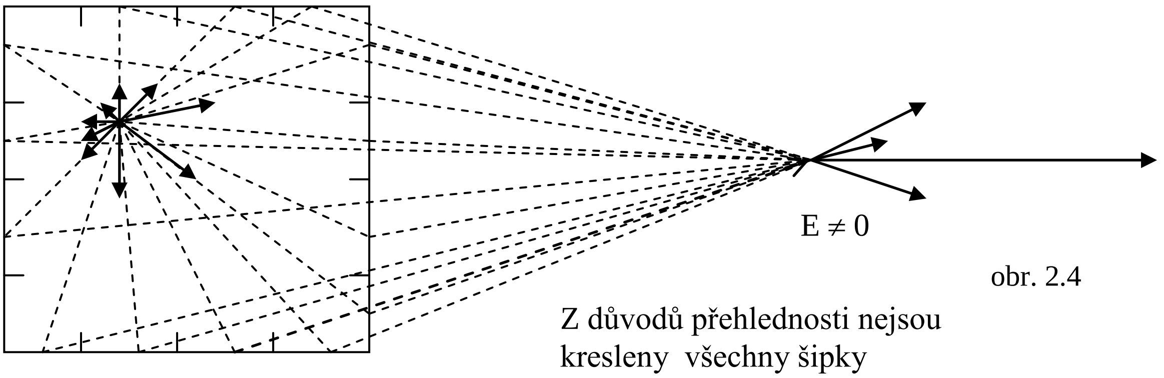


obr. 2.2



obr. 2.3

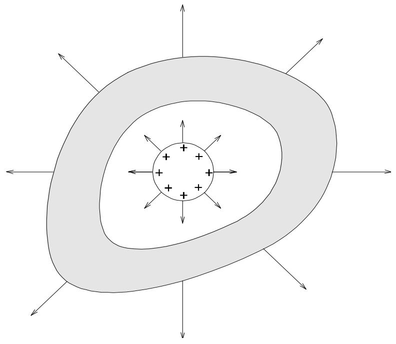
Vodič je vložen do el. pole, tj. do prostoru mezi dvě elektrody, mezi nimiž je napětí obr.2.2a. Uvnitř vloženého předmětu musí být opět výsledná intenzita pole $E = E_o + E_c$ nulová; musí se zde tedy náboje influencí pole rozdělit na povrchu vodiče tak, aby působily pole stejně velké jako je pole vnější, ale opačně orientované obr.2.2b. Vně tělesa je pole rovněž dáno superpozicí E_o a E_c. Pokud je ve vodivém tělese dutina obr.2.3, je uvnitř dutiny nulové pole, což je princip elektrostatického stínění. Pokuste se nakreslit např. kulový tvar nabité "skořepiny", rozdělit ji na několik stejně velkých úseků a s uvážením vzdálenosti úseku od sledovaného bodu provést vektorový součet intenzity v bodě uvnitř a vně "skořepiny". Pro tenkou nabitou vodivou krychli je v řezu tento pokus znázorněn na obr.2.4. Nepřesnost geometrické konstrukce vzniká jednak konečným počtem dělených úseků, ale také neznalosti přesného rozložení hustoty náboje podél jednotlivých stran krychle. obr.2.5



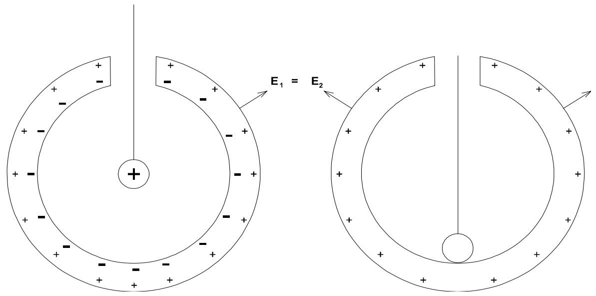
obr. 2.4

Z důvodů přehlednosti nejsou kresleny všechny šipky

Naopak náboj v dutině vodivého tělesa obr.2.5 nelze odstínit, jak vyplývá z Gaussovy věty elektrostatiky. Pokud je náboj uvnitř integrační plochy, je v prostoru vakua jedno, zda je nebo není obklopen ještě vodivým stíněním. Příkladem může být pokus ponořování malého náboje dovnitř dutého vodiče obr.2.6.



obr. 2.5



obr. 2.6

2.2. Prostředí a vedení proudu

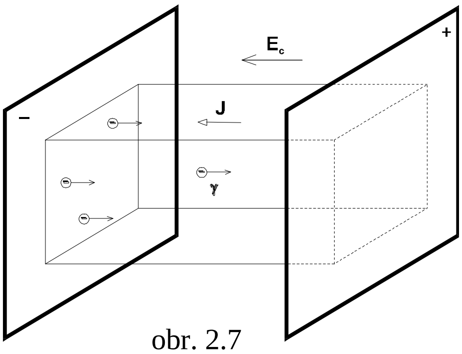
Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit vodiče, polovodiče a izolanty
- popsat na čem závisí měrná vodivot
- zdůvodnit závislost odporu na teplotě

Výklad

Předpokládejme, že na dvě rovnoběžné ideálně vodivé ploché desky (elektrody) je z vnějšího zdroje stále přiváděn náboj, podle principů předcházející kapitoly. Mezi deskami vzniká coulombovské pole E_c, které působí silově na náboje, nacházející se mezi deskami obr. 2.7. Výsledný efekt silového působení - elektrický proud závisí na řadě faktorů, např. na tom, zda jsou náboje volné a mohou se pohybovat v prostoru nebo zda jsou vázány v atomech tvořících krystalovou mřížku materiálu, dále na překážkách, které zbržďují pohyb nábojů apod. Z toho lze usoudit, že podstatný vliv na přítomnost nábojů mezi deskami a na pohyb nábojů má materiál, vyplňující prostor mezi nimi. V rozličných prostředích je elektrický proud zapříčiněn různými mechanismy.



obr. 2.7

Ve vakuu je zprostředkován pohybem volných nábojů $q-$ (resp. v některých oblastech $q+$), které se z látky (elektrody) uvolnily určitým fyzikálním procesem (termoemise, autoemise, sekundární emise atd.). Obecně je potom v jistém objemu vakua proud

$$i = \frac{dq+}{dt} + \frac{dq-}{dt} \qquad (2.3)$$

Ve většině případů se jedná o proud elektronů $i = \frac{dq-}{dt}$. Na tomto principu jsou založeny vakuové elektronky, vakuové fotočlánky, obrazovky, elektronové tavicí pece apod.

V plynném prostředí jsou volnými pohybujícími se náboji elektrony a ionizované atomy plynů. V elektrolytu probíhá současně ionizace a u jiných nábojů zase rekombinace. Ionizované plynné prostředí nazýváme plasma (v některých literaturách považované za čtvrté skupenství hmoty). V něm se mohou přenášet i atomy a molekuly, čehož se záměrně využívá v iontových implantátorech v mikroelektronice, kde se zanášejí cizí atomy do terče z polovodivého materiálu.

V elektrolytech zprostředkují vedení proudu ionty obou polarit, vzniklé disociací. Např. u kuchyňské soli jsou kladné Na i záporné Cl ionty jednomocné, takže jim chybí (Na), či přebývá (Cl) právě jeden elektron. Vedení proudu je tedy v elektrolytech zprostředkováno pohybem ionizovaných atomů a molekul (skupin atomů), které se vylučují na elektrodách. Elektrolyt se tedy postupně ochuzuje o volné náboje, které jsou k dispozici pro vedení proudu. Průchod proudu je vždy spojen s transportem látky. Čisté kapaliny jsou špatnými vodiči.

Pevné látky se z hlediska vodivosti dělí v závislosti na hodnotě jejich měrného (specifického) odporu ρ na izolanty, polovodiče, vodiče (kovy) a supravodiče, jak je zřejmé z následující tabulky:

<table>
<tr><td colspan="6">10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} ρ [Ωm]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Supravodiče</td><td rowspan="2">vodiče</td><td></td><td colspan="2">Elektrolyty</td><td rowspan="2">Izolanty</td></tr>
<tr><td colspan="2">Polovodiče</td><td></td></tr>
</table>

Pro materiály používané v elektrotechnice v elektrických a magnetických obvodech má význam jen vazba kovová. Kovová vazba je charakteristická pro látky, jejichž atomy mají malý počet valenčních elektronů vzhledem k počtu *vazebních orbitů,* jako jsou např. železo, měď, zlato, stříbro a sodík. Valenční elektrony jsou k jádru vázány slabě a při jejich vzájemnému přiblížení dojde k jejich uvolnění. Ty se potom pohybují volně, avšak chaoticky v meziatomovém prostoru mezi atomy tvořícími krystalovou mřížku. Působením vnějšího elektrického pole na látku, dojde k usměrněnému pohybu volných elektronů, jehož důsledkem je pro elektrické obvody výborná vodivost. Takovéto materiály mají i velmi dobrou tepelnou vodivost. Z mechanických vlastností jsou kovovou vazbou určovány především plasticita, tvárnost a houževnatost.

Pohyb nosičů náboje v látce je velmi složitý. K chaotickému tepelnému pohybu se v elektrickém poli superponuje postupný pohyb (drift). Natáčení elementárních dipólů v izolantech při časové změně se jeví jako posuvný proud. V časově neproměnných stavech pak hovoříme jen o proudu vedeném (jiné názvy kondukční, transportní) a zabýváme se jím u vodičů. Vzhledem k obrovskému počtu částic používáme při rozboru mikroskopických dějů metod kinematické teorie plynů. Mluvíme také např. o "elektronovém plynu", tvořeném neuspořádaně se pohybujícími vodivostními elektrony. Tyto elektrony jsou u kovů jen velmi slabě vázány ve vnější obalové sféře atomů, tvořících mřížku kovu a mohou se poměrně volně pohybovat mezi pevně zabudovanými zbytkovými ionty. Účinkem elektrického pole se superponuje na chaotický pohyb elektronů usměrněná složka rychlosti, jejíž vektor je v případě elektronů orientován proti vektoru intenzity el. pole. I u velkých proudů je tato driftová rychlost poměrně malá, což souvisí s obrovským počtem vodivostních elektronů v objemové jednotce. Např. u mědi je to $n = 8{,}5 \cdot 10^{22}$ vodivostních elektronů v 1 cm ^{3}.

Potom je proud:
$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(n \cdot V \cdot e)}{dt} = n \cdot e \cdot S \cdot \frac{dl}{dt} = n \cdot e \cdot S \cdot v \qquad (2.4)$$

$$v = \frac{i}{n \cdot e \cdot S} \quad \text{a} \quad J = \frac{i}{S} = nev \qquad (2.5)$$

kde e je náboj elektronu $e = 1{,}602.10^{-19}$ C, a $V = S \cdot dl$ je vyšetřovaný objem. Při proudu $i = 1$A přes průřez $S = 1\ \text{cm}^2$ je u mědi $v = 7{,}3.10^{-5}$ cm/s. Je třeba objasnit, proč je intenzita E uvažována proti skutečnému směru pohybu elektronů (skutečnému proudu). Elektrony se sice pohybují od záporné elektrody ke kladné, (tj.ve směru přírůstku, tedy gradientu, potenciálu), jak to ukazuje obr.2.7, ale v počátcích historie nauky o elektřině, kdy ještě nebyla známa struktura hmoty, byl za referenční bod zvolen kladný náboj a za směr elektrického proudu se považoval směr pohybu kladného náboje. Směr intenzity el. pole byl také označován od kladného náboje k zápornému. Pro tento konvenční směr el. proudu jsou formulovány všechny zákony a pravidla v celé dosavadní literatuře, takže i dnes je tento historický "omyl" respektován. Byla o tom konečně již řeč u objasnění znaménka ve vztahu $E = -\text{grad}\ \varphi$.

Tekuté kovy jsou sice kapalinami, ale z hlediska elektrotechniky se jejich chování v podstatě neliší od pevných kovů.

Elektromagnetické jevy v polovodičích jsou popsány níže a to jen v rozsahu nezbytně nutném pro pochopení základů stacionárních jevů v různých prostředích. Podrobný rozbor této problematiky není předmětem tohoto kurzu.

Na závěr této podkapitoly si objasněme termín plošný proud, který bude používán v dalších výkladech. Je to proud přepočítaný na pruh jednotkové šířky Δl, tedy proud tekoucí plochou $\Delta s = \Delta l \cdot \Delta h$, přičemž $\Delta h \to 0$. V praxi se jedná o proud tekoucí tenkou vrstvou vinutí nebo tenkou deskou. O jeho využití bude hovořeno více v souvislosti s rozborem poměrů na rozhraní dvou prostředí.

❑ Měrná elektrická vodivost

Velmi významnou veličinou proudového pole, která specifikuje použité vodivé prostředí je měrná elektrická vodivost (také nazývána konduktivita) γ. Podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru je to konstanta úměrnosti mezi proudovou hustotou a intenzitou elektrického pole. Jednotkou je:

$$[\gamma] = \frac{[J]}{[E]} = \frac{A/m^2}{V/m} = \frac{A}{V.m} = \frac{S}{m} = siemens\ na\ metr$$

Převrácená hodnota měrné vodivosti je měrný elektrický odpor (rezistivita)

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \quad \text{s jednotkou} \quad [\rho] = \frac{m}{S} = \Omega m = ohm\ metr \qquad (2.6)$$

Hodnoty konduktivity a rezistivity některých vodivých látek jsou v následující tabulce 2.1:

Materiál	ρ [Ω /m]	γ [S/m]	Tep. koef. α_{20} [K^{-1}]
stříbro	$0.0164.10^{-6}$	61.10^{6}	0.0039
měď	$0.0175.10^{-6}$	57.10^{6}	0.0038
hliník	$0.029.10^{-6}$	34.10^{6}	0.0037
mosaz	$0.07 \div 0.09.10^{-6}$	$11 \div 14.10^{6}$	0.0015
konstantan	$0.435.10^{-6}$	$2.3.10^{6}$	-0.00005
manganin	$0.435.10^{-6}$	$2.3.10^{6}$	0.0001
grafit	59.10^{-6}	$0.017.10^{6}$	-0.001
destil. voda	5.0	2.10^{-1}	
země	$10^{2} \div 10^{4}$	$10^{-4} \div 10^{-2}$	

Označme počet volných elektronů v objemové jednotce kovu (vodiče) písmenem n. Proudová hustota je podle (2.4) úměrná objemové hustotě volných elektronů *n*, velikosti náboje *e* a střední rychlosti vodivostních elektronů *v*, čili podle (2.4) bude

$$\mathbf{J} = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e} \cdot \mathbf{v} \qquad (2.7)$$

Porovnání se vztahem J = γ·E dostaneme pro měrnou elektrickou vodivost kovového vodiče

$$\gamma = \frac{n \cdot e \cdot v}{E} = n \cdot e \cdot b \qquad (2.8)$$

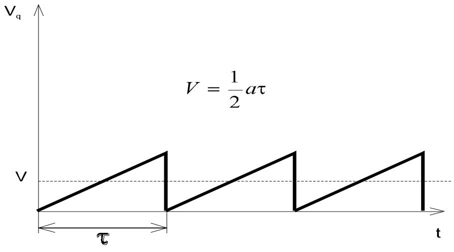
kdy jsme poměr rychlosti v a intenzity pole E označili b. Tato veličina se nazývá pohyblivost nábojů. Např. pro měď

$$b = (57 \cdot 10^{6})/(8{,}5 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}) = 4{,}19 \cdot 10^{-3}\ \frac{m/s}{V/m}$$

Volné elektrony konají v kovu pod účinkem elektrického pole pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením

$$a = \frac{F}{m_O} = \frac{e.E}{m_O} \qquad (2.9)$$

Při jejich pohybu dochází k řadě nepružných srážek s atomy mřížky, při nichž jejich rychlost klesne na nulu. Označíme- li čas mezi dvěma srážkami τ, platí pro střední hodnotu rychlosti obr.2.8



obr. 2.8

$$v = \frac{1}{2}.a.\tau = \frac{1}{2}.\frac{e \cdot E}{m_O}.\tau \qquad (2.10)$$

Po dosazení do (2.7) za v dostaneme pro proudovou hustotu Ohmův zákon v diferenciálním tvaru

$$J = \frac{1}{2}.\frac{e^2 \cdot n \cdot \tau}{m_O}.E = \gamma \cdot E \qquad (2.11)$$

Ze vztahu (2.10) např. pro měď vyplývá

$$\tau = \frac{2 \cdot m_O \cdot v}{e \cdot E} = \frac{2 \cdot m_O \cdot b}{e} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-31} \cdot 4{,}19 \cdot 10^{-3}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 4{,}71 \cdot 10^{-14} s$$

Přitom čas mezi dvěma srážkami je poměr tzv. volné dráhy elektronu ke střední hodnotě jeho skutečné rychlosti (chaotické i usměrněné) $v_{stř}$, čili $\tau = \lambda / v_{stř}$.

Při konstantní teplotě je tedy měrná elektrická vodivost kovů v širokém intervalu hodnot intenzit el. pole konstantní a nemění se až do vysokých frekvencí, kdy už je doba periody T srovnatelná s τ.

Pro měrnou vodivost (vlastní) polovodičů platí

$$\gamma = e \cdot n_n \cdot b_n + e \cdot n_p \cdot b_p \qquad (2.12)$$

přičemž n_n a n_p je koncentrace volných elektronů a děr a b_n, b_p jsou jejich odpovídající pohyblivosti. Např. pro germanium $b_n = 0{,}38\ m^2 /Vs$ a $b_p = 0{,}18\ m^2 /Vs$ a měrná vodivost při pokojové teplotě je 2,6 S/m. Jak je vidět je pohyblivost nábojů v polovodičích mnohem větší než v kovech; naproti tomu je jejich měrná vodivost nižší. Je to zapříčiněno relativně mnohem menším počtem volných elektronů a děr. Při 20 °C je

$$n_n = n_p = \frac{\gamma}{e.(b_n + b_p)} = 2{,}9.10^{19}\ m^{-3}$$

Velké pohyblivosti elektronů byly zjištěny u indium-antimonidu $b_n = 8\ m^2/Vs$, indium-arzenidu $b_n = 3{,}3\ m^2/Vs$ a u galium-arzenidu $b_n = 0{,}5\ m^2/Vs$. Největší zjištěná pohyblivost elektronu je 500 m^2/Vs pro PbTe při 4 °K.

V nedotovaných polovodičích $n_{no} = n_{po}$. Pro dotované polovodiče v důsledku statistické rovnováhy mezi vznikem volných nosičů a jejich rekombinací s nosiči opačné polarity platí:

$$n_n \cdot n_p = n_{no}^2 \qquad (2.13)$$

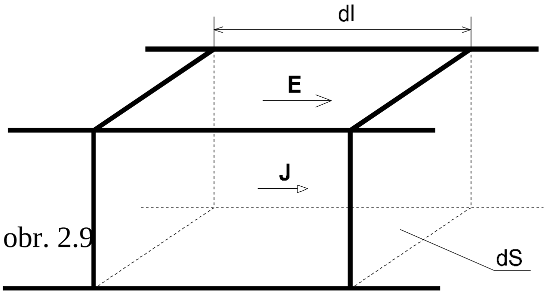
Vzroste-li např. dotováním germánia koncentrace volných elektronů na $10^{21}\ m^{-3}$, pak

$$n_p = \frac{n_{no}^2}{n_n} = \frac{(2{,}9.10^{19})^2}{10^{21}} = 8{,}41 \cdot 10^{17}\ m^{-3}$$

a měrná vodivost vzroste na $\gamma = e \cdot n_n \cdot b_n + e \cdot n_p \cdot b_p = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{21} \cdot 0{,}38 = 60{,}9$ S/m

což je přibližně 23 krát více než pro čisté germanium. Příspěvek děrové vodivosti a vlastní vodivosti elektronů je v tomto případě zanedbatelný. Zda se jedná o polovodič typu N nebo P můžeme experimentálně vyšetřit tak, že se stanoví znaménko Hallovy konstanty zkoumaného materiálu.

Pomocí měrného odporu resp. měrné vodivosti vodivého prostředí můžeme určit odpor (rezistenci) resp. vodivost (konduktanci) části vodivého úseku délky l a průřezu S. Vytkněme element vodivé trubice o velmi malé délce dl, obr.2.9, kterou teče proud dI o hustotě J a napětí mezi příčnými hraničními plochami je dU = E·dl. Podělme napětí proudem



obr. 2.9

$$\frac{dU}{dI} = \frac{E \cdot dl}{J \cdot dS} = \frac{E \cdot dl}{E \cdot \gamma \cdot dS} = \mathrm{dR} \qquad (2.14)$$

Symbolem dR jsme označili odpor elementu proudové trubice. Celkový odpor trubice dostaneme integrací

$$R = \int_0^1 \frac{dl}{\gamma \cdot S} \qquad (2.15)$$

U vodičů konstantního průřezu bude

$$R = \frac{\boldsymbol{l}}{\gamma \cdot \boldsymbol{S}} \qquad \text{a dále} \qquad G = \frac{1}{\boldsymbol{R}} = \gamma.\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{l}} \qquad (2.16)$$

Celým úsekem na obr.2.9 poteče proud I = J·S, kde J = γ·E. Napětí na malém elementu je $dU = \varphi_1 - \varphi_2 = E\cdot dl$, po dosazení:

$$dU = E\cdot dl = \frac{J}{\gamma}\cdot dl = \frac{I}{\gamma.S}\cdot dl = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dl}{S}.I = dR.I \qquad (2.17)$$

Po integraci, v níž se mění dl od 0 po l dostáváme nejčastěji používaný tvar Ohmova zákona

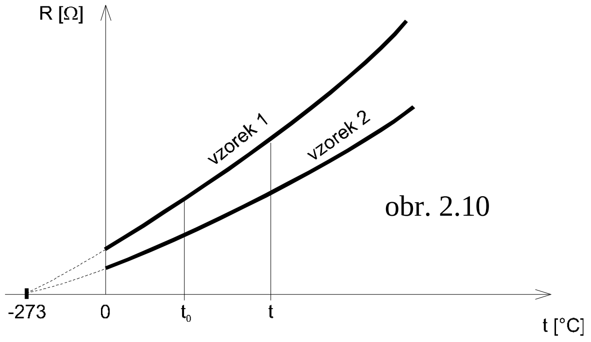
$$U = R\cdot I = I/G \qquad (2.18)$$

Tento vztah je matematickým vyjádřením experimentálních výsledků, naměřených u vodivých materiálů při konstantní teplotě, tedy skutečnosti, že proud v tomto vodiči stoupá přímo úměrně s napětím. Konstantou v této úměrnosti je elektrický odpor.

❑ Závislost odporu na teplotě

Odpor kovových vodičů se stoupající teplotou roste, přičemž u čistých kovů je závislost ρ = ρ(T) v širokém teplotním rozsahu lineární. Počet volných elektronů se zde totiž s teplotou prakticky nemění, ale se stoupající teplotou se zvětšuje brzdný účinek mřížky. Naopak odpor uhlíku, některých nekovových vodičů, polovodičů a elektrolytů s rostoucí teplotou klesá. U nich je rozhodujícím mechanismem růst počtu volných nábojů, které přispívají k vedení proudu. U polovodičů je možno změnu měrné vodivosti s teplotou v prvním přiblížení odhadnout ze vztahu

$$\gamma = \gamma_0 \cdot e^{-To/T} \qquad (2.19)$$



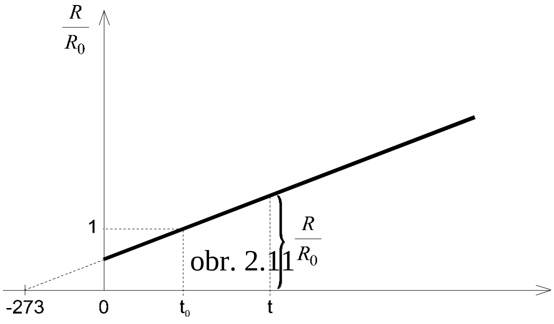
obr. 2.10

Kde γ_0 a T_o jsou materiálové konstanty, např. pro germanium $T_o = 3900°K$, $\gamma_0 = 1{,}7\cdot 10^6$ *S/m.*

Křivky závislosti odporu *R* na teplotě obr. 2.10 můžeme naměřit na vodiči konstantní délky a průřezu. Tyto křivky však zobrazují jen stav pro měřený geometrický tvar vodiče. Pro zobecnění na libovolný tvar vodiče ze stejného materiálu zobrazujeme závislost křivkou $R/R_o = f(t)$, obr.2.11, přičemž R_o je odpor vzorku při zvolené základní teplotě t_o. Použití takovéto křivky není ještě zcela pohodlné, proto se snažíme vyjádřit změnu odporu s teplotou alespoň v blízkém okolí předpokládaného pracovního bodu (pracovní teploty) analyticky. Vycházíme z teoretického vztahu, platného pro kovy a většinu jiných vodivých látek

$$R = R_o.e^{[(1/T)-(1/To)]\cdot W/k} \qquad (2.20)$$

kde *R* je odpor vodiče při pracovní teplotě *T*, R_o je odpor vodiče při vztažné teplotě T_o, *k* je Boltzmannova konstanta, *W* je koeficient, který má rozměr energie, pro kovy je záporný a má velikost několika elektronvoltů. Koeficient *W* je silně závislý na nečistotách kovu a také závisí na teplotě. Proto se vztah (2.20) nehodí pro praktickou potřebu a v praxi používáme jeho rozvoj do mocninné řady



obr. 2.11

$$R/R_o = 1+\alpha(T - T_o)+ \beta(T - T_o)^2+ \gamma(T - T_o)^3 + ... \qquad (2.21)$$

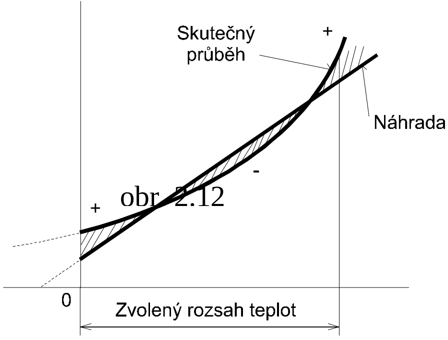
Zpravidla se omezujeme jen na první dva členy.

$$R/R_o = 1+ \alpha(t - t_o) \qquad (2.22)$$

Symboly T byly označeny absolutní teploty v °*K*, symboly *t* teploty ve ^oC, tedy $T - T_o = t - t_o = \Delta t$ a hledaný odpor se vypočte ze vztahu

$$R = R_o + \alpha R_o \cdot (t - t_o) = R_o \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \qquad (2.23)$$

Vztah (2.21) je graficky znázorněn na obr. 2.12. Proložíme ho náhradní přímkou tak, aby plochy + a - byly stejné, což odpovídá náhradě při minimálním součtu čtverců odchylek. U náhradní přímky označme písmenem τ absolutní hodnotu teploty, kterou vytíná její prodloužení na ose teploty obr.2.13. Pro měď je $\tau = 234{,}5\ ^oC$, pro hliník $\tau = 250\ ^oC$. Z podobností trojúhelníků potom plyne:



obr. 2.12

$$\frac{R/R_o}{1} = \frac{\tau + t}{\tau + t_O} = 1 + \frac{1}{\tau + t_O}.(t - t_O) \qquad (2.24)$$

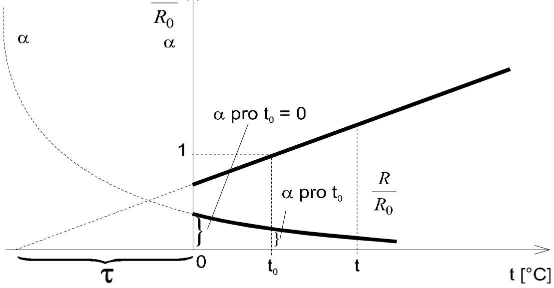
Z formální podobnosti s rovnicí (2.22) vyplývá, že

$$\alpha = \frac{1}{\tau + t_O} \qquad (2.25)$$

Konstantu nazýváme teplotní součinitel odporu s rozměrem 1/°C a jeho obecná definice je

$$\alpha|_{to} = \frac{1}{R_o}.\left[\frac{dR}{dt}\right]_{t_O} \qquad (2.26)$$

Teplotní součinitel se většinou vztahuje na $t_o = 20^oC$ a je uveden v tabulce 2.1. Klesající měrný odpor s teplotou je označen záporným α. Je-li pro některý odporový materiál a v určitém rozsahu teploty velmi malé např. u manganinu, konstantanu apod., používají se tyto materiály pro výrobu přesných tepelně nezávislých odporů a odporových normálů.

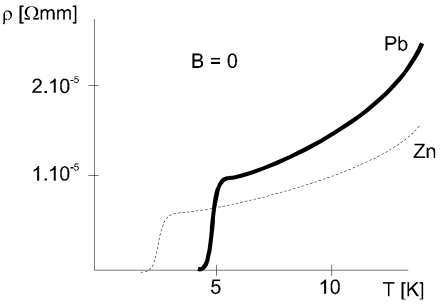


obr. 2.13

❑ Supravodivost

Postupným snižováním teploty klesá měrný odpor spojitě lineárně až do jisté hodnoty tzv. kritické teploty T_k, kdy prudce klesá asi s pátou mocninou teploty na téměř nulovou hodnotu - obr.2.14 pro rtuť.

U prvků první a osmé skupiny Mendělejevovy tabulky se blíží odpor k určité malé konečné hodnotě, která závisí na stopách nečistot v kovu a jejich mechanickém pnutí. Stav, kdy je velikost odporu při nízkých teplotách zanedbatelná, nazýváme supravodivost (suprakonduktivita). Tento jev objevil v r. 1911 Holanďan Heiko Karmerling-Onnes u rtuti, později v r. 1913 i u olova (při $T=7{,}26$ °K) a zinku (při $T=3{,}69$ °K).



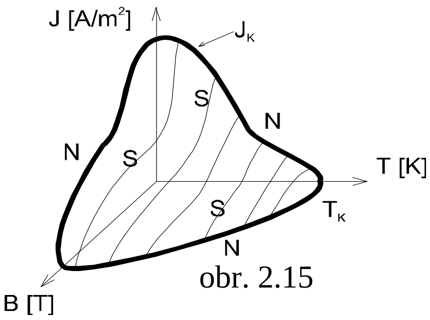
obr. 2.14

Uspokojivou teorii supravodivosti vypracovali 50 let po objevu supravodivosti J.Bardeen, L.N.Cooper a J.F.Schrieffer, kteří ji publikovali v r. 1957 a která byla pojmenována podle iniciál jejich jmen BCS - teorie.

Kritické teploty dnes známých supravodičů leží v rozmezí 0°K až 24°K, kritické hodnoty intenzity magnetického pole jsou od nízkých hodnot do 40 kA/m, přičemž materiály zajímavé pro praxi vedou proudy s hustotou řádově 10^7 A/cm^2 . V supravodivém stavu jsou supravodiče dokonale vodivé a jsou dokonalými diamagnetiky. To znamená, že v nich není ani elektrické ani magnetické pole. Podle BCS teorie vytvoří vodivostní elektrony s opačnými momenty páry, tzv. Cooperovy páry, navzájem vzdálené v průměru na tzv. koherentní délku. Tato bývá asi 50mm. Elektrony jsou v tomto kondenzovaném stavu schopné vést elektrický proud beze ztrát. Vloží-li se materiál v supravodivém stavu do magnetického pole, začne téct v povrchové vrstvě o tloušťce asi 100nm proud, který produkuje magnetické pole působící proti poli vnějšímu. Superponované výsledné pole uvnitř supravodiče je nulové. Tím se odstíní vnitřek materiálu, takže do něj magnetické pole nepronikne. Vzhledem k tomu, že materiál vypuzuje mag. pole, jeví se být dokonalým diamagnetikem.

Jak již bylo řečeno, má na jev supravodivosti vliv jak teplota, tak i magnetické pole, nacházející se přímo ve vodiči. Zde podobně jako u teploty definujeme kritickou hodnotu intenzity magnetického pole H_k (resp. B_k), při níž přestane být materiál supravodivým. U čistých kovů je menší než 0,2T, výhodnější je u slitin a kovů. Výběr je v následující tabulce 2.2:

Supravodič	Kritická teplota	Kritická indukce
	Tc[K] při B=0	Bc[T] při 4,2 K
NbZr	9 ÷ 11	6 ÷ 9
NbTiZr	8 ÷ 10	9 ÷ 12
NbTi	8 ÷ 10	9 ÷ 12
Nb_3Sn	17,3 ÷ 18,7	22 ÷ 24
Nb_3Al obr. 2.14	18,7	29,4
Nb_3Ga	20,3	34
$Nb_3Al_{0,8}$ $Ge_{0,2}$	20,7	41



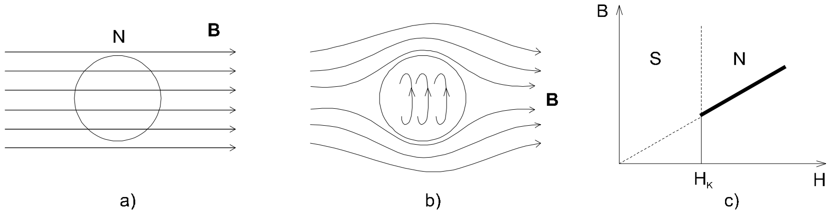
obr. 2.15

Původcem magnetického pole v supravodiči může být jak vnější zdroj (elektromagnet) tak vlastní proud supravodičem. Proudová hustota v supravodičích bývá $10^3 \div 10^4$ A/mm^2 a její magnetické účinky mohou supravodivost ohrozit. Z uvedeného vyplývá, že na existenci supravodivosti mají vliv tři z vnějšku měnitelné veličiny - proudová hustota, indukce mag. pole a teplota. Jejich vzájemná vazba může vypadat jako na obr.2.15. Existuje tedy i jistá kritická proudová hustota J_k, při jejímž dosažení přejde vodič ze stavu supravodivého S do stavu normálního N. Přechod ze stavu supravodivého do normálního neproběhne okamžitě v celém průřezu. Protože kritická hodnota B_k je jen na povrchu, přechází supravodič do normálního stavu od povrchu ke středu. Při nepravidelném tvaru tělesa se mohou udržet současně stavy S a N i po delší dobu.

Supravodiče se dělí na dvě skupiny:

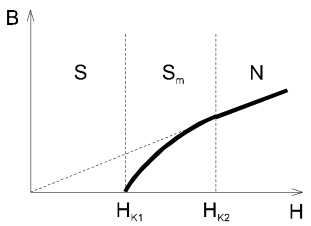
a) I. druhu (čisté kovy Pb,Hg,Sn,Al apod.). Vložíme-li je do konstantního magnetického pole B - obr. 2.16a, dochází vlivem plošných Meissnerových proudů o hustotě K k úplnému potlačení (vytlačení) magnetického pole v supravodiči - obr. 2.16b. Jeho permeabilita tedy klesne na nulu a kov se stane absolutně diamagnetickým (je v něm B= 0). Tento stav je naznačen na obr 2,16c.

b) supravodiče *II.druhu*, u nichž může *B* vniknout i do jisté hloubky pod povrch, přičemž je materiál stále supravodivý. Mezi H_{k1} a H_{k2} na obr. 2.17 je další stav, který nazýváme smíšený, kdy $B \neq 0$, ale odpor zůstává nulový. Supravodivý stav zanikne úplně až při hodnotě H_{k2}, která opět závisí na teplotě podle čárkované čáry v obr.2.18. Pro nižší B_k jsou materiály tohoto druhu (niob a jeho slitiny) v praxi významnější.



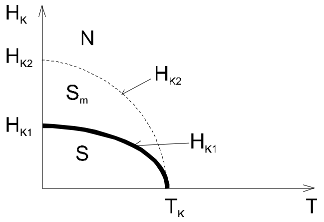
a) b) c)

obr. 2.16



obr. 2.17

Supravodiče dnes znamenají perspektivní směr vývoje jak v silnoproudé elektrotechnice (snížení ztrát), tak i v mikroelektronice (zmenšení rozměrů). Zatím nejvážnější překážkou jejich většího využití je potřeba drahého chladicího media - tekutého helia. Je proto zájem zvýšit kritickou teplotu nad 20,4°K, což je teplota tekutého vodíku, případně až nad 79°K pro chlazení poměrně levným tekutým dusíkem. Laboratorně byly vyvinuty i materiály na bázi keramiky s kritickými teplotami daleko vyššími, pro praktické použití jsou zatím drahé a nedostupné.



obr. 2.18

❑ Polovodiče

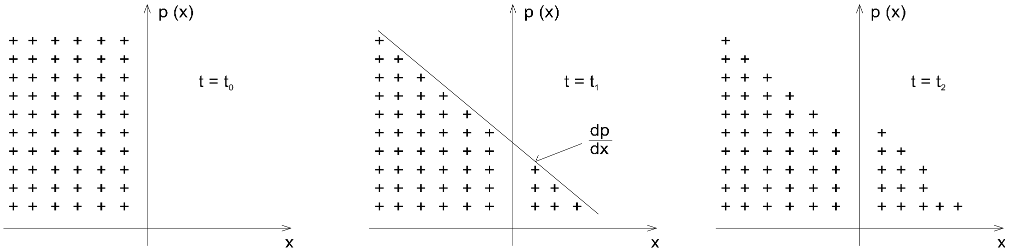
Některé polovodiče vykazují podobně jako kovy elektronovou vodivost, jiné iontovou vodivost jako elektrolyty; v elektrotechnice nás většinou zajímá první skupina. Vodivost v této skupině se vysvětluje na modelu energetických pásem a modelu krystalové mříže a je především vlastní (u extrémně čistých látek), vznikající přechodem některých elektronů z valenčního pásma do pásma vodivosti. Monokrystaly některých látek (např. ze IV. skupiny periodické soustavy - křemík, germanium, selén) vykazují pravidelné uspořádání mřížky typu diamant a s atomy propojenými dvěma elektrony, vždy jedním z každého atomu. Důsledkem poruch mřížky se může takováto vazba přerušit a elektrony se uvolní. Polovodič začne vést proud. Současně zůstaly v mřížce zbytkové kladné ionty, které se neutralizují přesunem valenčních elektronů ze sousedních atomů vlivem el. pole. Porucha se šíří proti směru pohybu elektronů a dostala pojmenování díra. U této vlastní vodivosti je hustota pohybujících se elektronů a děr stejná a je funkcí teploty.

Pro technickou praxi je však důležitější tzv. poruchová vodivost, získaná příměsí buď donoru (V. skupina - P,As,Sb) nebo akceptoru (prvky III. skupiny - Al,Ga,In) k čistému germaniu nebo křemíku ze IV. skupiny. Atom donoru zasazený do krystalové mříže Ge nebo Si má ve valenčním pásmu pět elektronů. Z toho jen čtyři jsou vázány k sousedním atomům polovodiče, pátý je bez valenční vazby, snadno (již při pokojové teplotě) přechází do pásma vodivosti a vytváří ve vodiči vodivost typu N. Opačně, je-li čisté Ge nebo Si dotováno akceptorem, vzniká defekt elektronu (díra) ve valenční vazbě přimíseného atomu, který může být nahrazen jiným elektronem. Tím se díra přemísťuje, vzniká vodivost typu P. Elektrony a díry vzniklé dotováním nazýváme majoritními náboji.

Difuzní proud může vznikat jako pohyb nabitých částic z místa jejich větší hustoty do místa s hustotou menší. V každém krystalu dochází ke kmitání jeho částic, které se zvětšuje s rostoucí teplotou. Kmitání způsobuje nejen příležitostné vytržení valenčních elektronů z jejich vazeb, ale také neuspořádaný, chaotický pohyb volných elektronů (i děr). Jestliže v krystalu nepůsobí el. pole, pohybují se částice bez cíle neuspořádaným pohybem. Podobně jako molekuly plynů, mají tyto částice tendenci rozptýlit se rovnoměrně po celém prostoru krystalu prostřednictvím difuzního proudu. Tento jev má mimořádný význam na rozhraní spojených polovodičů P a N, kde vzniká difuzní napětí.

Jak již bylo řečeno působením elektrického pole s intenzitou E protéká vodičem buzený proud. Podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru je úměrný této intenzitě a tedy gradientu potenciálu. V jednorozměrném směru proudu

$$J = \gamma \cdot E = \gamma(-\partial\varphi/\partial x) \qquad (2.27)$$



obr. 2.19

Díry jakožto kladně nabité částice se pohybují k řádově nižším potenciálům, elektrony jako záporně nabité částice směřují k potenciálům vyšším. Tento proud se také nazývá driftový proud. V polovodičích se uplatňuje i druhý mechanismus vedení: difuze nosičů náboje pod vlivem spádu jejich hustoty. Dejme tomu, že na obr.2.19 je krystal polovodiče, rozdělený v souřadnici $x = 0$ dělící stěnou na dva díly. Levý díl obsahuje kladné nosiče náboje, tedy díry, zatímco pravý díl je prázdný. V čase $t = 0$ bude náhle dělící stěna odstraněna. Nosiče začnou zcela jistě zaplňovat celý krystal, takže v čase t_1 a ještě později v čase t_2 se bude měnit koncentrace nosičů. Dochází k difuzi. Nad průřezem $x = 0$ protéká difuzní proud. Jeho hustota J_{dif} je úměrná gradientu hustoty a faktor úměrnosti nazveme konstantou difuze D.

$$J_{dif} = +e \cdot D \cdot \left(-\frac{\delta n_P}{\delta x}\right) = +e \cdot D \cdot (-grad\ n_p) \qquad (2.28)$$

Znaménko mínus říká, že kladné částice - díry měly před rozmezím větší hustotu, za rozmezím menší, tedy dochází ke spádu hustoty vlivem difuze. Chceme-li udržovat difuzní proud rozhraním, musíme vlevo dodávat nové nosiče náboje.

Difuzní konstanty jsou pro díry a elektrony různé. Např. $D_p = 12{,}5\ cm^3/s$, $D_a = 35\ cm^3/s$. Difuzní pochod je podporován vysokými teplotami a pohyblivostí nosičů b. Obecně platí Einsteinova rovnice pro vzájemnou souvislost difuzní konstanty a pohyblivosti

$$D = b. \frac{k \cdot T}{e} \qquad (2.29)$$

Např. přes průřez $S = 10\mu m \cdot 10\mu m$ teče difuzní proud. Protože na délce $l = 1\mu m$ se pohybuje hustota děr v mezích od ($10^{17} \div 10^{16}$) cm, je difuzní proud

$I_{dif} = S\cdot J_{dif} = S\cdot e\cdot D_p(-\partial n_p/\partial x) = 10^{-6}\ cm^2 \cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ As\cdot\ 12{,}5cm^2\ s^{-1} \cdot (10^{17} - 10^{16})cm^{-3}/(10^{-4}cm) = = 1{,}8\ mA$

Stručně shrnuto bude:

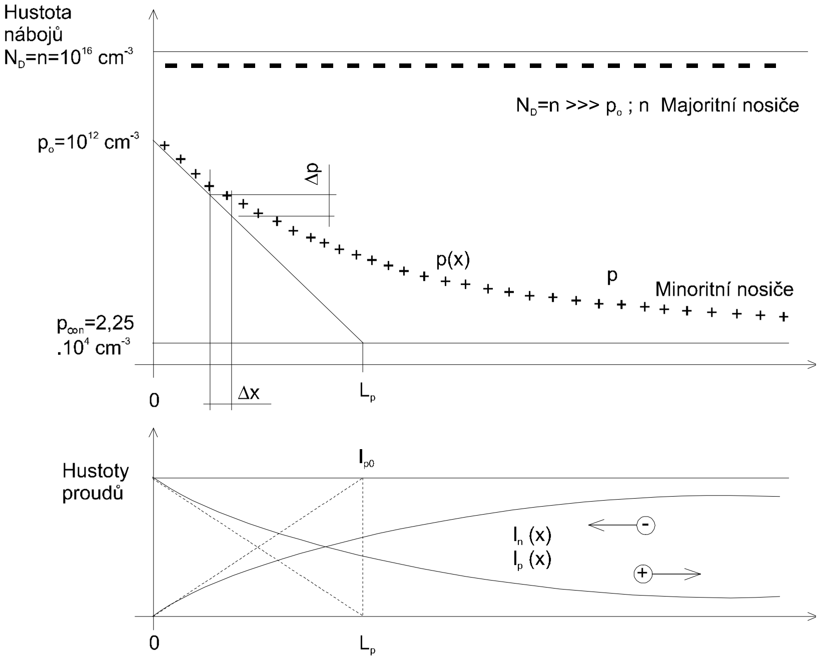
Buzený proud elektronů	$J_{F,n} = - e\cdot n\cdot b_n\ (-\partial\varphi/\partial x)$
Buzený proud děr	$J_{F,p} = + e\cdot n\cdot b_p\ (-\partial\varphi/\partial x)$
Difuzní proud elektronů	$J_{D,e} = - e\cdot D_n\ (-\partial\alpha/\partial x)$
Difuzní proud děr	$J_{D,p} = e\cdot D_p\ (-\partial n/\partial x)$

V každém průřezu polovodivého krystalu vedoucího proud musí samozřejmě být celkový proud spojitý a velký. To podmiňuje skutečnost, že buzený proud může být převzatý z difuzního proudu a bude opačný.

Na obr. 2.20 je graf difuze děr v n-krystalu. Rekombinací s elektrony procházejí díry s hustotou $n_p(x)$ z levé strany z hodnoty n_{po} exponenciálně do difuzní oblasti L_p k ustálené hodnotě $n_{p\infty}$. Hustotě děr $n_p(x)$ Můžeme přiřadit difuzní proud $J_p(x)$, hustotě rekombinačního proudu $J_n(x)$ přiřadíme hodnotu celkového proudu

$$J_{po} = e.D_p.\frac{n_{po} - n_{p\infty}}{L_p} \qquad (2.30)$$

Nejčastější použití polovodičů je realizováno vytvářením přechodových vrstev (polovodič - kov, polovodiče *P* - *N*). V dnešním stavu rozvoje elektronizace snad není třeba vyjmenovávat základní prvky, využívající tyto přechody.



obr. 2.20

2.3. Elektrické pole v dielektriku

Čas ke studiu: 7 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

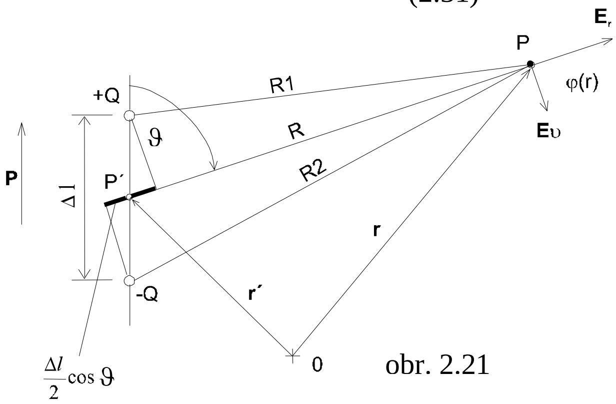
- vyřešit závislost intenzity a potenciálu bodového dipólu
- rozlišovat látky polární a nepolární
- vysvětlit podstatu parametru permeabilita látky

Výklad

Pole bodového dipólu

Za bodový dipól považujeme konfiguraci dvou bodových nábojů stejné velikosti Q a opačné polarity, vzdálených od sebe o Δl, přičemž Δl je mnohem menší, než vzdálenost R dipólu od referenčního bodu, ve kterém jeho účinky vyšetřujeme. Potom je dipól definován jen vektorem nazývaným moment dipólu

$$p = Q \cdot \Delta \mathrm{l} \qquad (2.31)$$



obr. 2.21

(který zahrnuje i směr spojnice obou nábojů) a vzdáleností R středu dipólu od referenčního bodu. $R = | r - r' |$ podle obr.1.1 (zde je bod A v oblasti zdroje, B je referenční bod). Přestože není dipól definován jednotlivými vzdálenostmi R_1, R_2 od jednotlivých nábojů k referenčnímu bodu, používáme při odvození jeho účinků v referenčním bodě metodu superpozice a obě tyto vzdálenosti se uplatní s tím, že pro $\Delta l \ll R$ je podle obr.2.21

$$R1 = R - (\Delta l/2) \cdot \cos \vartheta \qquad (2.32)$$

$$R2 = R + (\Delta l/2) \cdot \cos \vartheta \qquad (2.33)$$

Potom

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}.(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon}.(\frac{1}{R-(\Delta l/2).\cos\vartheta} - \frac{1}{R+(\Delta l/2).\cos\vartheta}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}.\frac{(R+(\Delta l/2).\cos\vartheta)-(R-(\Delta l/2).\cos\vartheta)}{R^2-[(\Delta l/2).\cos\vartheta]^2} \approx$$

$$\approx \frac{Q.\Delta l}{4\pi\varepsilon}.\frac{\cos\vartheta}{R^2}$$

Přičemž jsme zanedbali výraz $[(\Delta l/2).\cos\ \vartheta]^2$ vůči R^2. Δl je totiž velmi malé číslo, násobené $\cos\ \vartheta$, tedy číslem < 1 a jejich součin umocněný na druhou je číslo ještě menší. Součin $\Delta l.\cos\ \vartheta$ je vlastně průmět Δl do směru R a pomocí jednotkového směrového vektoru lze psát:

$\Delta l \cdot \cos\vartheta = \Delta l \cdot u_R$ a podle vektorové identity

$$\frac{\mathbf{u}_R}{R^2} = -grad(\frac{1}{R}) = grad'(\frac{1}{R}) \qquad (2.34)$$

kde symbol operace *grad* značí derivaci skalární funkce *1/R* v bodě *P* při pevném bodě *P'* a *grad'* derivaci stejné funkce v bodě *P'* při pevném bodě *P*. Po dosazení:

$$\varphi(r) = \frac{Q.\mathbf{\Delta l}}{4\pi\varepsilon} \cdot grad(\frac{1}{R}) = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon} grad'(\frac{1}{R}) \qquad (2.35)$$

Intenzitu pole lze vypočíst nejlépe z definičního vztahu $E = -\ grad\ \varphi$ ve sférických souřadnicích, v nichž je

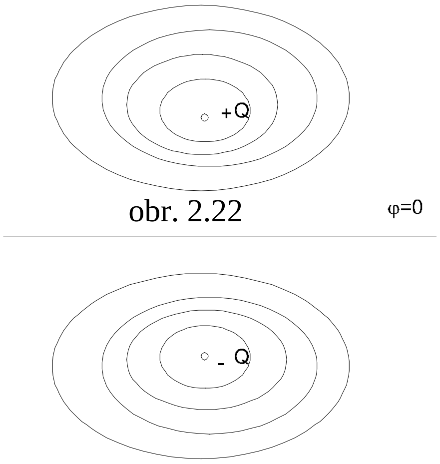
$$\mathrm{grad}\ \varphi = (\partial\varphi/\partial R) \cdot u_R + (1/R) \cdot (\partial\varphi/\partial\vartheta) \cdot u_\vartheta + (1/R.\sin\ \vartheta) \cdot (\partial\varphi/\partial\alpha) \cdot u_\alpha \qquad (2.36)$$

$$E_R = -\ (\partial\varphi/\partial r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.\frac{2p}{R^3}.\cos\vartheta \qquad (2.37)$$

$$E_\vartheta = -(1/R).(\partial\varphi/\partial\vartheta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.\frac{p}{R^3}.\cos\vartheta \tag{2.38}$$

$$E = \sqrt{(E_r^2 + E_\vartheta^2)} = \frac{p}{4\pi\varepsilon R^3}.\sqrt{(4.\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)} = \frac{p}{4\pi\varepsilon R^3}.\sqrt{(3.\cos^2\vartheta + 1)} \tag{2.39}$$

Maximální *E* je pro *cos* $\vartheta = 1$ tj. pro $\vartheta = 0$ nebo 180°, tedy v bodech na ose dipólu - spojnici nábojů. Zde je $E_\vartheta = 0$ a $E = Er = \pm (p/2\pi\varepsilon R^2)$. V porovnání s bodovým nábojem klesá v poli bodového dipólu potenciál ne s první, ale s druhou mocninou a intenzita ne s druhou, ale třetí mocninou. Průběh ekvipotenciál je na obr.2.22.



obr. 2.22

❑ Polarizace dielektrika

Při působení el. pole na látku dochází:

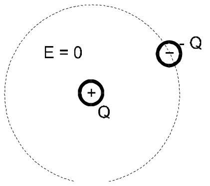
1. k posuvu vázaných nabitých částic, tvořených molekulemi a atomy látky,
2. k orientovanému pohybu volných nabitých částic ve struktuře látky, tj. vzniká el. proud.

Dielektrikum obsahuje málo volných částic s nábojem, dochází u něj jen k posuvu vázaných nabitých částic látky v hranicích molekuly tj. k elektrické polarizaci dielektrika. Dielektrikum dělíme z hlediska dipólového momentu na:

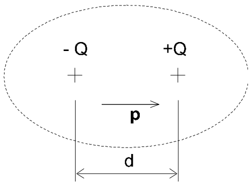
a) nepolární, které mají v nepřítomnosti vnějšího pole dipólový moment nulový,

b) polární, které mají vlastní dipólový moment nenulový.

Molekuly a atomy v nepolárním dielektriku jsou elektricky neutrální, pokud nejsou v el. poli. Rychlost záporného elektronu (na obr.2.23 zastupuje jeden elektron všechny elektrony na oběžných drahách) je taková, že se nám jeví neurčitý v poloze tak, jako by byl spojitě rozložen po své kruhové dráze. Silové účinky s kladným nábojem jádra se ruší a atom se jeví skutečně jako neutrální. Je-li takový atom (molekula) vložen do vnějšího elektrického pole, dochází k deformaci dráhy elektronu na eliptickou podle obr.2.23 a obr.2.24 Vzniklý dipól je charakterizován dipólovým momentem



obr. 2.23

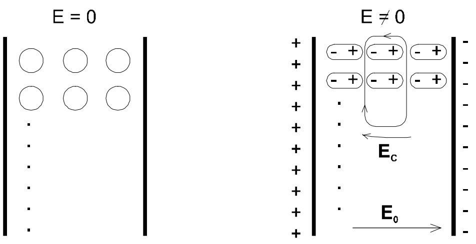


obr. 2.24

$$p = Q.d \tag{2.40}$$

přičemž d a tedy i p jsou přímo úměrny velikosti intenzity el. pole *E*. Hranicí přímé úměrnosti je elektrická pevnost daného dielektrika, u níž dojde k průrazu a dielektrikum se chová jako vodič.

Polarizaci vyjadřujeme pomocí vektoru elektrické polarizace *P*, který je definován vztahem:



obr. 2.25

$$P = \frac{1}{\Delta V}\sum_k p_i \tag{2.41}$$

kde symbol sumace představuje vektorový součet momentů všech *k* dipólů, nacházejících se v jednotkovém objemu dielektrika. Směr všech vektorů *p* je stejný, jako směr *E*, jsou tedy kolineární a můžeme psát $P = n.p$, kde n je počet dipólů v jednotkovém objemu. Důsledek přímé úměrnosti mezi vektory P a E můžeme vyjádřit matematickým vztahem

$$P = \chi\, E = \varepsilon_o \chi_e . E \qquad (2.42)$$

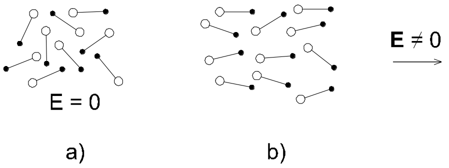
kde χ_e je dielektrická susceptibilita látky (činitel dielektrické polarizace). Ideálními nepolárními látkami jsou např. plyny (vodík, kyslík). χ_e je u nich teplotně nezávislá, protože kvazielastické deformující síly nezávisí na tepelném molekulárním pohybu.

U dielektrika s polárními molekulami je jev polarizace daleko složitější. I v nepřítomnosti vnějšího elektrického pole tvoří molekuly el. dipóly jako následek tepelného nebo molekulárního pohybu v chaotickém stavu. V případě:

$E = 0$ v každém směru je stejný počet dipólů, tzn. celek je neutrální obr. 2.26a.

$E \neq 0$ dochází k orientaci dipólů ve směru vnějšího pole - obr. 2.26b.

Proti orientaci působí tepelný pohyb částic. Současně dochází při orientaci ke stejnému jevu jako u nepolárních molekul, tj. vzdálenost + a - nábojů dipólů se zvětšuje. Pro menší intenzity el. pole platí i v tomto případě přibližně vztah $P = \chi.E$. U větších E dojde ke stavu nasycení, kdy jsou skoro všechny dipóly orientovány a závislost $P = P(E)$ je nelineární. χ je zde na rozdíl od nepolárních látek teplotně závislá (závisí na teplotním pohybu molekul). Patří sem látky krystalické nebo ionizované. Grafické vyjádření charakteristiky nelineárního dielektrika je na obr.2.27a. Na obr. 2.27b je nelineární dielektrikum s hysterezi, ke které dochází u tzv. seignettoelektrických látek (podle seignettovy soli u níž byla hystereze poprvé objevena). Na základě podobnosti charakteristik s feromagnetickými látkami je také nazýváme feroelektrické látky. Obdobou k permanentním materiálům jsou tzv. elektrety, tj. dielektrika vykazující trvalou remanentní polarizaci i po odstranění vnějšího el. pole.



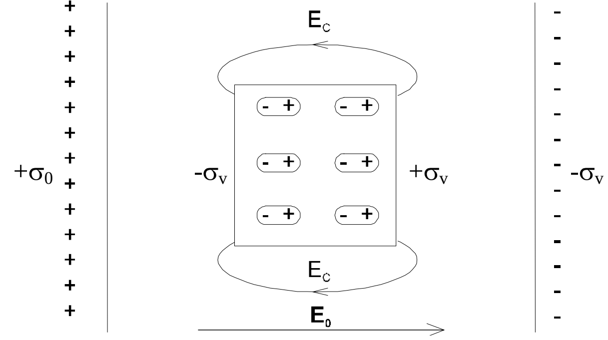
obr. 2.26

a) obr. 2.27 b)

Vložíme-li dielektrikum do elektrického pole intenzity E_o viz obr.2.25, polarizuje se toto dielektrikum, tj. jeho objem se zaplní elementárními uspořádanými dipóly p_i, které vytvoří pole coulombovského charakteru s intenzitou E_c. Zdrojem takovéhoto pole je tedy prostorové rozložení náboje s hustotou ρ_v a plošné rozložení σ_v. Výsledné pole je

$$E = Eo + Ec \qquad (2.43)$$

Odstraníme-li budicí pole E_o, zmizí i pole E_c a tedy zmizely i ρ_v a σ_v. Tyto náboje nelze z dielektrika odvést, protože jsou vázány na jev polarizace a nazýváme je vázané náboje.



obr. 2.28

Podle uvedených dvou způsobů polarizace se můžeme někdy setkat s dělením dielektrika na dielektrika:

1. druhu neboli deformační (také induktívní)
2. druhu neboli orientační (také ionizační)

❑ Zdroje vektoru polarizace

V předcházející kapitole byl zaveden pojem vázaný náboj s hustotami ρ_v (objemová hustota vázaných nábojů) nebo σ_v (plošná hustota vázaných nábojů na povrchu dielektrika). Dále se pokusíme zjistit v jakém vztahu jsou tyto hustoty a vektor polarizace *P* (tedy objemová hustota dipólových momentů). Přitom vyjděme z podmínky, že vektor *P* musí budit stejný potenciál jaký je buzen náboji s hustotami ρ_v a σ_v, to znamená potenciál

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_V \frac{\rho_V}{R}.dV + \oint_S \frac{\sigma_V}{R}.dS\right] \tag{2.44}$$

Jak bylo uvedeno lze tento potenciál vyjádřit pomocí $P = \frac{d\mathbf{p}}{dV}$

$$d\varphi(r) = \frac{d\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_o}.grad'(\frac{1}{R}) = \frac{\mathbf{P}\cdot dV}{4\pi\varepsilon_o}.grad'(\frac{1}{R}) \tag{2.45}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\int_V \underbrace{\mathbf{P}\cdot grad'(\frac{1}{R})}.dV \tag{2.46}$$

Použijeme :

$$div\ (\mathbf{P}\cdot\frac{1}{R}) = (\frac{1}{R})div'\mathbf{P} + \mathbf{P}\cdot grad'(\frac{1}{R}) \tag{2.47}$$

V dalším výpočtu lze apostrof vynechat, protože tento pouze naznačuje, že div vytváří hustotu ρ_v v místě zdroje *r'*.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\left[\int_V \frac{-div\mathbf{P}}{R}.dV + \oint_S \frac{P_n}{R}.dS\right] \tag{2.48}$$

Z Gaussovy - Ostrogradského věty:

$$\int_V div(\frac{\mathbf{P}}{R}).dV = \oint_S \frac{\mathbf{P}\cdot dS}{R} = \oint_S \frac{P_n.dS}{R}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.[\int_V \frac{-div\mathbf{P}}{R}.dV + \oint_S \frac{P_n}{R}.dS \tag{2.49}$$

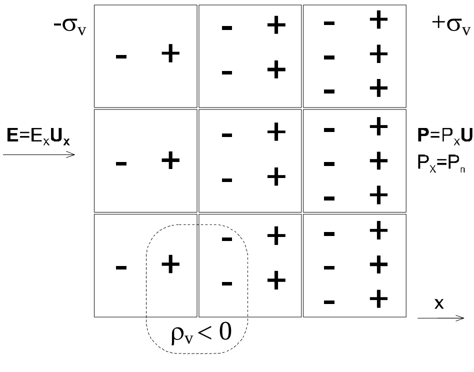
Z formální podobnosti tohoto vztahu a vztahu (2.44) můžeme psát:

$\rho_v = -\ div\ P$ (2.50) $\sigma_v = P_n = P.n$ (2.51)

analogicky jako jsme psali u volných nábojů:

$\rho_o = div\ D$ $\sigma_o = D_n$

Zdrojem vektoru polarizace je tedy objemová hustota vázaných nábojů a na povrchu dielektrika je normálová složka tohoto vektoru (normála směřuje ven z dielektrika) rovná plošné hustotě vázaných nábojů např. podle obr.2.29.



Zavedením vázaných nábojů se změní i chápání Maxwellovy rovnice $div\ E = \rho/\varepsilon$. Za ρ musíme dosadit jak hustotu nábojů volných ρ_o, tak i vázaných ρ_v:

$$\rho = \rho_o + \rho_v \qquad (2.52)$$

$$divE = \frac{\rho}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_o + \rho_v}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_o - div\mathbf{P}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} - \frac{1}{\varepsilon_o}.div\mathbf{P} \quad (2.53)$$

Nalezněme vektor, který by závisel jen na volných nábojích:

$$div\ (\varepsilon_o.\underbrace{E + P)}_{} = \rho_o \qquad (2.54)$$

$$D = \varepsilon_o.E + P \qquad div\ D = \rho_o \qquad (2.55)$$

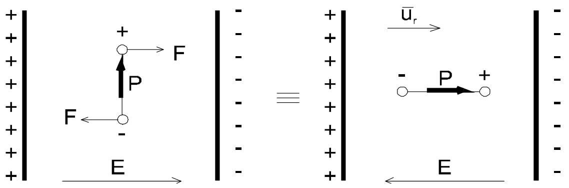
Vyjádříme-li ještě

$$P = \chi\cdot E = \varepsilon_o\cdot\chi_e\cdot E \qquad (2.56)$$

je $\quad D = (\varepsilon_o + \chi)\cdot E = \varepsilon_o\cdot(1 + \chi_e)\cdot E = \varepsilon_o\cdot\varepsilon_r\cdot E = \varepsilon\cdot E \qquad (2.57)$

kde ε_r je relativní permitivita, $\chi_e = \chi/\varepsilon_o$ relativní susceptibilita.

Vztahy (2.54) ÷ (2.57) odpovídají hledisku minima energie. Soustava na obr.2.30 se snaží zaujmout rovnovážnou polohu, kdy má vektor P stejný směr jako vektor E. K natočení dipólu je potřeba energie, kterou musí dodat vnější pole, takže $D = P + \varepsilon\cdot E$ (2.58)

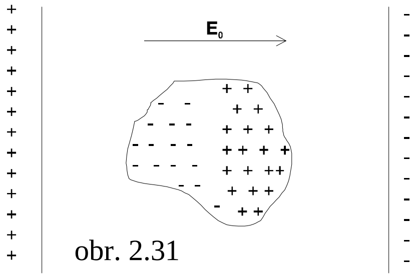


obr. 2.30

V anizotropních látkách je permitivita $\varepsilon_{\alpha\beta}$ tenzorem a platí:

$$D_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta}.E_\beta \qquad (\alpha = 1,2,3 \text{ v kartéz. } x,y,z) \qquad (2.59)$$

např. D_x *pro* $\alpha = x$ je $D_x = \varepsilon_{xx}\cdot E_x + \varepsilon_{xy}\cdot E_y + \varepsilon_{xz}\cdot E_z$



obr. 2.31

V částečně vodivých dielektrikách nebo polovodičích vzniká také polarizace a volné náboje na površích dielektrik vytvoří povrchový náboj - obr.2.31. Situace je podobná elektrostatické indukci ve vodiči, ale uvnitř tělesa není nulové pole; volných elektronů v něm není tolik, aby vnější pole eliminovaly.

2.4. Magnetické pole v magnetizovaném prostředí

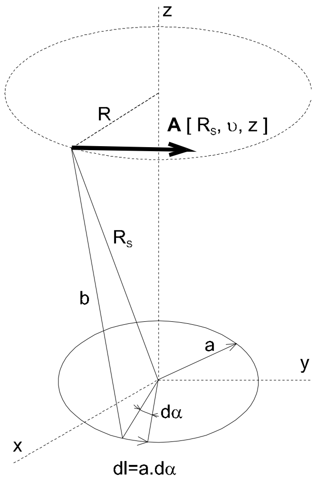
Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

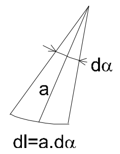
- definovat účinky magnetického dipólu
- porozumět podstatě pojmu magnetická permeability
- rozlišit látky dia-, para- a feromagetické
- popsat křivku prvotní magnetizace
- porozumět pojmu hysterézní křivka
- vyřešit optimalizaci prmanentního magnetu

Výklad

Magnetické vlastnosti patří mezi základní vlastnosti, kterými se vyznačují elementární částice látky. Tyto elementární částice, a to včetně částic elektricky neutrálních (např. neutron) jsou nositeli magnetických momentů. Pohybem elektronů v elektronovém obalu atomu s různými spiny vznikají v látce elementární proudové smyčky, které mají za následek vznik vlastního magnetického pole v této látce. Ke vzniku pohybujícího se náboje a tedy magnetického momentu dochází vlastně již při pohybu elektronů po určitých drahách - orbitech (vycházíme-li z Bohrova modelu atomu). Např. elektron ve vodíkovém atomu vytváří při svém pohybu po orbitě uzavřenou proudovou smyčku s proudem $i = e{\cdot}v$, kde e je náboj elektronu a v je frekvence obíhání elektronu po orbitě. Tato uzavřená proudová smyčka se vyznačuje magnetickým momentem $m = i{\cdot}S$. Vložením látky do magnetického pole se mohou momenty orientovat ve směru mag. pole a výsledné pole se zvýší. Můžeme zde vysledovat jistou analogií s polarizací dielektrika.



Elektron ve vodíkovém atomu se tedy vyznačuje kromě spinových i orbitálními magnetickými momenty. Jejich vektorový součet při respektovaní pravidel kvantování poskytuje výsledný magnetický moment elektronu ve vodíkovém atomu. Pokud obsahuje elektronový obal více než jeden elektron dochází ke vzájemné interakci mezi elektrony. V důsledku toho se uplatní Pauliho princip, podle něhož se může v elektronovém obalu vyskytovat v určitém stavu jen jeden elektron. V kvantových stavech, které elektrony v obalu mnohaelektronového atomu zaujímají, nemohou náležet vícerým elektronům stejná čtyři kvantová čísla (n,l,m_l,m_s) - alespoň jedno kvantové číslo musí být rozdílné.



Orbitální i spinové mechanické a magnetické momenty jednotlivých elektronů se skládají ve výsledný mechanický a magnetický moment celého elektronového obalu, a tedy i atomu. V atomu nejsou možné libovolné orientace jednotlivých elektronových drah a spinů, ale jen takové, pro něž výsledný mechanický orbitální moment atomu $\left|\vec{L}\right|$, případně výsledný spin atomu $\left|\vec{\mathrm{S}}\right|$ splňují podmínku $|L| = \sqrt{L(L+1)} \cdot h$ resp. $|\mathrm{S}| = \sqrt{S(S+1)} \cdot h$, kde kvantové číslo L může nabývat jen celočíselné hodnoty ($L = 0,1,2,3,....$) resp. $S = 0,1/2,1,3/2,2,5/2,.....$

Na uzavřených podsférách, a tedy i sférách elektronového obalu, jsou orbitální i spinové mechanické momenty jednotlivých elektronů vždy v takové vzájemné vazbě, že jejich výsledný orbitální i spinový moment je nulový ($L = S = 0$). Uzavřených podsfér elektronového obalu si tedy není potřeba všímat. Dále si nejprve ukažme, jak se dá pole obecné elementární smyčky vypočíst.

❑ Pole elementární proudové smyčky

Za elementární považujeme smyčku, jejíž poloměr *a* je mnohem menší než vzdálenost smyčky od referenčního bodu, v němž budeme jeho účinek zjišťovat. Taková smyčka (magnetický dipól) bude popsána jednoznačně magnetickým momentem dipólu

$$m = I{\cdot}S{\cdot}n = I{\cdot}S \quad (2.60)$$

a vzdáleností jejího středu od referenčního bodu R_s. Pro výpočet pole působeného dipólem v referenčním bodě použijeme vektorový potenciál *A(R,z)*, který lze pro součet délkových elementů *dl* obr.2.32 a obr.2.33 vyjádřit vztahem

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{z})=\frac{\mu_0\cdot \boldsymbol{I}}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi a}\frac{\mathbf{dl}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\mu_0\cdot \boldsymbol{I}}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi a}\frac{\boldsymbol{dl}}{\boldsymbol{b}}\cdot\cos\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{u}_\alpha=\frac{\mu_0\cdot \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{a}}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{d\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{R}^2-2\boldsymbol{aR}\cdot\cos\boldsymbol{\alpha}}}\cdot\mathbf{u}_\alpha \qquad (2.61)$$

dosadíme $z^2+R^2=R_S^2 \qquad R=R_S\cdot\sin\vartheta$

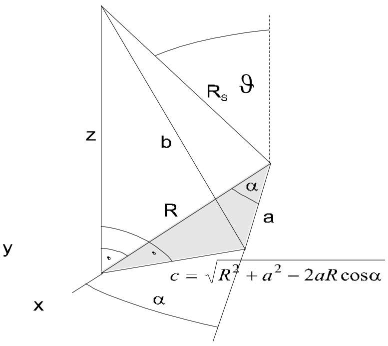
$$A(R,\vartheta)=\frac{\mu_0\cdot I\cdot a}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\cdot d\alpha}{\sqrt{R_S^2-R_S\cdot 2a\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\alpha+a^2}}=\frac{\mu_0\cdot I\cdot a}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\cdot d\alpha}{R_S\cdot\sqrt{1-\frac{a}{R_S}\cdot 2\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\alpha+\left(\frac{a}{R_S}\right)^2}}$$

V dostatečné vzdálenosti od smyčky zanedbáme $\left(\frac{a}{R_S}\right)^2$. Dále zjednodušme výraz podle obecného vztahu pro $x \ll 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\approx\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}\approx 1+\frac{x}{2} \qquad (2.62)$$

(2.62)

potom

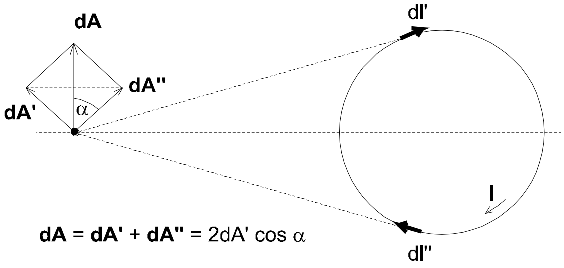


obr. 2.33

$$A(R_S,\vartheta)=\frac{\mu_0\cdot I\cdot a}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha}{R_S}\cdot\left(1+\frac{a}{R_S}\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\alpha\right)d\alpha=$$

$$=\frac{\mu_0\cdot I\cdot a}{2\pi}\left[\frac{\sin\alpha}{R_S}+\frac{a}{R_S^2}\sin\vartheta\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right)\right]_0^{\pi}=\frac{\mu_0\cdot a^2\cdot I\cdot\sin\vartheta}{4R_S^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot S\cdot\sin\vartheta}{R_S^2}$$

kde jsme dosadili plochu smyčky $S = \pi{\cdot}a^2$. Dosadíme dále za $I{\cdot}S = m$ a vyjadříme *A* jako vektor. Podle obr.2.34 bude mít vždy směr jednotkového vektoru u_α, tedy směr, který dostaneme vektorovým součinem *m* x R_s (*m* je kolmý na plochu smyčky).

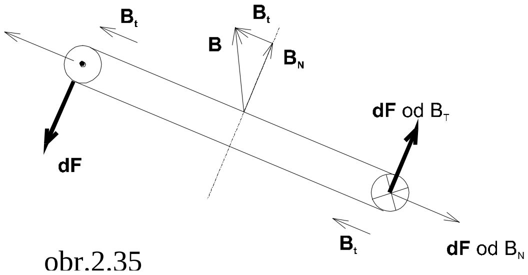


$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{m} \times \mathbf{R}_S}{\boldsymbol{R}_S^3} \tag{2.63}$$

Z vypočteného vektorového potenciálu určíme složky indukce

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A} = rot\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{R_S^2}(\sin\vartheta)\mathbf{u}_\alpha = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{R_S^2}(\cos\vartheta)}_{B_R}\mathbf{u}_R + 0\cdot\mathbf{u}_\alpha + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{R_S^3}(\sin\vartheta)}_{B_\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta \tag{2.64}$$

Nachází -li se magnetický dipól v homogenním magnetickém poli, jak je znázorněno na obr.2.35 nebude na něj sice působit výsledná síla $F = I{\cdot}dl \times B$, ale jak již bylo uvedeno u definování magnetické indukce, bude natáčen mechanickým momentem $M_{mech} = m \times B$. Složka indukce orientovaná ve směru momentu m působí na smyčku silovými účinky v radiálním směru a namáhá vodič na tah.



obr.2.35

Klasifikace materiálů podle magnetických vlastností

Podobně jako u dipólů v dielektriku, můžeme vystředit i momenty magnetických dipólů v objemu ΔV a zavádíme vektor magnetizace

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta \boldsymbol{V}} \quad [\boldsymbol{A}/\boldsymbol{m}] \tag{2.65}$$

Analogická bude v magnetickém poli i závislost velikosti vektoru magnetizace na indukci magnetického pole. Závislost je ale poněkud komplikovanější, než třeba u vektoru polarizace nepolárních látek v el. poli a její rozbor vyžaduje znalost stavby atomu. V lineárním magnetiku $M = k{\cdot}B$ a vektory B,H,M jsou rovnoběžné

$$B = \mu_o{\cdot}(H + M) \tag{2.66}$$

Ze součtu veličin na pravé straně vztahu je zřejmé, že H a M mají stejný rozměr. Navzájem jsou svázány konstantou cm, nazvanou magnetická susceptibilita

$$M = \mu_o\chi_m{\cdot}H \tag{2.67}$$

takže

$$B = \mu_o(H + M) = \mu_o(1 + \chi_m){\cdot}H = \mu_o{\cdot}\mu_r{\cdot}H = \mu{\cdot}H \tag{2.68}$$

kde $\mu_r = 1 + \chi_m$ je relativní permeabilita

$\mu = \mu_o{\cdot}\mu_p$ je permeabilita prostředí

Logicky by měl být vektor magnetizace M úměrný vektoru B, ale opět jsem v tomto případě dodrželi zavedenou historicky zdůvodněnou dohodu. Vektor magnetizace (stejně jako vektor polarizace) jsou pevně spjaty s hmotou a vymizí ve volném prostoru. Jistou podobnost můžeme vysledovat pro vztahy v elektrickém a magnetickém poli

$\mathrm{P} = \mathrm{D} - \varepsilon_o{\cdot}\mathrm{E}$ $\qquad$ $\mathrm{M} = (1/\mu_0){\cdot}\mathrm{B} - \mathrm{H}$

$\mathrm{P} = \mathrm{D} + \varepsilon_o{\cdot}\mathrm{E}$ $\qquad$ $\mathrm{B} = \mu_o{\cdot}\mathrm{M} + \mu_o{\cdot}\mathrm{H}$

$\chi_e = \varepsilon_o - 1$ $\qquad$ $\chi_m = \mu_o - 1$

Susceptibility χ_e a χ_m jsou relativní, tj. bezrozměrné veličiny a nezávisí na použité soustavě jednotek. χ_e může být pouze kladná, χ_m může nabývat i záporných hodnot. V těchto vztazích jsou vektory E a B základní polní veličiny, protože vyjadřují silové působení na náboje. Vektory D a H jsou polní veličiny odvozené, vázané na stav hmoty.

Podle velikosti χ_m je vžito (bez nároků na úplnost) dělení materiálů na:

$\chi_m < 0$ diamagnetické (B se v jejich přítomnosti zmenší)

$\chi_m > 0$ paramagnetické (B se v jejich přítomnosti zvýší)

$\chi_m >> 0$ feromagnetické (B se v jejich přítomnosti velmi zvýší)

Řádově se v těchto případech pohybuje modul χ_m v hodnotách 10^{-5} pro pevné látky a 10^{-8} pro plyny. Susceptibility všech neferomagnetických materiálů jsou v praxi tak malé, že je lze většinou zanedbat. Zvláštní případ tvoří látky feromagnetické, u nichž je $|\chi_m| \gg 1$, řádově dosahující velikosti $10^3 \div 10^6$.

Některé hodnoty magnetické susceptibility u neferomagnetických materiálů jsou v následující tabulce:

materiál	χ_m	materiál	χ_m
hliník	$2{,}3\cdot10^{-5}$	sodík	$-0{,}24\cdot10^{-5}$
měď	$-0{,}98\cdot10^{-5}$	titan	$7{,}06\cdot10^{-5}$
zlato	$-3{,}6\cdot10^{-5}$	CO_2 (při 100	$-0{,}99\cdot10^{-8}$
hořčík	$1{,}2\cdot10^{-5}$	dusík (-//-)	$-0{,}5\cdot10^{-8}$
rtuť	$-3{,}2\cdot10^{-5}$	kyslík (-//-)	$209\cdot10^{-8}$
stříbro	$-2{,}6\cdot10^{-5}$	vodík	$-0{,}21\cdot10^{-8}$

❑ Pole buzené vektorem magnetizace

Přechodem k vystředěným hodnotám dostaneme z elementárních orbitálních a spinových momentů vektor magnetizace jako spojitou funkci souřadnic *M(x' ,y' ,z') = M(r')*. Plošné a objemové hustoty proudů vytvoří pole:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint \frac{\mathbf{K}'}{R}\,dS' + \int \frac{\mathbf{J}'}{R}\,dV'\right] \tag{2.69}$$

kde $R = r - r'$. Magnetické momenty vytvoří stejné pole:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dm(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}\cdot dV' \tag{2.70}$$

tedy

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}\cdot dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\mathbf{M}\times grad'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot dV' \tag{2.71}$$

Použitím identity

$$rot'\left(\frac{1}{R}\mathbf{M}\right) = \frac{1}{R}rot'\mathbf{M} + grad'\frac{1}{R}\times\mathbf{M} = -\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times grad'\frac{1}{R} + \frac{1}{R}rot'\mathbf{M}(\mathbf{r}') \tag{2.72}$$

je

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_{V'} rot'\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R}\cdot dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_{V'}\frac{rot'\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R}\cdot dV' \tag{2.73}$$

Dále upravíme

$$\int rot\mathbf{M}\cdot d\mathbf{V} = \oint d\mathbf{S}\times\mathbf{M} = -\oint \mathbf{M}\times d\mathbf{S} \tag{2.74}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M}(\boldsymbol{r}') \times \mathbf{n}}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r}')} \cdot \boldsymbol{dS}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\boldsymbol{rot}\mathbf{M}(\boldsymbol{r}')}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')} \cdot \boldsymbol{dV}' \qquad (2.75)$$

Na základě formální podobnosti rovnic (2.66) a (2.72) můžeme psát:

$$K_v = M \text{ x } n \qquad J_v. = rot\, M \qquad (2.76)$$

Zavedli jsme tedy vázané proudy K_v a J_v. Magnetické vlastnosti prostředí lze skutečně vysvětlit jen pohybem vnitřních nábojů po drahách na něž jsou vázány a na nichž se nemohou zastavit. Vázané proudy nevytvářejí teplo, protože tyto proudy nesouvisí s elektronovým driftem. Čárky u symbolů proudů jsme mohli vynechat, protože se vztahují na stejný bod jako *M*. Z definice plošné rotace

$$Rot\, M = n \text{ x } (M_2 - M_1) = -\,(n \text{ x } M) \qquad (2.77)$$

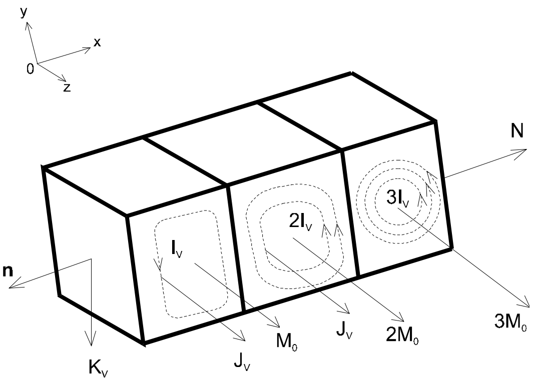
můžeme také psát

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\boldsymbol{Rot}'\mathbf{M}(\boldsymbol{r}')}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')} \cdot \boldsymbol{dS}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\boldsymbol{rot}\mathbf{M}(\boldsymbol{r}')}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')} \cdot \boldsymbol{dV}' \quad (2.78)$$

a $Kv = Rot\, M$ (2.79)

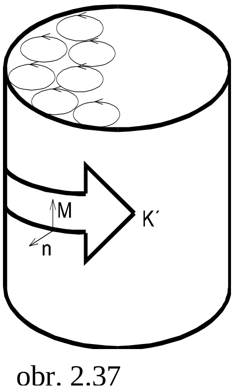
Názornou představu o vztazích (2.74) a (2.77) můžeme získat z obr.2.36 pro vektor magnetizace (složku ve směru z, tedy M_z) rovnoměrně rostoucí ve směru osy x. Potom y-ové složky proudu *J* a *K*, získané jako rotace vektoru *M*, resp. M_z jsou:

$$\boldsymbol{J}_{vy} = \frac{\partial \mathbf{M}_Z}{\partial \boldsymbol{x}} < 0 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{K}_{vy} = \mathbf{M}_Z \qquad (2.80)$$

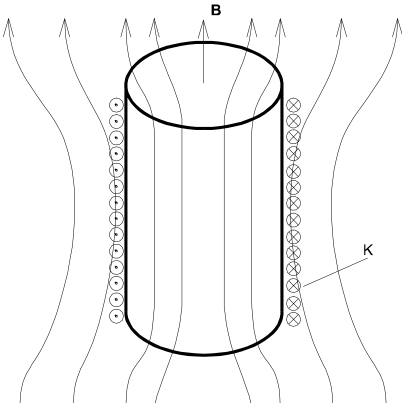


obr. 2.36

Objemová hustota vázaných proudů se uvnitř homogenního magnetika vykompenzuje, jak je nakresleno na obr.2.37. Zůstávají jen nevykompenzované plošné proudy na povrchu magnetika. Při nehomogenním magnetování, kdy jsou proudy sousedních smyček různé a objemová hustota vázaných nábojů bude nenulová $M = Jv \neq 0$. Plošné proudy na povrchu feromagnetik mají stejný účinek, jako kdyby byla na povrchu vzorku navinutá cívka s proudem. Superpozicí vnějšího pole a pole této cívky získáme výsledné pole, zesílené uvnitř cívky obr.2.38.



obr. 2.37



obr.2.38

Z Maxwellových rovnic

$$\text{rot B} - \varepsilon_o\, \mu_o\, \partial E/\partial\, t = \mu_o\, (J + \partial P/\partial\, t + \text{rot M})$$

$$rot\, E + \partial B/\partial t = 0$$

$$div\, E = (1/\varepsilon_0\,)(\rho - div\, P) \quad div\, B = 0$$

můžeme vyvodit závěr: *přítomnost tuhého hmotného tělesa v elektromagnetickém poli může být plně vyjádřena ekvivalentním rozložením hustoty náboje - div P a ekvivalentním rozložením hustoty proudu (∂P/∂t) + rot M.*

Feromagnetika, antiferomagnetika

Nedostatkem dělení materiálů pouze na tři skupiny dia-, para- a feromagnetické je to, že nepřihlíží k elementárním nosičům magnetismu a jejich vzájemnému působení, takže se v tomto dělení neobjevují významné druhy magnetik - antiferomagnetika a ferimagnetika. Dělení je třeba doplnit z hlediska dalších dvou kritérií, a to:

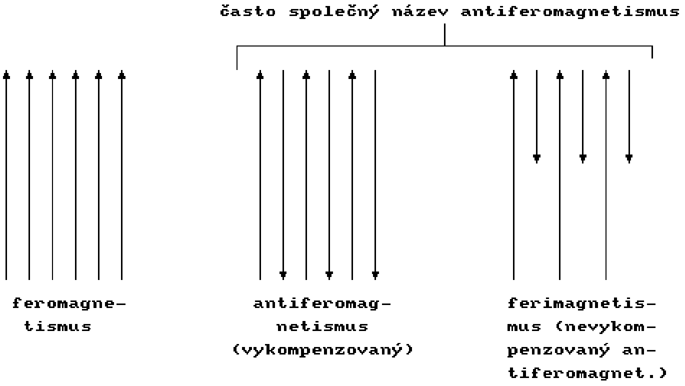
1) z hlediska hodnoty magnetických momentů atomů, případně iontů látky.

Z tohoto hlediska můžeme posuzovat dva případy:

- magnetický moment stavebních částic látky (atomů, molekul, iontů) je nulový. Je tomu tak v případě atomů se zcela zaplněnými elektronovými podsférami, kdy se orbitální i spinové magnetické momenty elektronů zcela kompenzují.
- magnetický moment stavebních částic látky je nenulový, atomy mají ve svém elektronovém obalu alespoň jednu zcela nezaplněnou podsféru. Potom jde o magnetické atomy, které se vyznačují permanentním magnetickým momentem.

2) z hlediska vzájemné interakce mezi atomovými magnetickými momenty a z hlediska vlivu vnějšího magnetického pole na ně.

U tohoto hlediska uvažujeme nejprve otázku vzájemné interakce mezi nosiči magnetických momentů. Takovéto působení nepřichází v úvahu u látek, jejichž stavební částice mají nulové magnetické vlastnosti, ale u látek jiných ano. Elementární nosiče magnetických momentů konají molekulový (tepelný) pohyb, který zanáší do orientace magnetických momentů jistý nepořádek. Proti této tendenci molekulového pohybu působí vliv působení atomových magnetických momentů, usilující o uspořádání orientace momentů. V plynech a kapalinách je toto vzájemné působení natolik slabé, že ho lze v porovnání s vlivem molekulového pohybu zcela zanedbat. Ve vícerých případech látek tuhého skupenství se však toto vzájemné působení mezi atomovými magnetickými momenty výrazně projevuje a při nevysokých teplotách převládá nad neuspořádávajícím vlivem molekulového pohybu a zabezpečuje vznik uspořádaných magnetických struktur. Mezi ně patří feromagnetismus, antiferomagnetismus a ferimagnetismus. Uspořádání magnetických momentů atomů v těchto magnetických strukturách může být schématicky znázorněno podle obr. 2.39.



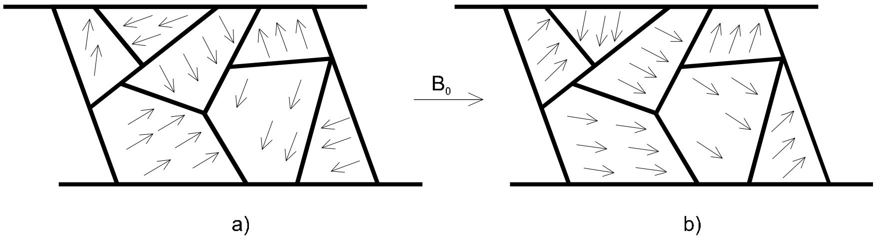
obr.2.39

Antiferomagnetismus se liší od feromagnetického stavu tím, že spiny sousedních atomů (iontů) jsou paralelně uspořádány (např. NiO, MnO, MnF2). Jako ferimagnetismus obvykle označujeme nevykompenzovaný antiferomagnetismus. Ferimagnetika se chovají v mnohých ohledech jako feromagnetika a zařazujeme je společně do skupiny silně magnetických látek (na rozdíl od para- , dia- , antiferomagnetických látek). Ferimagnetika mají velký technický význam, což souvisí s jejich zpravidla několikanásobně vyšším měrným elektrickým odporem, než mají kovy.

V reálných magnetikách se s uvedenými typy uspořádaných magnetických struktur setkáváme jen při teplotách pod hodnotou tzv. Curieho teploty T_c, např. pro *Fe (Tc = 1043°K), Co (Tc = 1404°K), Ni (Tc = 636°K).*

Na rozdíl od látek s uspořádanou magnetickou strukturou, u nichž se výrazně uplatňuje vliv vzájemného působení atomových nosičů magnetismu, hovoříme u ostatních látek, že se vyznačují neuspořádanou magnetickou strukturou, případně že nemají magnetickou strukturu.

U feromagnetických látek se vytvářejí oblasti spontánní magnetizace (domény) - obr.2.40a, v nichž jsou spinové momenty sousedících atómů v krystalové mřížce stejně orientovány. Oblasti spontánní magnetizace se vytvářeji při chladnutí roztaveného feromagnetika a v nepřítomnosti se navenek nijak neprojevují. Vložíme-li látku do magnetického pole, vytvořeného např. cívkou s proudem, natáčejí se jednotlivé dipóly ve směru tohoto vnějšího pole - obr. 2.40b. Protože dipóly jsou vlastně elementární smyčky je výsledné pole buzeno nejen smyčkou vnější (cívkou), ale i těmito smyčkami elementárními, jejich účinky se sčítají a pole se zesiluje. Proudy v elementárních smyčkách jsou vázané, nejsou spojeny se vznikem ztrát. Při vyšší teplotě se spontánní magnetizace zmenšuje až do kritické hodnoty Curieovy teploty, kdy zcela mizí. Kromě teploty mají na feromagnetismus vliv i další faktory, jako je způsob mechanického opracování, vnitřní pnutí atd.

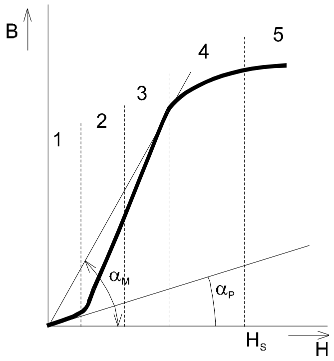


obr. 2.40

Podobné vlastnosti jako feromagnetické kovy mají i ferity, zhotovené spékáním směsí kysličníku železa a dalších kovů. Protože, jak již bylo řečeno, mají malou elektrickou vodivost, indukují se v nich malé vířivé proudy a mají tedy malé ztráty vířivými proudy. Používají se v radioelektronice a všude tam, kde jsou požadovány vysoké frekvence. Jejich relativní permeabilita $\mu_r = 10 \div 4000$. Magneticky tvrdé ferity (označení D80 ÷ D350) se používají pro konstrukce permanentních magnetů. Tvrdé ferity se vyrábějí lisováním např. práškového kysličníku železitého a barnatého s pojivem a spékáním. Jejich koercitivita je až 2000 A/cm, ale remanence jen asi 0,2T. Jsou dosti závislé na teplotě a téměř nevodivé.

❑ Prvotní křivka magnetizace

Prvotní křivkou magnetizace nazýváme závislost magnetické indukce *B* na intenzitě magnetického pole *H* po úplném odmagnetování a při pomalém a plynulém narůstání intenzity *H*. Tato závislost má nelineární charakter a dělíme ji zpravidla na několik částí podle obr.2.41. V rovnovážném stavu bez přítomnosti vnějšího magnetického pole *H*, bude uspořádání domén a směr výsledné magnetické polarizace vzorku odpovídat minimu celkové energie. V odmagnetovaném stavu má vzorek výsledný magnetický moment rovný nule. Vložíme-li vzorek do vnějšího magnetického pole, vznikne opět rovnovážný stav, v němž bude mít feromagnetikum minimum volné energie, ale přírůstek magnetostatické energie způsobí, že výsledný magnetický moment bude různý od nuly. Dalším zvětšováním intenzity *H* vnějšího magnetického pole bude stoupat vektor magnetické indukce *B* (nebo magnetické polarizace) a bude sledovat již zmíněnou nelineární křivku. Vzhledem k nevratnosti dějů, které probíhají při změnách magnetického stavu vzorku není tato křivka jednoznačná, ale závisí na magnetické prehistorii vzorku a vykazuje hysterezi. Křivka prvotní magnetizace je tedy magnetizační křivka magnetického materiálu při jeho stacionárním magnetování z odmagnetovaného stavu až do nasycení.



obr. 2.41

Úsek 1, tzv. oblast počáteční permeability je téměř lineární a probíhají v něm jen vratné procesy. Závislost *B* = *f(H)* můžeme vyjádřit

$$B = \mu_o \cdot \mu_p \cdot H \quad (2.81)$$

přičemž směrnice přímky $\mu_o.\mu_p$ je úměrná počáteční permeabilitě μ_p:

$$\mu_P = \frac{1}{\mu_0} \cdot \lim_{H \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}\bigg|_{H=0} \qquad (2.82)$$

nebo také pomocí úhlu

$$\mu_P = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{mB}{mH} \cdot tg\alpha_P \qquad (2.83)$$

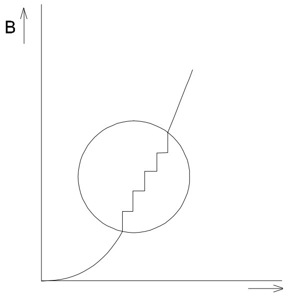
kde *mB* je měřítko mag. indukcí *B*, *mH* měřítko intenzit *H*.

Oblast 2 je Rayleighova oblast. Vznikají v ní již nevratné procesy a závislost magnetické indukce na intenzitě mag. pole můžeme vyjádřit kvadratickou rovnicí

$$B = a \cdot H + b \cdot H^2 \qquad (2.84)$$

kde a,b jsou materiálové konstanty.

Oblast 3 je strmá, takřka lineární část. Probíhají zde nevratné procesy v náhlých, tzv. Barkhausenových skocích. Má-li vzorek velký počet magnetických domén, je magnetizační křivka, měřená klasickou, např. balistickou metodou hladká. Po příslušném zvětšení části křivky by se však objevil stupňovitý průběh - viz obr.2.42. Magnetizační křivku můžeme v této oblasti opět přibližně nahradit rovnicí prvního stupně



obr. 2.42

$$B = B_1 + \mu_o \cdot \mu_{dm} \cdot (H - H_1) \qquad (2.85)$$

kde μ_{dm} je maximální hodnota relativní dynamické (diferenciální) permeability. V této oblasti se nachází bod s maximální hodnotou statické permeability

$$\mu_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{B_m}{H_m} \quad \text{resp} \quad \mu_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{mB}{mH} \cdot tg\alpha_m \qquad (2.86)$$

V oblasti 4 se stav feromagnetika přibližuje ke stavu nasycení. Dochází zde k natáčení vektoru spontánní magnetizace do směru působení pole. Dosáhne-li magnetické pole intenzity nasycení H_s, ztotožní se směr spontánní magnetizace s vnějším polem. Při dalším zvyšování intenzity magnetického pole se hodnota magnetické indukce ve vzorku mění zvolna. Oblast 5 je tedy oblastí nasycení.

❑ Permeabilita

Permeabilita je *statistická veličina vyjadřující schopnost látky reagovat na vnější magnetické pole a zesilovat je.* Tímto jediným číslem se nahrazuje působení velkého množství elementárních vázaných proudových smyček v magnetiku. Permeabilita vakua je $\mu_o = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$, s permitivitou je ve vákuu vázána vztahem $c = 1/\sqrt{(\mu_o \cdot \varepsilon_o)}$. V předcházejícím výkladu, a konečně i v předmětu Teorie obvodů, již byl objasněn pojem počáteční permeabilita, relativní permeabilita a permeabilita prostředí. Byl zde uveden i výraz pro max. hodnotu statické permeability.

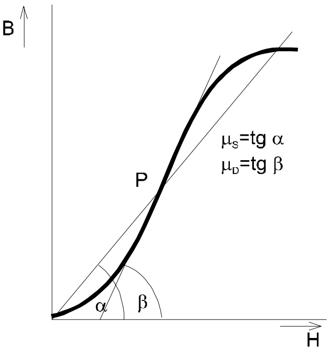
Statická permeabilita

$$\mu_S = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_P}{H_P} \qquad (2.87)$$

je v grafickém vyjádření obr.2.43 vlastně směrnicí přímky, procházející počátkem ($H = 0, B = 0$) a pracovním bodem P. Naproti tomu dynamická permeabilita

$$\mu_D = \frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dH} = \frac{1}{\mu_0}\frac{mB}{mH}\cdot tg\beta \qquad (2.88)$$

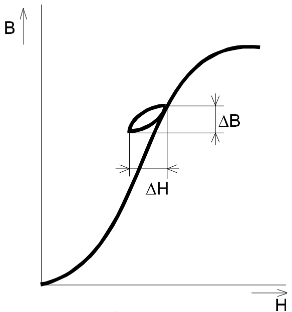
vyjadřuje směrnici tečny k magnetizační charakteristice v pracovním bodě a nabývá maxima v inflexním bodě mag. charakteristiky. Konečně vratná (také nazývána reverzibilní) permeabilita je definována pro elementární hysterézní smyčku, která se vytvoří při malé změně *ΔH* obr.2.44.



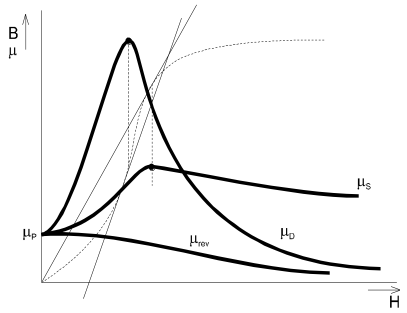
obr. 2.43

$$\mu_{REV} = \frac{1}{\mu_0}\lim_{\Delta H\to 0}\frac{\Delta B}{\Delta H} \qquad (2.89)$$

např. u malého budicího st proudu superponovaného na ss předmagnetizaci. Grafické vyjádření průběhu $\mu = f(H)$ uvedených permeabilit je na obr.2.45. Z tohoto obrázku je zřejmé, že lze průběhy permeabilit konstruovat i graficky.



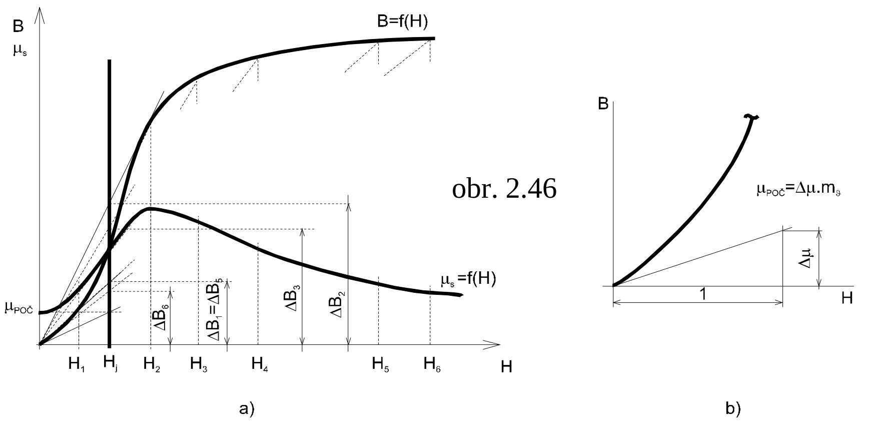
obr. 2.44



obr. 2.45

Nejjednodušší je bezesporu grafická konstukce počáteční permeability. Naneseme-li na osu *H* v patřičném měřítku jednotkovou délku intenzity magnetického pole, bude velikost úseků ve směru osy *B*, kterou nám vytne tečna k magnetizační charakteristice v počátku, představovat v měřítku $m_\mu = m_B/m_H$ velikost počáteční permeability. Hodnotu statické permeability řešíme graficky takto: K různým hodnotám H_1 až H_6 vedeme spojnice bodů magnetizační charakteristiky, odpovídající těmto intenzitám, s počátkem.

Velikost úseků, které tyto úseky vytnou na jednotkové souřadnici H_j nanášíme podle obr.2.46 na jednotlivé souřadnice pro patřičné H_1 až H_6. Proložíme-li takto nalezené body křivkou, dostáváme požadovanou závislost v měřítku m_μ.



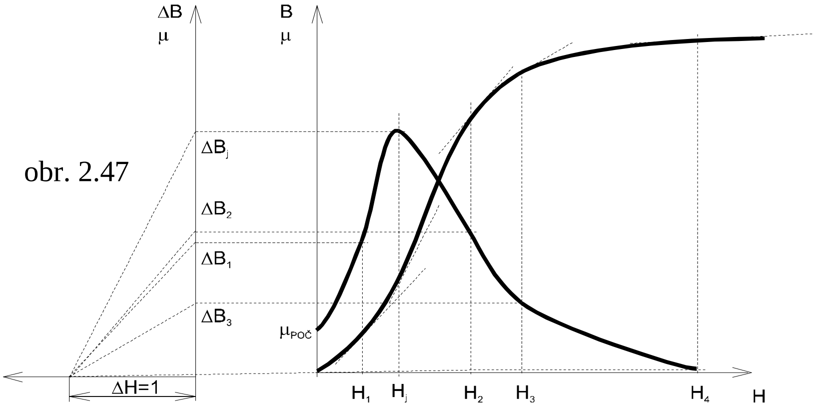
obr. 2.46

$$\mu_S = \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{m_B}{m_H}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta H} \qquad (2.90)$$

pro *ΔH* = 1

$$\mu_S = \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{m_B\cdot B}{m_H\cdot 1} = \frac{1}{\mu_0}\cdot m_\mu\cdot\Delta B\Big|_{\Delta H=1} \qquad (2.91)$$

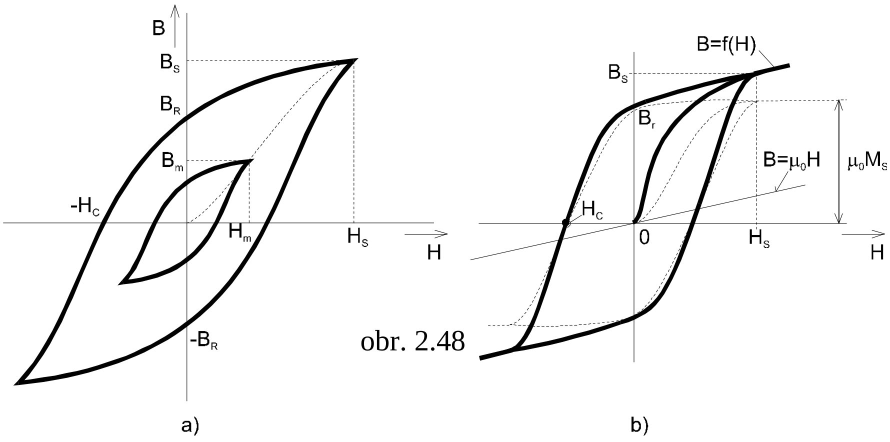
ΔH,*ΔB* jsou délky úseků.



obr. 2.47

Podobně postupujeme při konstrukci závislosti dynamické permeability. V jednotlivých bodech, odpovídajících úsekům $H_1 \div H_6$ sestrojíme k magnetizační křivce tečny. Pro lepší orientaci přeneseme tyto tečny do libovolného bodu na ose *H* mimo magnetizační charakteristiku. V jednotkové vzdálenosti od tohoto bodu sestrojíme opět rovnoběžku s osou *B*, na níž dostáváme v měřítku $m_\mu = m_B/m_H$ a v závislosti na délce zvolené jednotky přímo hodnotu dynamické permeability. Získanou hodnotu přeneseme rovnoběžkami na původní souřadnice *H* a sestrojíme křivku, která bude mít maximum v inflexním bodě magnetizační křivky - obr.2.47.

❑ Hysterézní smyčka



obr. 2.48

Fero- a ferimagnetické látky se vyznačují tím, že při vratných změnách se indukce nevrací do výchozí hodnoty - obr.2.48. Po dosažení intenzity pole $H = H_m$ se indukce při monotónním poklesu intenzity magnetického pole mění již podle jiné křivky, která je částí magnetické hysterézní smyčky pro danou maximální hodnotu intenzity pole H_m, resp. maximální hodnotu indukce B_m. Po vypnutí zdroje vnějšího magnetického pole zůstává v látce remanentní indukce B_r, kterou je možno přemagnetovat záporně orientovaným polem -*H* s intenzitou, rovnající se intenzitě koercitivního pole H_c. Při dalším snižování intenzity pole do záporných hodnot na - H_c dostáváme tvar křivky ve třetím kvadrantu.

Volíme-li stále větší H_m, dostaneme stále větší hysterézní smyčky. Vrcholy všech těchto smyček při různých hodnotách H_m,B_m leží na tzv. komutační křivce, která je velmi podobná křivce prvotní magnetizace. Jestliže již průsečíky hysterézní smyčky s osami *B* a *H* nemění při dalším zvětšování H_m své souřadnice, dostali jsme se na maximální hysterézní smyčku. Její průsečíky s osami *H* a *B* nazýváme koercitivní silou H_c a remanentní indukcí B_r. Část maximální hysterézní smyčky mezi B_r a H_c ve druhém kvadrantu nazýváme demagnetizační charakteristikou, která má velký význam při hodnocení tvrdých feromagnetických materiálů. Zmagnetovaný materiál můžeme zbavit remanentní magnetizace jen mnohonásobnou cyklickou přemagnetizací při postupném zmenšování intenzity *H*.

Plocha hysterézní smyčky reprezentuje hysterézní ztráty. V případě, že jde o cyklické přemagnetování vzorků, přispívají k jejímu ohřevu i ztráty vířivými proudy, ztráty od magnetické viskozity a rezonančních jevů. Tím se mění i tvar hysterézní smyčky, která se v tomto případě nazývá dynamická hysterézní smyčka. Statické i dynamické smyčky různých magnetických materiálů mohou být symetrické i nesymetrické vzhledem k ose *B* či *H* a mohou mít rozličný tvar.

Plocha i tvar hysterézní smyčky značně závisí na vnějších vlivech, působících na látku, jako např. na teplotě, mechanickém namáhání, na tvaru vzorku apod. Tvar dynamické hysterézní smyčky závisí navíc na frekvenci a tvaru časového průběhu intenzity periodického magnetického pole, resp. při vysokých frekvencích má v Rayleighových oblastech hysterézní smyčka tvar podobný elipse, což souvisí se vzrůstem vlivu vířivých proudů a magnetické viskozity. Při stejné hodnotě magnetické indukce B_m je dynamická hysterézní smyčka širší než statická. Čím vyšší je frekvence, tím větší jsou rozdíly.

Podle velikosti H_c (šířky hysterézní smyčky) se feromagnetické materiály dělí na materiály magneticky měkké s malou H_c a tedy úzkou hysterézní smyčkou a magneticky tvrdé s velkou $H_{c.}$ Materiály magneticky měkké sleduji lépe časově proměnné pole a mají pochopitelně menší hysterézní i vířivé ztráty. Používají se tedy na výrobu elektrických strojů točivých a transformátorů. Materiály magneticky tvrdé jsou používány pro výrobu permanentních magnetů. Speciální materiály s pravoúhlou hysterézní smyčkou se používají pro impulsní techniku.

❑ Počítačová simulace magnetizačních charakteristik

Pro účely počítačového řešení magnetických polí v nelineárních prostředích je třeba závislosti mezi polními veličinami, které jsou zadány změřenými magnetizačními charakteristikami popř. tabulkami, aproximovat analytickými funkcemi tak, aby počítač mohl jakékoliv polní veličině (např. *H*) přiřadit veličinu jinou (*B* popř. *M*). Komplikovanější jsou samozřejmě případy spojené s hysterezi. Dnes se používají převážně skalární matematické a fyzikální modely, u kterých předpokládáme stejný směr vektorů *H,B* resp. *M.*

U materiálů výrazně magneticky měkkých se hystereze zanedbává a zohledňuje se jen význačná nelinearita komutační křivky, související s nasycováním feromagnetika. V tomto případě se používají různé algebraické a transcendentní funkce. Tento přístup je opodstatněný i v případě vyšetřování vířivých proudů v kvalitních trafoplechích, pokud výrazně převládají ztráty vířivými proudy nad ztrátami hysterézními. Mezi nečastěji používané aproximace patří např.:

$$H = (\beta\cdot B) /(\alpha - B) \tag{2.92}$$

$$H = b\cdot B^n \tag{2.93}$$

$$H = (1/\beta)\cdot \mathrm{tg}(B /\alpha) \tag{2.94}$$

$$H = (1/\beta)\cdot \sinh(B /\alpha) \tag{2.95}$$

$$H =\alpha\cdot B+ \beta\cdot B^n \tag{2.96}$$

přičemž parametry α,β,n se volí tak, aby se minimalizoval součet kvadrátů odchylek S mezi aproximovanými hodnotami H_{ai} a změřenými hodnotami H_{zmi}

$$S = \sum_{i=1}^{k} G_i \cdot \left(H_{zmi} - H_{ai}\right)^2 = \text{minimum} \tag{2.97}$$

kde G_i jsou volitelné váhové koeficienty, které umožňují zdůraznit ty části charakteristik, které jsou pro řešení dané úlohy obzvlášť významné. Např. pro tansformátorové a dynamové plechy je vhodná aproximační funkce (2.96), přičemž optimální *n* leží mezi 9 a 9,6. V případě *n* = 9 můžeme optimalizační úlohu

$$S = \sum_{i=1}^{k} G_i \cdot \left(H_{zmi} - \left\{\alpha \cdot B_i + \beta \cdot B_i^9\right\}\right)^2 = \text{min} \tag{2.98}$$

řešit exaktně. Položíme-li derivace (2.98) podle parametrů *a* a *b* rovny nule, dostaneme optimální hodnoty těchto parametrů. Hysterézní smyčku lze nahradit i polynomem 5. stupně. Vzestupnou větev zapíšeme ve tvaru

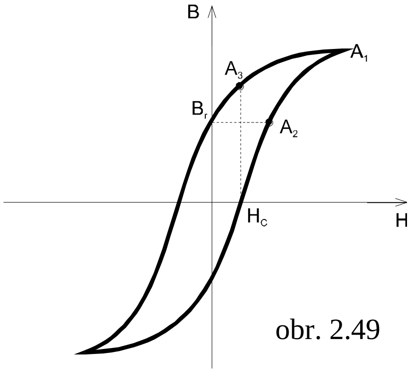
$$y = P_1(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k \cdot x^k \cdot (-1)^{k+1} \qquad (2.99)$$

kde směr osy *x* ztotožníme s osou *B*, směr osy *y* s osou *H*. Pro sestupnou větev musí vzhledem ke středové symetrii platit

$$y = P_2(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k \cdot x^k \cdot (-1)^{k+1} \qquad (2.100)$$

Hysterézní ztráty jsou potom určeny vztahem

$$w = 2 \cdot \left(\int_{-Br}^{Bs} P_1(x) \cdot dx - \int_{-Br}^{Bs} P_2(x) \cdot dx \right) \qquad (2.101)$$



obr. 2.49

Zbývá určit 6 koeficientů a_k, určujících polynomy P_1,P_2. Ty mohou být určeny dosazením souřadnic 6 bodů, ležících na hysterézní smyčce. Na vzestupné větvi to budou body [B_s, H_s], [B_r, H_r], [0, H_c], [-B_r, 0], [-B_c, -H_c], [-B_s, -H_s]. Jak je patrno z obr.2.49, dají se všechny tyto souřadnice určit ze souřadnic bodů A_1,A_2,A_3, samozřejmě s uvážením symetrie. Dosazením souřadnic uvedených 6 bodů do vztahu (2.100) dostáváme 6 lineárních rovnic pro neznámé koeficienty a_k.

Nejpřirozenější způsob aproximace je pomocí mocninných řad. Jejich nedostatkem je, že nevystihují saturační efekt v silných polích. Tento nedostatek se dá obejít tím, že mocninná řada se zkrátí na polynom a nahradí se celistvou racionální funkcí, jejíž stupeň čitatele se rovná stupni jmenovatele. V případě druhého stupně se dostane tzv. zdvojená Frohlichova rovnice pro magnetizaci *M*

$$M = \frac{a_0 + a_1 \cdot H + a_2 \cdot H^2}{1 + b_1 \cdot H + b_2 \cdot H^2} \qquad (2.102)$$

která se stále častěji využívá na popis magnetizačních charakteristik, stejně jako i hysterézních smyček.

Identifikace zdvojené Frohlichovy rovnice vyžaduje poměrně rozsáhlý soubor naměřených údajů, což je však vyváženo relativně dobrou přesností [10]. Hodí se na řešení stacionárních polí, principiálně nejsou překážky k rozšíření použití i na časově proměnná pole a na časově proměnné dynamické hysterézní smyčky.

Dále lze provést náhradu pomocí Fourierovy řady. Na hysterézní smyčku je možno nahlížet jako na uzavřenou čáru v komplexní rovině, symetrickou k bodu [0,0], která je v případě periodického ustáleného přemagnetování opatřená symetrickou funkcionální stupnicí. Vyneseme-li na reálnou osu $\mu_o \cdot H(t)$ a na imaginární osu *B(t)*, potom je komplexní funkce

$$\hat{U}(t) = \mu_0 \cdot H(t) + jB(t) \qquad (2.103)$$

geometricky reprezentována rovinným vektorem, jehož koncový bod se pohybuje po hysterézní smyčce, přičemž platí:

$$\mu_0 \cdot H(t) = R_e\{\hat{U}(t)\} = U(t) \cdot \cos\varphi \qquad (2.104)$$

$$B(t) = \mathrm{Im}\{\hat{U}(t)\} = U(t) \cdot \sin\varphi \qquad (2.105)$$

kde $U(t) = \left[\mu_0^2 \cdot H^2(t) + B^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \varphi(t) = arctg\left[B(t) / \mu_0 \cdot H(t)\right]$

Jako každou periodickou funkci, lze i *U(t)* rozvinout do Fourierovy řady. Z praktického hlediska se místo nekonečné řady bere polynóm 2N - tého stupně

$$U(t) \cong \sum_{-N}^{N} U_n \cdot \exp(j \cdot n \cdot \omega \cdot t) \qquad n = 1,3,5...... \qquad (2.106)$$

přičemž jeho komplexní koeficienty najdeme pomocí časově ekvidistantních bodů na hysterézní smyčce $v_U = U \cdot (t_v)$, $t_v = v \cdot T$ / 2N, získaných vzorkováním při zvolené periodické změně *H(t)* nebo *B(t)*

$$U_n \cong \frac{1}{2N} \cdot \sum_{v=1}^{2N} v_U \cdot \exp\left(\frac{-j \cdot n \cdot v \cdot T}{2N} \right) \qquad (2.107)$$

Čím vyšší je stupeň polynomu 2N, tím přesněji je hysterézní smyčka vykreslena. Máme-li analyticky popsat křivku prvotní magnetizace, doplníme ji klesající větví hysterézní smyčky a uzavřeme symetrickou křivkou prvotní magnetizace. Vztah pro křivku prvotní magnetizace platí potom samozřejmě jen v příslušném intervalu.

Pokud se jedná o přemagnetování při harmonicky se měnícím toku $B(t) = Bm \cdot cos\omega t$ je *H(t)* periodická harmonická funkce, obsahující jen liché harmonické, tedy

$$H(t) = \sum_{-N}^{N} H_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \alpha_n) \qquad n = 1,3,5...... \qquad (2.108)$$

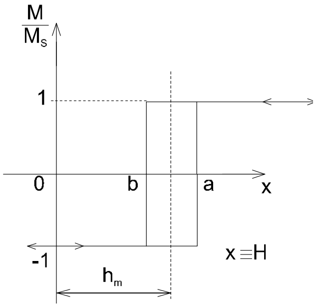
a celkové ztráty při jednom cyklu přemagnetování v objemové jednotce budou

$$P_{w1} = \pi\left(U_1^2 - U_{-1}^2\right) / \mu_0 \qquad (2.109)$$

Analytické vyjádření Fourierovým polynomem je výhodné především v případě, kdy použijeme digitální hysterezigraf a údaje jsou automaticky zadávány do podprogramu harmonické analýzy a přímo se tak získávají hledané koeficienty. Hysterézní smyčku vyjádřenou Fourierovým polynomem lze jednoduše vyjádřit pomocí Čebyševových polynomů, resp. ji přepsat do mocninového polynomu.

Za účelem univerzálnějšího vyjádření magnetizačních charakteristik, které by umožnilo popisovat i minoritní hysterézní smyčky a respektovat i vliv časové změny magnetických veličin byly vyvinuty další modely, např. Hodgdonův model [Hodždonův]. Tento model je založen na diferenciální rovnici:

$$\dot{H} = \alpha \cdot \left|\dot{B}\right| \cdot [f(B) - H] + \dot{B} \cdot g\left(B, \dot{B}\right) \qquad (2.110)$$



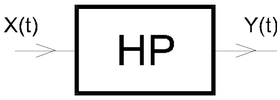
kde jsou tečkami označeny časové derivace, α je kladná konstanta a *f(B)*, $g(B, \dot{B})$ jsou jednoznačné, vhodně definované funkce v celém intervalu reálných hodnot, přičemž funkce g umožňuje respektovat i rychlost časové změny magnetického stavu. Podrobnější rozbor modelu je nad rozsah tohoto kurzu a lze jej nalézt např. v literatuře.

Další, původně fyzikální model, navržený Preisachem se postupně modifikoval na matematický model tzv. Preisachův model, který je v poslední době stále více používaný. Je reprezentovaný souborem elementárních hysterézních převodníků, tzv. hysteronu, jejichž závislost výstupu *M* na vstupu *H* je zobrazená elementární pravoúhlou hysterézní smyčkou s možnými stavy $\pm M_s$ obr.2.50. Na hysterezon lze pohlížet na jakousi kvazi- doménu, která při narůstající hodnotě vstupní veličiny $X \equiv H^+ = a$ přejde ze stavu $-M_s$ do $+M_s$ a při klesajícím poli přejde při $X \equiv H^- = b$ ze stavu $+M_s$ zpět do $-M_s$. Takovéto kvazi doméně potom přísluší lokální koercivita h_c

$$h_c = (a - b)/2 \qquad (2.111)$$

a efektivní hodnota hm vnitřního pole od sousedních domén

$$h_m = (a + b)/2 \qquad (2.112)$$



obr. 2.51

přičemž vždy platí $a \geq b$. Pravděpodobnost výskytu kvazi-domen charakterizovaných dvojicí hodnot *(a,b)* označíme *p(a,b)* a dvojicí (h_c,h_m) zase $P(h_c,h_m)$. U jedno kvazi-doménové částice tedy existují jen dva stavy polarizace $+M_s$ a $-M_s$, přičemž přechází skokem do opačného stavu, jestliže hodnota pole přeroste H_k. Tj. hysterézní smyčka elementární částice - hysteronu je pravoúhlá.

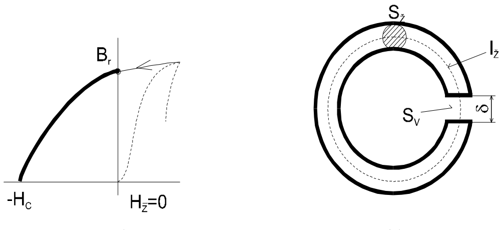
Množina paralelně zapojených hysteronů tvoří hysterézní převodník - obr.2.46, jehož výstup *Y(t)* není jen funkcí okamžité hodnoty vstupu *X(t)*, ale i prehistorie. Popíšeme-li totiž vlastnosti hysteronu operátorem $\gamma_{ab} = +1$, který pro $H > a$ nabývá hodnotu +1, pro $H < b$ hodnotu -1 a pro $b \leq H \leq a$ hodnotu +1 podle prehistorie, tak jsou i v hysterézním převodníku při vstupu *X(t)* všechny hysterony, pro které platí $X > a$ ve stavu $+M_s$, dále ty, pro které platí $X < b$ ve stavu $-M_s$ a konečně ty, pro které je splněno $b \leq X \leq a$ jsou ve stavu $+M_s$ nebo $-M_s$ podle prehistorie. Pokud se částice vyskytuje ve větším souboru částic, posouvá se její hysterézní smyčka z nuly po ose intenzity *H*. Hysterony se chovají jako elementární paměť.

Je třeba říci, že když píšeme jednotlivé veličiny jako funkce času, potom zevšeobecněný Preisachův model je statickým modelem, který nerespektuje rychlost časové změny intenzity pole *H*, resp. magnetizace *M*. Časová závislost jen naznačuje postupnou změnu *H*, ale výstupem je v podstatě sekvence ustálených stavů *M*, které závisí jen na hodnotě *H* a předešlých lokálních extrémních hodnotách H_{ex}, tj. bodech obratu *H*. Tato skutečnost zatím zúžuje rozsah použitelnosti modelu na kvazistacionární, dostatečně pomalu probíhající procesy.

❑ Pole permanentního magnetu

Zatím jsme spojovali vektory *P* v poli elektrickém a *M* v poli magnetickém pouze s vnějším polem (intenzitami). Takto chápané veličiny můžeme nazvat *indukované*. Zmagnetované feromagnetické těleso však může vytvářet magnetické pole i bez vnějšího buzení - těleso je ve stavu permanentní magnetizace. Vně i uvnitř magnetu je opět pole *B* a *H*, ale rozdíl těchto vektorů dává uvnitř feromagnetika jakýsi pevný vektor M_o, který lze označit jako intenzitu magnetizace, která není v žádném vztahu k *H*. Naopak ji lze pokládat za zdroj pole. Jestliže je poli permanentního magnetu superponováno nějaké vnější pole, pak se velikost magnetizace zvětší o indukovanou magnetizaci *M*. V každém vnitřním bodě magnetu je potom

$$B = \mu_o(H + M + M_o) \qquad (2.113)$$



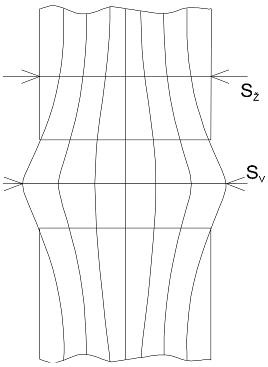
a) b)

obr. 2.52

Tato indukovaná magnetizace je funkcí výsledné intenzity v příslušném bodě. Vztah výsledného pole uvnitř tělesa k intenzitě pole vytvářeného vnějšími zdroji nezávisí jen na magnetizaci M_o, ale i na tvaru tělesa.

Zmagnetujeme-li ss proudem prstenec (toroid) z magneticky tvrdého feromagnetického materiálu až po (nebo nad) saturační bod, zůstane po vypnutí proudu v železe ještě nenulová remanentní indukce B_r, ale intenzita pole zde bude nulová $H_ž = 0$ jak vyplývá z tvaru hysterézní smyčky obr.2.52. Abychom tento prstenec mohli prakticky využít jako permanentní magnet, musíme jej pochopitelně přerušit vzduchovou mezerou - obr.2.52b. Materiál se demagnetuje a indukce B_r klesne na nižší hodnotu indukce v železe $B_ž$. Intenzita mag. pole v železe současně vzroste na zápornou hodnotu - $H_ž$. Stav je popsán demagnetizační charakteristikou ve II.kvadrantu. Hodnoty $H_ž$ a $B_ž$ závisí u daného obvodu na rozměrech vzduchové mezery, což dokazuje vztah:

$$NI = H_v \cdot \delta + H_ž \cdot l_ž = 0 \qquad (2.114)$$



obr. 2.53

Při větších vzduchových mezerách nekopíruje tok v mezeře objem vzniklý vyříznutím materiálu, ale ve vzduchové mezeře se rozšiřuje obr.2.53. Tuto skutečnost respektujeme tzv rozptylem τ. Pomocí rozptylu je potom vztah mezi tokem v železe a ve vzduchu dán výrazem

$$\Phi_{\check{z}} = \tau\cdot\Phi_v \quad \Rightarrow \quad B_{\check{z}}\cdot S_{\check{z}} = \tau\cdot B_v\cdot S_v \qquad (2.115)$$

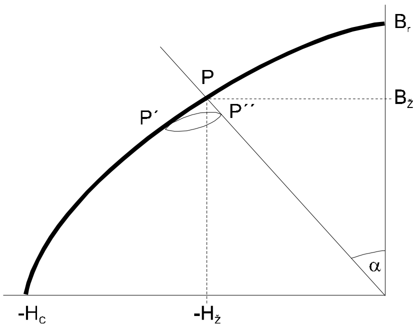
z toho

$$B_{\check{z}} = \frac{\tau\cdot B_v\cdot S_v}{S_{\check{z}}} = \mu_0\cdot\frac{\tau\cdot S_v}{S_{\check{z}}}\cdot H_v = -\mu_0\cdot\frac{\tau\cdot S_v}{S_{\check{z}}}\cdot\frac{l_{\check{z}}}{\delta}\cdot H_{\check{z}} = -D\cdot H_{\check{z}} \qquad (2.116)$$

Mezi $B_{\check{z}}$ a $H_{\check{z}}$ je tedy přímková závislost obr.2.54; směrnice je daná demagnetizačním činitelem *D*.

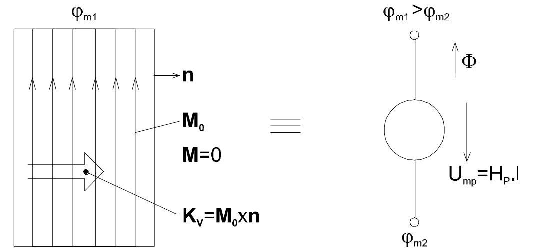
$$D = \tau\cdot\mu_0\frac{S_v}{S_{\check{z}}}\frac{l_{\check{z}}}{\delta} = \mu_0\cdot\tau\frac{S_v/S_{\check{z}}}{\delta/l_{\check{z}}} = \mathrm{cotg}\alpha\frac{m_B}{m_H} \qquad (2.117)$$

D tedy závisí na poměru rozměrů vzduchové mezery a železa.

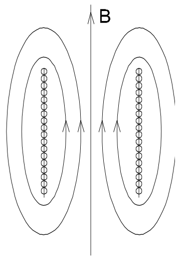


Průsečík přímky $B_{\check{z}} = -D\cdot H_{\check{z}}$ s magnetizační charakteristikou je pracovní bod P magnetu (grafické řešení dvou rovnic) obr.2.54. Pokud je možné zanedbat rozptyl tj. τ = 1, je

$$S_{\check{z}} = S_v \quad \text{a} \quad D = \mu_0\cdot l_{\check{z}} / \delta \qquad (2.118)$$

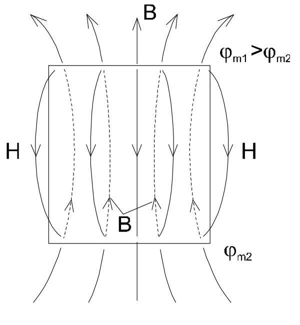


obr. 2.55



obr. 2.56

Permanentní magnet zmagnetovaný konstantní magnetizací ve směru osy vzorku obr.2.55, lze chápat jako zdroj indukce. Zdrojem jsou zde vázané proudy $K_v = M_o$ x *n*, nikoli proudy volné. Protože je M_o = *konstanta* je $J_v = rot\ M_o = 0$ a zdrojem *B* je plošný proud hustoty $K_v = K\cdot u_\alpha = M_o$ x *n*. Tento proud si můžeme představit tak, jako by tekl cívkou, navinutou na povrchu permanentního magnetu. Pomocí BS zákona bychom mohli vypočíst velikost indukce pole vybuzené touto cívkou obr. 2.55. Velikost intenzity pole uvnitř magnetu potom je $H = B/\mu_o - M$, mimo magnet $H = B/\mu_o$. Vzhledem k tomu, že uvnitř magnetu je $M > B/\mu_o$, bude zde mít superponovaná intenzita *H* směr proti *B* obr.2.52. Tato skutečnost odpovídá představě, kdy čelní plochy jsou ekvipotenciálami skalárního magnetického potenciálu a siločáry směřují od ekvipotenciály vyšší k nižší, tedy proti směru grad φ_m, a to uvnitř i vně magnetu.



obr. 2.57

Permanentní magnety se vyrábějí z magneticky tvrdých materiálů, které se dají obtížně opracovávat, mají špatné mechanické vlastnosti a jsou drahé. Proto se vyrábí jen část magnetického obvodu z tvrdého feromagnetika a dále se vytvarují pólové nástavce z železa magneticky měkkého. Rozebíráním jednou sestaveného obvodu se dostáváme do jiného pracovního bodu, v němž jsou magnetické vlastnosti horší. Rozebíráním se obvody s permanentním magnetem znehodnocují.

Z důvodů vyšší ceny mag. tvrdých materiálů se snažíme omezit jejich spotřebu a optimalizovat návrh magnetu tak, aby byla spotřeba materiálů při požadované indukci co nejmenší. Vyšetřujeme závislost objemu železa $V_{\check{z}}$ na $B_{\check{z}}$ a $H_{\check{z}}$.

$$V_ž = l_ž \cdot S_ž = \frac{H_v}{H_ž}\delta\frac{\Phi_ž}{B_ž} = \frac{B_v}{\mu_0}\delta \cdot \tau \cdot B_v \cdot S_v \frac{1}{H_ž \cdot B_ž} = konst \cdot \frac{1}{H_ž \cdot B_ž} \qquad (2.119)$$

Při optimalizaci požadujeme co nejmenší objem $V_ž$, tedy co největší součin $H_ž.B_ž$, tedy

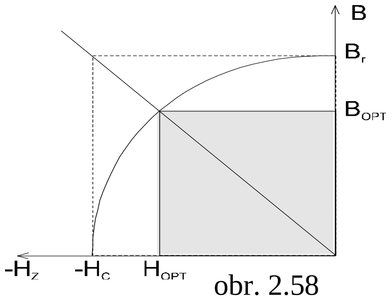
$$\left(H_ž \cdot B_ž\right)_{\max} = H_{opt} \cdot B_{opt} \qquad (2.120)$$

Maximum křivky *(B·H) = f(B)* zjišťujeme graficky obr.2.58. V bodech H_c a B_r vedeme rovnoběžky s osami, jejich průsečíkem a počátkem soustavy vedeme přímku. Kde tato přímka protne demagnetizační křivku je optimální pracovní bod. Příslušné optimální rozměry potom budou z rovnice:

$$l_{opt} \cdot H_{opt} - H_v \cdot \delta = 0 \qquad (2.121)$$

$$l_{opt} = \frac{H_v}{H_{opt}}\delta = \frac{B_v}{\mu_0 \cdot H_{opt}}\delta \qquad (2.121)$$

$$s_{opt} = \frac{\tau \cdot B_v}{B_{opt}} \cdot s_v = \frac{\Phi_ž}{B_{opt}} \qquad (2.122)$$



obr. 2.58

Součin $(B \cdot H)_{max}$ nám tedy udává parametr kvality materiálu. Pochopitelně, že dalším kritériem při výběru materiálu je cena, mechanické vlastnosti, opracovatelnost materiálů, stárnutí apod.

2.5. Lidský organismus v elektromagnetickém poli

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat účinky vedených proudů na lidský organismus
- popsat lidský organismus jako objekt působení elektromagnetických polí
- definovat vliv záření na lidský organismus

Výklad – podstatná část podle lit. Navrátil a kol.: Lasery a pulzní magnety v terapii

Poznatků o vlivu elektromagnetických polí na živý organismus, je dnes již celá řada. Něco jiného je však syntéza jednotlivých poznatků na jednotlivých úrovních do logického řetězce. Zde je stále ještě mnoho mezer překlenutých více nebo méně podloženými hypotézami. Lze říci, že toho o mechanizmu účinku elektromagnetického pole dost víme, ale ještě více nám toho zbývá objasnit a využít pro naši praxi. Podívejme se nejprve na využití interakcí elmag. polí a lidského organismu v historii. Přestože tato pasáž nebude předmětem zkoušení, myslím, že je pro budoucího elektroinženýra přinejmenším zajímavá na přečtení.

❑ Z historie interakce elektromagnetického pole a lidského organismu

Nejstarší písemné zprávy o léčebném využití magnetické rudy pocházejí od Etrusků. Galenos, Říman řeckého původu, žijící ve 2.st.n.l., byl vedle Hippokrata nejvýznamnějším lékařem antiky. Používal magnetitových úlomků ve formě zábalů k vyvolání rychlejší perilstatiky střevní při zácpě. Ve stejné době Egypťané používali magnetitové drti ve formě hustých medových sirupů jako "nápoje nesmrtelnosti". V Číně již ve 4.st.n.l. na počátku dynastie Wej znali léčivé účinky magnetitu a používali jej v různých formách k léčení ran a onemocnění. Peregrinus žijící ve 4.st.n.l. se zmiňuje o léčivých účincích mag. pole a mechanické účinky mag. pole přisuzuje "boží moci" stejně jako Plato.

Paracelsus, přírodovědec a filosof, žijící v 14.st.n.l., největší lékař své doby, napsal knihu "Von heymligkeyten der Natur", ve které si všímá možného využití magnetické rudy k léčebným účelům. Odmítá původ zemského mag. pole v tzv. magnetické hoře a umísťuje jej do mezihvězdného prostoru. Magnetoterapii využíval i ve své praxi, kdy například podával u hysterických žen destičky z magnetitu pod a nad dělohu. Rovněž využíval drti z magnetické rudy k léčení špatně se hojících ran a bolestivých afekcí.

Největší zájem o magnetoterapii v 19.st. vyvolal Mesmer, Vídeňák, který společně s Nellim používali permanentního mag.pole k léčení celé řady zdravotních potíží. Více však ve vědomí lidí uvázl Mesmerův "živočišný magnetismus" a jeho "léčebné přenášení" z léčitele na léčeného přikládáním rukou nebo třením. Tento proces byl podstatou mesmerismu. Po odchodu autora z Rakouska do Francie byla tato metoda postupně zapomenuta. Hluboké kořeny mesmerismu můžeme vidět i dnes u některých léčitelů, kteří používají Mesmerova "animálního magnetismu" formou přikládání rukou na pacienta. Terminologii léčitelů je z hlediska Teorie elektromagnetického pole třeba podrobit tvrdé kritice, protože využívá řadu pojmů elektromagnetismu na základě jen vnější podobnosti elektromagnetických jevů s jejich často subjektivními pocity (např. pojem animální magnetismus nebo časté konstatování, že člověk vyzařuje psychickou energii na vlnové délce tolik a tolik Angsrémů apod.). Je to zřejmě způsobeno tím, že obory léčitelství, včetně jejich terminologie, se zatím rozvíjejí a přejímají termíny z jiných vědních oborů v jiném, přeneseném významu.

Druhá polovina 19. a první polovina 20.st. přinesla podstatný rozvoj elektrofyziologie a tím i hlubší poznání vlivů a zákonitostí interakcí elektrických a magnetických polí se živým organismem. D'Arsonval popisuje jako první vznik fosfénů (subjektivně vnímaných záblesků v oku) po aplikaci elektrického i mag. pole na oblast hlavy. Smith v roce 1869 podává v Berlíně přihlášku patentu č.36044 na léčebné využití pulzního mag. pole. Herman se zabýval účinky relativně silných mag. polí na některé fyziologické děje (šlachové reflexy, změny krevního tlaku a dechovou frekvenci). Charcot se zabýval vlivem permanentního mag. pole na psychiku a zjistil hypnogenní účinky u zdravých i neurotiků. Fukuda v padesátých létech upozorňuje jako první na piezoelektrické jevy vznikající při aplikaci elmag polí v kostní tkáni a jeho závěry vedou posléze Bassetta a Krauseho k dalším experimentům na zvířatech a posléze k využití pulzního mag. pole při léčbě špatně se hojících zlomenin.

U nás se v 50-tých létech zabýval využitím pulzního pole Novák při terapii některých typů kožních nemocí. Také Hokynář a spol. používali mag. pole při ošetřování některých kožních onemocnění včetně bércových vředů. Grüner je našim průkopníkem magnetoterapie v poválečné době. Problému se u nás věnuje i řada nelékařů.

❑ Východiska studia působení elektromagnetického pole na lidský organismus

Při studiu účinků elektromag. pole záleží na indukci mag. pole, tvaru pole, kmitočtu, individuální citlivosti objektu a na řadě dalších faktorů. Vzhledem k tomu, že se jedinec po celý život setkává s nejrůznějšími mag. poli, je třeba uvažovat o určité adaptibilitě vytvářené během celého vývoje viz následující tabulka vybraných zdrojů mag. pole.

zdroj magnetického pole	kmitočet(Hz)	magnetická indukce	
		Průměr (mT)	Maximum (mT)
Magnetické pole Země	0	0,04	--------
Běžná pracoviště a domácí prostředí	50	1,01	1 - 40
Atomové elektrárny a pokusné reaktory	0	5 – 10	100
Výzkumná pracoviště – bublinové komory	0		5 – 500
- lineární urychlovače	0	0,1 - 2	5
- supravodivé spektrometry	0		500
Průmyslové pracoviště – výroba Al	0	1 – 7	60
- elektrolýza	0,5	1 – 10	50
- svářecí soupravy	0,5		130
- indukční ohřev	$5 – 10^4$	1 – 6	25
Pulzní magnetoterapie	1 - 100	20	70
Vlaky na mag. polštářcích – úroveň hlavy	0	6	
- dveře vagonu	0	20 - 60	
Nukleární mag. rez. Diagnostická			
- u operátora	0	1 – 5	
- v okolí nemocného	0	2000	
Elektroterapie	12 - 75	1 – 16	
Vysílací antény pro dlouhé vlny			
- 100 – 1000 m od věže	$10 - 3{\cdot}10^{-3}$	$0{,}1 - 3{\cdot}10^{-3}$	
- u paty věže	$10 - 3{\cdot}10^{-3}$	$3 - 18{\cdot}10^{-3}$	

V této kapitole se vyskytuje řada pojmů z oblasti biologie, které by možná bylo potřeba připomenout. Alespoň ve zkratce se tedy budu chvíli těmito pojmy zabývat.

Tělo všech živých bytostí se skládá z buněk. **Buňky** jsou nejmenší stavební kameny našeho těla, které ještě samy o sobě mohou žít. Jsou tak malé, že je lze pozorovat pouze pod mikroskopem. Každá buňka se skládá z buněčného těla, buněčného jádra a z buněčné membrány (blány). Jen málo buněk nemá jádro, např. zralé červené krvinky.

Buněčné tělo: skládá se z živé hmoty, kterou nazýváme *protoplasma*. Hlavní součástí živé hmoty je voda (tři čtvrtiny), zbytek tvoří převážně bílkoviny a dále tuky, látky tukům blízké, uhlovodany a soli. Pozorujeme-li buňku elektronovým mikroskopem, můžeme v ní rozeznat řadu jemných útvarů. Částečně jsou to rezervní látky nebo částečky, které buňka pohltila. Řada z nich má osobitou stavbu a zvláštní chemické složení.

Buněčné jádro: je nadřazeným centrem, které (podle plánu obsaženého v jaderném materiálu) v buňce řídí přeměnu látkovou. Tento „předpis“ je součástí dědičných vloh a je při dělení jádra dále předáván jádrům dceřiným. Když se buňka dělí, zaniká jádro a objeví se propletená klubíčka jaderných nitek: *chromozómy.*

Buňky v lidském těle jsou specializované. Některé se mohou smršťovat a zase ochabovat – buňky svalové. Jiné mohou přijímat složky potravy, vstřebávat ji (resorbují) apod. Buňky vytvářejí tkáně:

1. K*rycí tkáň.* Tvoří ji úzké svazky buněk. Slouží k ochraně těla (např. krycí tkáň kůže) nebo může přijímat živiny, vstřebává je (např. výstelková tkáň střeva).
2. *Žlázová tkáň.* Je to zvláštní podoba výstelkové tkáně. Žlázové buňky jsou buňkami tkáně výstelkové, které dovedou vylučovat výměšky prospěšné pro tělo (sekrety) (žlázy z vnitřní nebo vnější sekrecí – např. štítná žláza).
3. *Vazivová a tuková tkáň.* Vazivová tkáň (vazivo) tvoří jakousi kostru mnoha orgánů, vytváří šlachy atd. Jestliže se v buňkách vaziva uskladňují kapičky tuku, vznikají z nich *buňky tukové*.
4. *Podpůrná tkáň* se skládá ze *tkáně chrupavčité a kostní*, které jsou oporou těla.
5. *Svalová tkáň* se dovede aktivně zkracovat (smršťovat), a tím zajišťuje pohyby těla.
6. *Nervová tkáň.* Nervové buňky a jejich výběžky mají schopnost vést vzruch, například od některého smyslového orgánu k mozku nebo od mozku ke svalu.

Podívejme se na základní poznatky o působení elektromagnetického pole na tyto základní stavební prvky lidského organismu.

A. Subbuněčné struktury

Magnetické pole působí na živou hmotu třemi způsoby a tak uvádí do chodu spoušťový mechanizmus, který dále rozvíjí biologické reakce na všech úrovních.

1. Elektronové interakce - tento efekt je realizován na atomární a subatomární úrovni, včetně reakce mag.pole na úrovni elektronů. Dochází k přenosu elektronů mezi jednotlivými molekulami a tento děj vede k urychlení nebo zpomalení některých chemických reakcí. V rámci těchto interakcí může docházet ke změně spinu elektronů, ale zřejmě jen v případě použití výrazně silných mag.polí.
2. Elektromechanický efekt - způsobuje změny orientace některých makromolekul, hlavně kyseliny ribonukleové a desoxyribonukleové, bipolárních molekul vody, změny aktivity některých enzymů a konečně dochází ke změnám propustnosti buněčných membrán.
3. Magnetoelektrický efekt - je založen na indukci vířivých proudů a elektrických potenciálů na mikroanatomických ale i větších strukturách živého organizmu. Velikost těchto potenciálů lze vyjádřit jako: $I = p \cdot r \cdot f \cdot \gamma \cdot B$

kde I je intenzita proudu indukovaného v organizmu, r poloměr induktivní tkáňové smyčky, f kmitočet mag.pole, γ vodivost tkáně a B je magnetická indukce.

Znamená to, že se bude v buňce při stálé magnetické indukci a kmitočtu indukovat tím větší elektrický potenciál, čím bude buňka větší, respektive delší (případ nervových a svalových buněk). Odhadovaná elektrická pole v iontových kanálech buněčné membrány se pohybují kolem 10 nV/m. Indukované elektrické potenciály vyvolávají změny šíření vzruchů v nervových vláknech, změnu intenzity látkové výměny buněk a změny v činnosti nervových buněk centrálního nervového systému. Závislost mezi magnetickou indukcí, indukovanými elektrickými proudy a odpovídající biologickou odezvou organizmu je uvedena v následující tabulce. Je v ní srovnání magnetické indukce, indukovaných proudů a biologické odpovědi pro střídavé a pulzní mag. pole o kmitočtu 3 až 300Hz.

Magnetická indukce (mT)		Indukovaný proud (mA/m)	Biologická odpověď
na hlavu	na trup		
250	60	1000	možné extrasystoly a ventikulární fibrilace, značné zdravotní nebezpečí
25 – 250	6 - 60	100 - 1000	změny v dráždivosti centrál. nerv. syst., možné zdravotní poškození

2,5 – 25	0,6 – 60	10 – 100	výrazný terapeutický efekt, objevení se na magnetosfémů, příznivý vliv na nerv. systém, snadnější hojení ran a zlomenin
0,25 – 2,5	0,06 – 0,6	1 – 10	minimální biolog. Efekt
0,25	0,06	1	Žádný efekt

B. Buňka

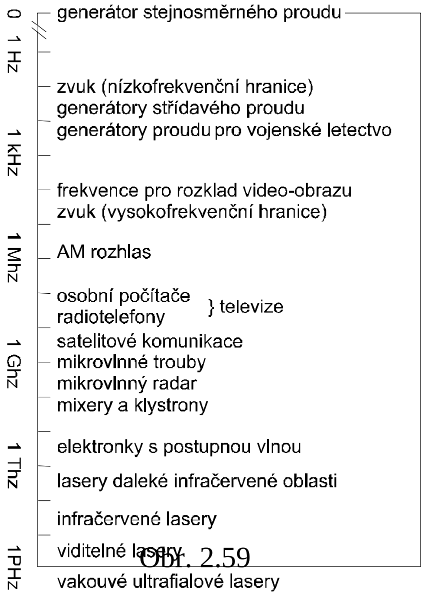
Na základě předchozích jevů dochází postupně k projevům v celé buňce. Je nutno předeslat, že se na kvalitě změn podílí hlavně velikost magnetické indukce a expoziční doba. Při terapeutickém používání slabých proměnných nebo stálých mag. polí dochází v buňkách pouze k diskretním změnám, ve všech případech reverzibilních. Při použití silných mag.polí působících po delší dobu, může dojít k hrubým a ireverzibilním změnám poškozujícím buňku.

C. Tkáně a orgány

V ozářených tkáních dochází k výraznému zvýšení spotřeby kyslíku, která je kompenzována zvýšenou nabídkou krve do těchto oblastí. V ozářené oblasti stoupá i tkáňová teplota o 0,5 až 1,0 °C. Dochází ke spazmolýze hladkého a do určité míry i příčně pruhovaného svalstva, jako důsledek změněné permeability membrán svalových buněk a to hlavně pro ionty kalcia. Opakovaně byla prokázána změna ve funkci nadledvinek, kdy při hyperfunkci docházelo po ozáření pulzním mag.polem k útlumu a při hypofunkci ke stimulaci nadledvinek. Byla pozorováno u citlivých jedinců zvýšené pocení, hypotenze, a zvýšení sekrece žaludečních šťáv. Tyto změny jsou pouze krátkodobé a rychle se upravují. Je známo, že pulzní mag.pole v opakovaných dávkách vyvolává aktivaci imunitního systému. Dochází k normalizaci bílkovinného spektra krevní plazmy.

Reakce mozkové tkáně na aplikované mag.pole se velmi rychle projevila charakteristickými změnami na EEG. Při opakovaném ozařování hlavy a krku, dochází ke zvýšení funkce štítné žlázy na histologicky prokázaném podkladu. Opakovaně byl dokumentován hojivý efekt pulzních mag.polí na otevřené povrchní rány a urychlené hojení čerstvých zlomenin a kloubů.

❑ Podstata elektromagnetických polí extrémně nízkých frekvencí



Obr. 2.59

Maxwellovy rovnice popisují časové a prostorové závislosti průběhu elektromagnetických polí a dávají velmi dobrý souhlas s pozorovanými klasickými jevy v ohromném rozsahu frekvencí - od nulových (ss pole) až po optické. Pro atomové rozměry a pro frekvence srovnatelné s frekvencemi atomových a molekulárních přechodů je nutné kombinovat Maxwellovy rovnice s kvantovou teorií. Avšak popis efektů s poli extrémně nízkých frekvencí v oblastech s rozměry 1mm nebo většími, což odpovídá charakteristickým rozměrům v biologii buněk je klasický tvar Maxwellových rovnic naprosto spolehlivý.

Řešení Maxwellových rovnic může být velmi složité, je- li vlnová délka příslušných elektromagnetických vln srovnatelná s rozměry objektu. Avšak v oblasti velmi nízkých frekvencí je situace nepoměrně jednodušší. Podle mezinárodní úmluvy se jako extrémně nízké (ELF) označují frekvence od 30Hz do 300 Hz - pásmo zahrnuje tedy základní frekvenci a druhou i třetí harmonickou většiny výkonných zdrojů střídavého proudu - obr.2.59. Vlnová délka patřící poli s frekvencí 50 Hz je ve vakuu rovná 6000 km. Většinu problémů z této oblasti je proto možné řešit tak, že se najde odpovídající statické řešení, u kterého elektrické a magnetické pole vystupují odděleně. Úplné řešení pro časově proměnné pole s extrémně nízkou frekvencí se pak získá tak, že vypočtená statická pole se násobí sinusovou časovou změnou. Hlavní obtíží při řešení problémů souvisejících např. se sporem vyvolávání rakoviny je určení vlastností a geometrie elektrických obvodů, proudů a napětí, aby bylo možné vypočítat elektrické a magnetické pole. Nicméně je možné snadno vypočítat pole pro reprezentativní podmínky.

Přes časté diskuse v populárním tisku o "vyzařování" z drátů vysokého napětí nevychází ve skutečnosti z takových zařízení žádné záření, které by stálo za zmínku. Poyntingův vektor **N** = **E** x **H** má směr podél drátů, kterými elektrický proud protéká. Pole, kterému je člověk v blízkosti vedení vystaven, je pole blízké zóny, nikoli pole záření. Dále je podstatné, že vazebná energie biologicky významných molekul musí být větší než $k{\cdot}T$ pro teplotu těla - jak vyplývá z Bohrova vztahu, každá jednofotónová disociace by vyžadovala frekvence pole vyšší než 6 terahertzů. Frekvence střídavého proudu ve vedeních přenášejících velké výkony je nejméně desetimiliardkrát menší než frekvence potřebná k jednofotonové disociaci nebo ionizaci takových molekul.

❑ Současné městské zdroje

V tabulce jsou efektivní magnetická a elektrická pole měřená v typických a nejnepříznivějších případech městského prostředí. Všechna pole jsou měřena v úrovni postavy. V prvním sloupci tabulky jsou uváděny střední hodnoty, ve druhém sloupci hodnoty špičkové.

Zdroj	Magnetické pole (μT)		Elektrické pole (V/m)	
	typicky	max.	typicky	max.
Vn vedení	2 – 2,5	9	1000	7000
El. troleje 13 kV– 60 Hz, 11 kV – 25 Hz	3,5	30	350	700
Transformátorová stanice	1,5 – 2,5			
Primární rozvodná síť 12 kV	0,1 – 0,3	2	5 – 40	60
Sekundár. rozvod. síť 240/120 V	0,5 – 1	10 – 20		
Přívod do domu	0,1	0,4		
Domovní rozvod	0,05 – 0,1	0,5 – 1	1 – 5	10

Magnetická pole závisejí na procházejícím proudu i na geometrii vodičů. Intenzita pole z paralelních vodičů klesá se vzdáleností s funkcí $1/r^2$. Magnetická pole z proudové smyčky a z transformátorů klesá s poměrem $1/r^3$. Uvnitř kovových karosérií dopravních prostředků jsou lidé stínění vzhledem k elektrickému poli, nikoli však vzhledem k poli magnetickému.

Nejsilnější a prostorově nejrozsáhlejší pole extrémně nízkých frekvencí (ELF) se v hustě osídlených oblastech nevyskytují v ulicích, nýbrž v blízkosti tras elektrických vlaků. Vypočítané průběhy polí, vyznačené na obr. 2.59 vycházejí z maximálních používaných výkonů lokomotiv a z typických napětí trolejových vedení a jejich prostorového uspořádání. Špičkové a průměrné hodnoty mag. pole ve vlacích jsou rovněž v tabulce. Nejvyšší magnetická pole zjištěná v městském prostředí měla svůj původ v bytových zařízeních obr. 2.60. Tato pole však jsou často vytvářená proudovými smyčkami s malým průměrem a rychle slábnou se vzdáleností od příslušného elektrického zařízení. Většina lidí se v blízkosti polí s vyššími intenzitami dlouho nezdržuje.

Svisle orientovaný vodič s ostrým hrotem, postavený na vodorovné podložce spojené se zemí podstatně zvýší lokální elektrické pole ve srovnání s původním polem nad podložkou, Protože člověk vede elektřinu mnohem lépe než okolní vzduch, může elektrické pole v úrovni jeho hlavy být značně vyšší než v okolí. Z teoretického rozboru a z měření je známo, že skutečná pole mohou mít u dobře uzemněné osoby v úrovni hlavy zhruba dvacetinásobnou intenzitu ve srovnání s neporušeným polem. Maximální hodnota elektrického pole pod elektrickým vedením může tak stoupnout z 60 V/m až na

1200 V/m. Nejvyšší špičkové hodnoty elektrického pole v úrovni hlavy, s kterými se lze setkat jsou dva metry nad kolejemi elektrických vlaků a dosahují zhruba 600 V/m. Nejhorší případ by tedy nastal u osoby stojící bosýma nohama na mokrých kolejích elektrifikované tratě; intenzita el. pole v úrovni hlavy by mohla v tomto případě dosáhnout přibližně 12000 V/m. (Ovšem daleko větší nebezpečí než od elektrického pole hrozí v takové situaci od přijíždějícího vlaku).

❑ Projevy ELF v těle

Magnetická pole

Protože permeabilita živé tkáně se prakticky neliší od permeability vákua, procházejí magnetická pole tělem bez překážky. Avšak bezprostřední interakce s magnetickým polem by mohla být významná jen tehdy, kdyby v těle existovaly trvalé magnetické domény dostatečně velké k tomu, aby poskytly interakční energii, která je velká ve srovnání s $k \cdot T$. Ale dokonce i v tomto případě by interakce byla významná především u ss polí. Viskózní tlumení v kapalné složce plazmové tkáně omezuje při rozměrech charakteristických pro buňku podstatně energii vazby pole oscilujícího s frekvencí 50 Hz s takovým magnetickým dipólem.

Domény z magnetitu s permanentním magnetickým dipólem byly nalezeny v živých organismech, počínaje bakteriemi až po mořské živočichy a člověka. Je možné, že stáčení těchto magnetických domén vyvolané magnetickým polem Země slouží některým živočichům k navigaci. Jedna magnetická doména je zhruba 50 nm široká a její magnetický moment m má kolem $6 \cdot 10^{-17}$ Am^2. Interakční energie jedné izolované domény, např. takové, jaká byla nalezena v lidské nadledvince, s polem rovným pouhé 1 μT vychází $0{,}01 \cdot k \cdot T$. Přímá interakce s magnetickým polem proudu tekoucím dráty vedení přenášejících vysoké výkony by tedy byla překryta tepelnými efekty.

Elektrická pole

Charles Polk si všiml, že poměrné hodnoty vodivosti a permitivity biologických tkání vzhledem ke vzduchu jsou při frekvencích vyskytujících se při přenosu elektrického výkonu takové, že vnější elektrické pole je v místě, kde vstupuje do těla, vždy kolmé k jeho povrchu, a pole uvnitř těla E_{int} je vždy o mnoho řádů menší než vnější pole ve vzduchu E_{vzd}. Tento výsledek vychází z Maxwellových rovnic při započtení okrajových podmínek pro kolmou složku elektrického pole na rozhraní mezi vzduchem a tkání. Položíme-li

$$\gamma_{\mathrm{int}} >> \omega \cdot \varepsilon_{\mathrm{int}} \qquad \omega \cdot \varepsilon_0 >> \gamma_{vzd} \qquad \text{je} \qquad \left|\frac{E_{\mathrm{int}}}{E_{vzd}}\right| \approx \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{\gamma_{vzd}} \approx 0{,}7 \cdot 10^{-8} \qquad (2.124)$$

Kruhová frekvence je ω (pro frekvenci 50 Hz), pro vnitřní vodivost elektrolytu lidské tkáně γ_{int} byla vzata hodnota 0,5 S/m. Řešení odpovídá časovým změnám ustáleného stavu rozložení povrchového náboje mezi vzduchem a tělem při síťové frekvenci. Vodivost a permitivita biologických materiálů se mění jen zanedbatelně v pásmu extrémně nízkých frekvencí (ELF) a předpoklady, z nichž rovnice (2.124) vychází, jsou lépe splněny než na 1 v 1000. Pro náš nejhorší možný případ, tj. pro externí elektrické pole s intenzitou 12000 V/m ve výšce hlavy bosého chodce jdoucího v dešti po kolejích, vychází špičková hodnota elektrického pole v elektrolytu těla jen kolem 80 μV/m.

❑ Uplatnění Lorentzovy síly a Faradayova zákona v lidském organismu

Efektivní elektrická pole uvnitř těla vyvolaná magnetickou silou $\boldsymbol{F} = Q \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ působící na pohybující se náboje dávají dobrou představu o velikosti tohoto vlivu. Astronaut pohybující se na oběžné dráze od západu k východu 300 km nad Zemí by naměřil ve svém těle pole rovné zhruba 0,4 V/m, zatímco cestující v tryskovém letadle letícím rychlostí 850 km/h by naměřil pole kolem 0,011 V/m.

Krev proudí aortou při systole rychlostí zhruba 0,6m/s. Magnetické pole s indukcí 1 μT vyvolané střídavým proudem silnoproudého vedení by vytvořilo v proudící krvi elektrická pole s intenzitou kolem 0,6 μV/m. To je možné srovnat s elektrickým polem vznikajícím v aortě působením zemského statického magnetického pole - vychází kolem 27 μV/m, tedy asi 45krát vyšší. V extrémním případu magnet s indukcí 2T používaný v magnetickém rezonančním tomografu vytvoří v krvi proudící aortou elektrické pole kolem 1,2V/m.

Faradayův zákon říká, že v uzavřené vodivé smyčce vzniká při změně magnetického toku elektromotorické napětí. Toto napětí se rovná časové derivaci magnetického toku smyčkou a proud, který ve smyčce působením tohoto napětí vzniká, vytváří nové magnetické pole, které působí proti změně původního pole. Vezmeme-li pro magnetický tok hodnotu $\pi \cdot r^2 \cdot B$, kde $B = Bo \cdot sin\ 2\pi ft$, vidíme, že pole kolem kruhové smyčky s poloměrem r metrů je dáno výrazem

$$\boldsymbol{E}_{\text{int}} = -0{,}5 \cdot \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{dB}}{\boldsymbol{dt}} = -\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B}_0 \cdot \cos 2\boldsymbol{\pi f} \cdot \boldsymbol{t} \qquad [\boldsymbol{V} / \boldsymbol{m}] \qquad (2.125)$$

kde f je frekvence v Hz, t je čas v sekundách a B_o je špičková hodnota magnetické indukce v T. Například homogenní pole s efektivní hodnotou magnetické indukce 1 μT a frekvencí 60 Hz vytvoří v kruhové smyčce s poloměrem 10 cm elektrické pole s efektivní hodnotou E_{int} = 19 V/m. Při vodivosti rovné 0,5 S/m vychází pro efektivní hustotu proudu v této smyčce v těle $J = \gamma \cdot E$ hodnota rovná přibližně 9,5 A/m^2. Velikost proudu závisí silně na velikosti smyčky, ale co do významu je tento vliv srovnatelný s přímým působením vnějších elektrických polí.

Jak bylo řečeno v úvodu, řada klinických studií popisuje příznivé výsledky založené na Faradayově jevu při aplikaci časově proměnných magnetických polí k urychlení srůstání zlomenin. Léčebné účinky se podle těchto publikací dostavují při intenzitách indukovaného elektrického pole 0,1-1 V/m při základní opakovací frekvenci kolem 15 Hz aplikované po 12 hodin denně. Časový průběh nejčastěji používaných magnetických polí má tvar periodicky se opakujících sledů pulsů, se špičkovými hodnotami pole kolem 2 mT. Protože indukovaná elektrická pole jsou úměrná dB/dt, musí tato pole obsahovat silné složky rozdělené do celého akustického spektra, a nepatří tedy k polím s extrémně nízkými frekvencemi. Např**.** pole se špičkovou hodnotou 2 μT s průběhem vyznačeným na obr. D7 vyvolá výsledné efektivní elektrické pole s intenzitou 17 V/m v celém intervalu frekvencí od 15 do 20 kHz, je-li aplikováno na kruhovou plochu kosti s průměrem 2 cm. Toto pole je zhruba o šest řádů větší, než jsou pole pod elektrickými vedeními, a je dokonce větší než tepelný šum, probíraný dále.

❑ Působení na buněčnou membránu

Herman Schwan uvádí, že vnitřní elektrické pole (2.125) je zesílené, působí-li na buněčnou membránu. Uvažujeme kulovou buňku s poloměrem r rovným 10 μm a tloušťku membrány vezměme rovnou 5 nm. Protože typické hodnoty elektrické vodivosti membrány leží v rozmezí od 10^{-5} do $^{10-7}$ S/m, je možné membránu pokládat ve srovnání s tekutinou tkáně za izolátor. Řešení Laplaceovy rovnice pro tento limitní případ ukazuje, že pole v membráně bude mít hodnotu zhruba

$$E_{men} \approx 1{,}5 \cdot E_{\text{int}} \frac{r}{\delta} \approx 3000 \cdot E_{\text{int}} \qquad (2.126)$$

V tomto vzorci je zanedbána úhlová závislost pole. Při přímém působení elektrických polí extrémně nízkých frekvencí leží celý spád napětí procházející buňkou na membráně, a membrána stíní vnitřek buňky před působícím polem.

Pro náš nejhorší mezní případ s E_{int} = 80 μV/m (pro bosého poutníka, který jde po kolejích pod dráty elektrifikované trati) vychází tedy pole E_{mem} uvnitř buněčné membrány zhruba 0,24 V/m. Pro srovnání: elektrická pole E_{int} s intenzitou zhruba 19 μV/m indukovaná Faradayovým efektem magnetickým polem 1 μT (to je intenzita pole pod dráty silnoproudého vedení) ve smyčce v tkáni s průměrem 20 cm by vytvořila na buněčné membráně elektrické pole E_{mem} o intenzitě kolem 0,057 V/m. Nejsilnější magnetická pole, kolem 65 μT s frekvencí 25 Hz by indukovala pole E_{int} = 515 μV/m a E_{mem} = 1,5 V/m. Podobné hodnoty magnetického pole se naměřily i na trati, kde se používá frekvence 60 Hz. Nezáleží příliš na tom, který z těchto konkrétních případů se použije; maximální hodnoty polí indukovaných na membránách budou řádově rovné 1 V/m i v nejméně příznivých uvažovaných případech.

Naproti tomu mají pole na nevodivých buněčných membránách vznikající přirozenými procesy v těle intenzity 10^7 V/m. Spád napětí na Purkyňových buňkách ve vláknech srdečního svalu je zhruba 0,09 V a typický pokles potenciálu na membránách nervových buněk je 0,95 V. Pro membránu tlustou 5 mm jsou přirozeně se vyskytující elektrická pole *E* přibližně rovná 10^7 V/m - tedy o šest až sedm řádů větší než v našich krajních, nejméně příznivých případech.

❑ Pole v tkáni vyvolané teplem

Existují přirozené zdroje elektrického šumu, které jsou neodstranitelné, a nejdůležitější z nich je dobře známý tepelný šum, který objevil experimentálně J. B. Johnson v Bellových laboratořích. Tento šum vzniká na rezistoru v důsledku brownovského pohybu elektronů a iontů. Kvantitativní teorii tepelného šumu formuloval jako první Harry Nyquist, když ukázal, že střední kvadratická hodnota napětí na rezistoru *R* je v intervalu frekvencí s šířkou *Δf* určena vztahem

$$\left(\boldsymbol{v}^2\right) = 4 \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \Delta \boldsymbol{f} \qquad (2.127)$$

Tento výsledek je naprosto obecný a byl experimentálně potvrzen pro frekvence počínaje téměř od nuly až po oblast centimetrových a milimetrových vln.

Robert Adair použil Nyquistův vztah k odhadu neodstranitelných polí v buňce vznikajících v důsledku tepelného šumu. Uvažujeme-li rezistor jako krychli tkáně délky *d*, umístěnou mezi dvěma deskami kapacitoru, pak je *R = pld* a elektrické pole tepelného šumu

$$\boldsymbol{E}_{kT} = \frac{\boldsymbol{v}_{rms}}{\boldsymbol{d}} = \left(\frac{2}{\boldsymbol{d}}\right) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \Delta \boldsymbol{f}}{\boldsymbol{d}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}020 \quad \boldsymbol{V}/\boldsymbol{m} \qquad (2.128)$$

Měrný odpor *ρ = 1/γ* je pro tkáň přibližně 2 Ωm; *d* nabývá pro objem krychle velikosti buňky hodnoty kolem 20 μm; pro energii *k·T* byla za teplotu dosazena teplota těla, a pro šířku frekvenčního pásma hodnota 100 Hz.

Vypočtená intenzita elektrického pole tepelného šumu je přibližně tisicínásobkem vnitřního elektrického pole odhadnutého pro pole způsobené proudem silnoproudého vedení a čtyřicetinásobkem elektrického pole působícího přímo na bosého poutníka kráčejícího po kolejích. K indukování polí v buňkách rovných polím vyvolaným tepelným šumem by bylo potřeba vnější elektrické pole s intenzitou 3 MV/m - to je pole, při kterém se začíná ve vzduchu tvořit koronový výboj. Člověk by v takovém poli doslova svítil.

K výsledku získanému z rovnice (2.128) je nutné přičinit dvě poznámky:

Šířka frekvenčního pásma není přesně známa. Jestliže v buňce existuje proces, který filtruje frekvence obsažené v tepelném šumu tak, že šířka frekvenčního pásma je menší, například 15 Hz, pak by se mohla brát v úvahu jen indukovaná pole uvnitř tohoto frekvenčního pásma; je ovšem třeba si uvědomit, že taková frekvenční filtrace by zeslabovala stejně pole působící z vnějšku jako pole vyvolané tepelným šumem.

Ačkoliv pole vyvolané tepelným šumem klesá s druhou odmocninou objemu, je to ve skutečnosti právě pole šumu, které se významně uplatňuje uvnitř objemu buňky. Například šumové pole podle rovnice (2.128) je nutné srovnat s polem indukovaným prostřednictvím Faradayova efektu ve smyčce s obvodem *r* a nikoli v něčem, co je $(2\pi r)^{3/2}$ krát menší. Rozměry i tvary buněk se ovšem mohou poněkud lišit. Zdvojnásobení průměru sníží šum 2,8 násobně, atd. Ačkoliv přímá měření tepelného šumu na buněčné úrovni nebyla publikována, z fundamentálních principů vyplývá jednoznačně, že šumová elektrická pole musí existovat.

Pole v buněčné membráně vyvolaná teplotou

Protože se vyskytly názory, že indukovaná pole extrémně nízkých frekvencí způsobená proudem v drátech elektrických vedení by mohla vyvolávat změny v buňkách tím, že ovlivňují interakce (například výtok iontů vápníku) v buněčných membránách, je důležité odhadnout pole vyvolaná tepelným šumem na buněčné úrovni. Pokládáme-li tvar buňky za kulový, je elektrický odpor buňky dán jednoduchým vztahem $R_{mem} = \rho\delta/4r^2$, kde d je tloušťka membrány, $\rho = 1/\gamma$ je přibližně $10^5 - 10^7$ Ωm, a r je poloměr buňky. Je-li $r = 10$ mm a $\delta = 5$ nm, odpor membrány se pohybuje v rozmezí 0,4 až 40 MΩ. Elektrická pole tepelného šumu při šířce frekvenčního pásma 100 Hz uvnitř membrány pak vychází (s nepřesností, kterou je možné odhadnout faktorem 3)

$$E_{kT} \approx 280 \text{ V/m} \tag{2.129}$$

přičemž největší nepřesnost tohoto výsledku je způsobena tím, že není přesně znám elektrický odpor membrány. V každém případě je však vypočtená hodnota šumového pole zhruba 300krát větší než indukovaná pole odhadnutá pro nejméně příznivý případ působení vnějších magnetických polí.

Velká seskupení buněk

James Weaver a R. Dean Astumian vyslovili názor, že šum na membráně může být výrazně snížen ve velkých buněčných sekupeních propojených navzájem vodivými spoji. Taková seskupení se vyskytují ve velkých orgánech, jako jsou srdce a játra, avšak nejsou v destičkách a v bílých krvinkách. Kdyby byl odpor vodivých spojů R_{jen} nulový, byly by buněčné membrány v seskupení zapojeny v elektrickém obvodu paralelně, a výsledný odpor by klesl na hodnotu R_{mem}/N, kde N je počet buněk. Podle Nyquistova vztahu by pak šum klesl $\sqrt{N}$ krát. (Šířka frekvenčního pásma by se v důsledku vzrůstu kapacity membrán nesnížila, protože výsledná časová konstanta $R{\cdot}C$ by zůstala stejná). Tento závěr však platí jen pro případ, že odpor R_{jen} je skutečně nulový - předpoklad, který sotva opravňuje extrapolovat výsledky na miliony buněk, jak to dělaji Weaver a Astumian.

Velikosti odporu R_{jen} mezi dvojicí buněk zjištěné měřením leží v rozmezí od 0,1 MΩ do nejméně 8 MΩ a v některých případech vycházejí až 8 GΩ. Použijeme-li hodnotu R_{jen} od 0,1 do 8 MΩ spolu s normálními hodnotami odporu membrány R_{mem} od 10 MΩ až do 1 GΩ pro počítačový model seskupení buněk ve tvaru dlouhých řetězů, jsou s rostoucí délkou řetězů rychle dosaženy asymptotické limitní hodnoty pro redukovaný odpor membrán $(R_{jen} \cdot R_{mem})^{1/2}$ a mají velikost od 2 do 10 MΩ.

Protože tato hodnota odpovídá rozmezí odporu membrány použitému při výpočtu šumového elektrického pole podle rovnice (2.129), je zřejmé, že představa o změně vlastností u velkých buněčných seskupení není schopna úspěšně čelit argumentu s tepelným šumem. Je-li v příslušných případech R_{mem} opravdu mnohem větší než R_{jen} , je pravděpodobné, že velikosti odporu membrány (a tudíž i tepelný šum) jsou v rovnici (2.129) spíše podhodnoceny. Podobný závěr platí i pro zvýšený koeficient zesílení (odpovídající faktoru 1,5 r/δ) v rovnici (2.127) získaný Weaverem a Astumianem pro velká seskupení buněk.

❑ Rezonanční jevy

Občas se setkáváme s tvrzeními, že oscilující časově ustálená pole mohou mít větší biologický účinek než stejnosměrná pole nebo než pole, která nepravidelně fluktuují, a to v důsledku nějakého rezonančního procesu, který má rezonanční frekvenci obdivuhodně shodnou s frekvencí elektrického proudu energetické sítě. Takový mechanismus by pochopitelně nemohl být účinný současně ve Spojených státech, kde má energetická síť frekvenci 60 Hz, a v Evropě, kde se používá frekvence 50 Hz. Je principiálně možné dosadit šířku frekvenčního pásma pro Nyquistův vzorek (rovnice (2.128)) tak malou, že tepelný šum vyjde v tomto pásmu zanedbatelný ve srovnání s indukovaným elektrickým polem. Avšak tepelné elektrické pole závisí na odmocnině z šířky frekvenčního pásma; zúžení pásma faktorem 100 sníží šum jen faktorem 10. Zúžení pásma znamená zostření rezonance stejným faktorem. Ačkoli byly popsány změny permitivity a vodivosti tkáně při změně frekvence, jsou tyto změny tak malé, že nemohou vyvolat požadované efekty. K tomu, aby se teplotní šum snížil na úroveň intenzity elektrických polí indukovaných v tkáních ve smyčce s průměrem 20 cm při poli 0,2 μT s frekvencí 60 Hz, bylo by nutné zúžit frekvenční pásmo uvažované v předešlých příkladech zhruba milionkrát - ze 100 Hz na 10^{-4} Hz. Nic, co by mohlo způsobit tak ostré rezonance, nelze pokládat ani vzdáleně za přijatelné.

Z odhadů je zřejmé, že pole tepelného šumu v experimentech s výtokem iontů membránou musí být mnohem větší než jakákoli elektrická pole indukovaná Faradayovým efektem.

❑ Fyziologické účinky elektrického proudu na lidský organismus

Podobně jako na jiné druhy energií, vztahuje se i na elektřinu přísloví „dobrý sluha, ale zlý pán“. Nás budou zajímat především vlivy průchodu elektrického proudu lidským organismem. Zde představuje elektřina specifický druh ohrožení, který člověk není schopen rozpoznat svými smysly. Elektrická zařízení, která jsou pod napětím, se až na výjimku (vn, vvn a zvn zařízení) jeví stejně jako zařízení vypnutá. Elektřina je nebezpečná pro toho, kdo nezná její účinky a kdo nepodřídí manipulaci s ní příslušným fyzikálním zákonům. Účinky elektrického proudu na organismus závisí především na intenzitě proudu procházejícího tělem, na čase působení, frekvenci, případně na tvaru vlny.

Velikost proudu, který prochází tělem závisí na velikosti napětí, na odporu, který kladou protékajícímu proudu zasažené části těla a na přechodovém odporu místa vstupu a místa výstupu proudu. Celkový odpor těla značně závisí na způsobu dotyku, protože přechodový odpor místa vstupu a výstupu je podstatnou části celkového odporu.

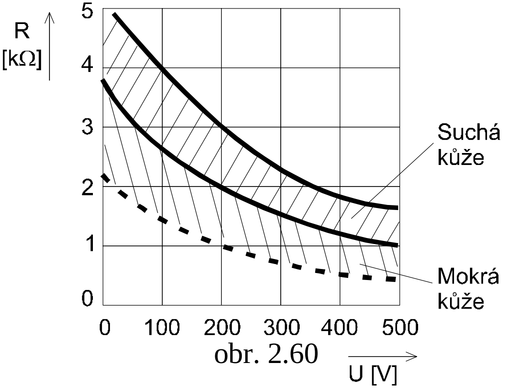
Živočišná těla jsou složena z množství orgánů, které tvoří několik orgánových soustav. Mechanickou oporu jim dává kostra, v jejíž stavbě jsou značným procentem zastoupeny minerální prvky, hlavně vápník, fosfor a v menším množství hořčík, fluór, sodík, draslík a chlór. Na kostru se upíná příčně pruhované svalstvo, které obsahuje asi 73 % až 80 % vody a pouze 1 až 1,5 % neorganických látek. Soustava kostry, vazů a svalstva tvoří dohromady základní tvar těla. Ponechává jen několik větších dutin, v nichž jsou umístěny útrobní orgány.

Povrch těla kryje kůže, pod níž je různě tlustá vrstva tukového vaziva. Tuk je poměrně špatným vodičem elektrického proudu. Kůže se skládá z vrchní rohové a vnitřní šťavnaté vrstvy. Rohová vrstva je velmi špatný vodič elektrického proudu, pokud je suchá. Také kožní maz zvětšuje elektrický odpor rohové vrstvy. Šťavnatá vrstva je mnohem vodivější, jednak proto, že její buňky obsahují více vody a elektrolytů, jednak proto, že mezi buňkami jsou štěrbiny naplněné tkáňovou tekutinou. Buněčné blány této vrstvy jsou málo propustné pro záporně nabité ionty /anionty/. Na povrchu buněk se proto tvoří tzv. elektrické dvojvrstvy se zápornými náboji na vnitřní a kladnými na zevní straně rozhraní. Tyto dvojvrstvy se chovají do jisté míry jako kondenzátory s kapacitou asi 10 až $20 \cdot 10^{-9}$ F. U střídavého proudu nízkého kmitočtu se tato malá kapacita neuplatní, avšak u vysokých kmitočtů podstatně přispívá ke zvětšení vodivosti.

Celkový odpor kůže značně kolísá podle velikosti elektrod (i když ho přepočítáme na jeden centimetr čtvereční), použitého a okamžitého stavu kožního povrchu. Měří-li se stejnosměrným proudem a kovovými elektrodami, uplatní se vliv polarizace a chemických změn na povrchu elektrod, popřípadě usměrňující účinek tenkých vrstev oxidů, takže naměříme podstatně se lišící hodnoty na kladné nebo záporné elektrodě. Pravděpodobně skutečný odpor kůže není větší než 20 000 Ω/cm^2 .

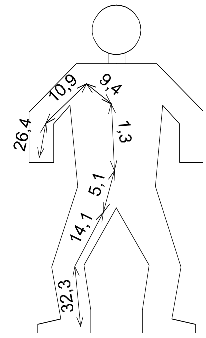
Obecně platí pravidlo, že proud prochází těmi orgány lidského těla, které obsahují nejvíce vody nebo jsou nejvíce prokrveny; proud přitom postupuje hlavně podél svalů a krevních cest.

Celkový odpor lidského těla, na které působí malé napětí, které pokožku nepoškodí, může být značně velký (10^4 až 10^5 Ω) a je přibližně nepřímo úměrný ploše dotyku. Z četných měření uskutečněných v různých zemích vyplývá, že velké rozdíly souvisejí s teplotou pokožky, plochou dotyku, vlhkostí pokožky, tloušťkou pokožky v místě dotyku, s napětím a druhem proudu a s dobou, po kterou proud prochází. Mimo to má na stav kůže vliv momentální tělesný a psychický stav člověka. Všeobecně se odpor zmenšuje se zvyšujícícm se napětím. Odpor lidského těla závisí značně na stavu vegetativní soustavy nervové; je velký ve spánku, menší při bdění.

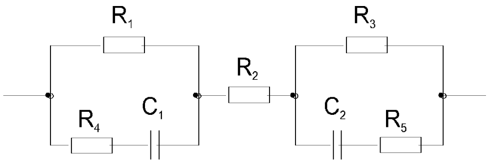


obr. 2.60

Zatímco odpor vnitřního těla (svaly, klouby, krevní cesty) je 500 až 1000 Ω, odpor pokožky v místě dotyku je velmi proměnlivý a závisí od stavu pokožky a plochy dotyku. Tvrdá, hrubá a suchá pokožka má mnohem větší odpor než měkká, tenká a vlhká.



obr. 2.62



obr. 2.61

Průběh odporu těla v souvislosti na dotykovém napětí v obvodu ruka-noha podle Freibergra je na obr. 2.60. S rostoucím napětím odpor těla klesá. Z křivek je zřejmé, že při napětí do 50 V v suchém prostředí a při lehkém dotyku je možno počítat s odporem těla asi 5000 Ω. Za nepříznivých okolností může klesnout odpor těla při tomto napětí zhruba na 2000 Ω. Při napětí nad 50 V se začne vrstva pokožky prorážet a při napětích vyšších než 200 V bývá už tak poškozená, že je třeba za nepříznivých okolností počítat s odporem asi 1000 Ω. Jestliže nastane dokonalý průraz pokožky, přichází v úvahu již jen vnitřní odpor těla, který je u všech osob přibližně stejný. Impedance těla nemá čistě ohmický charakter, ale i určitou kapacitní složku, Impedanci člověka můžeme tedy znázornit náhradním schématem podle obr. 2.61. Jak je vidět z náhradního schématu, je základem ohmický odpor vnitřního těla R_2, který bývá asi 1000 Ω. K němu jsou v místě vstupu sérioparalelně připojeny odpory R_1 a R_4 , v místě výstupu odpory R_3 a R_5 . R_1 a R_3 jsou odpory pokožky, R_4 , R_5 pory tkáně: pokožka - tělo - pokožka. Kapacity C_1 a C_2 modelují stavbu pokožky, přičemž jejich hodnota je 6 až 10 μF / cm^2 .

Odpor vnitřního těla je možno rozdělit na části, jak je vidět z obr.2.62. Model názorňuje jen přibližné rozdělení odporů, protože měření byla prováděna jen proudem několik mA, nehledě na to, že značný význam zde má i rozdílná tělesná stavba každého jedince. Určit hranici absolutně bezpečného proudu na základě odporu člověka není možné univerzálně pro všechny osoby. Velký vliv zde má i zdravotní stav člověka. Předcházející úvahy se vztahují na zdravého, psychicky vyrovnaného jedince.

U stejnosměrného proudu má největší význam elektrolytický účinek. V elektrolytech je přenos elektrických nábojů uskutečněn pomocí iontů. V okolí kladného pólu se hromadí převážně kyselé látky a dochází tu spíše k odvodňování, v blízkosti záporné elektrody se naopak soustřeďují zásadité látky a dochází k bobtnání tkání. Větší elektrochemické změny mohou podráždit i pohybové nervy a způsobí křečovité stažení svalů. Při velkých proudech se zastavuje životní činnost buněk.

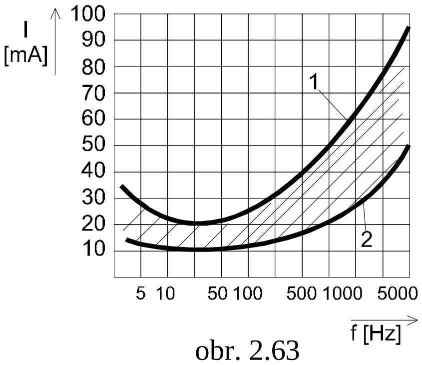
Stejnosměrné proudy do 3 mA nevyvolávají obvykle vůbec žádný pocit. V rozmezí 5 až 10 mA dochází ke svědění a začíná se pociťovat teplo. Při 20 až 25 mA začíná stahování svalů na rukou. Mezí křečovitého proudu je u stejnosměrného proudu asi 60 mA (šestkrát větší proud než u střídavého 50Hz). Při větším proudu dochází k bolestivým křečím ve svalech a prochází-li proud hrudníkem, nastává silný stah dýchacího svalstva. Při proudech 80 až 100 mA je dýchání téměř znemožněno. Při průchodu proudu hlavou dojde k selhání k životu nezbytných mozkových center pro regulaci srdeční činnosti, dechu, periferního krevního oběhu atd. a tím k úmrtí.

Další účinek je tepelný, i když u stejnosměrného proudu ustupuje do pozadí před působením elektrolytickým. Nejvíce se zahřejí části, kde je největší hustota proudu, např. v úzké dolní části bérce nad kotníkem apod. Předpokládáme-li odpor 500 až 1000 Ω, přemění se v teplo při průchodu stejnosměrného proudu 50 mA výkon 1,25 až 2,5 W, což způsobí jen nepatrné zahřátí.

Prochází-li lidským tělem střídavý sinusový proud, uplatní se tyto jeho účinky na nervy a svaly:

- zvyšujeme-li kmitočet proudu, zvětšuje se i rychlost proudové změny a podle Du Boisova-Reymondova pravidla se zvětšuje i dráždivý účinek proudu;
- zvyšujeme-li kmitočet dále, zmenšuje se elektrochemická práce připadající na dobu jedné poloviny kmitu (přemístí se méně iontů) až do té míry, že proud nemůže vyvolat vážné poškození tkáně.

Při nejnovějších výzkumech fyziologických účinků se uplatňuje tento názor. V okolí střídavého sinusového proudu 0,3 mA leží práh vnímání (u 0,5 % osob). Proudy 0,8 až 8 mA vyvolávají podráždění v nervech. Při proudech 6 až 15 mA nastává stahování svalů paže, které může dospět až ke stavu tetanické křeče. V tomto rozmezí proudů leží pro převážnou většinu lidí mezní proud, který ještě umožňuje pustit se a nebo odtrhnout od částí pod napětím. Dalzier nazval tento proud "let go" a z pokusů při kmitočtu 60 Hz zjistil, že pro 99,5 % mužů je menší než 9 mA, u žen 6 mA. Podle Kelnara je při kmitočtu 50 Hz tento proud u mužů 7 mA, u žen 5 mA. Proud "let go" je v podstatě prahový křečový proud.



obr. 2.63

Ženy a děti jsou citlivější než muži. Označíme-li bezpečnost proudu pro muže indexem 100, lze podle Dalziela uvažovat pro ženy index 66, pro děti index 55. Nebezpečné mohou být i sekundární účinky proudu, i když jde o proudy malé, protože zde hraje úlohu moment úleku. Přitom je směrodatný uvedený práh vnímání elektrického proudu.

Střídavý proud je zvláště nebezpečný v rozmezí kmitočtů 40 až 60 Hz. V odborné literatuře se uvádí, že jsou rovněž nebezpečné proudy s kmitočtem 200 až 500 Hz. Zmenšení biologických vlivů se začíná projevovat teprve u proudů s kmitočty nad 100 Hz a k pronikavému zmenšení těchto vlivů dochází při kmitočtech nad 10 000 Hz, kdy riziko fibrilací je malé. Na obr.2.63 jsou křivky snesitelnosti elektrického proudu pro muže, kde křivka 1 je snesitelnost pro 0,5 % mužů, křivka 2 snesitelnost pro 99,5 % mužů. Nebezpečí zcela přestává až u proudů s kmitočty 10 000 až 100 000 Hz. Účinek rázových proudů na živý organismus, např. výboje z kondenzátorů, závisí podobně jako u proudů střídavých na velikosti proudu a době, kterou prochází tělem.

Účinky střídavého proudu bývá ohroženo srdce. Srdce je nejcitlivější na průchod elektrického proudu v poslední fázi systoly (končí vypuzování krve z levé srdeční komory). Je-li v této fázi srdce zasaženo elektrickým proudem, může nastat již zmíněná fibrilace srdečních komor. Fibrilace je srdeční stav, kdy jednotlivé úseky srdečního svalu se rozpínají a smršťují nezávisle na sobě, srdce však jako celek nepracuje, nepumpuje krev do cév, nastává hypoxie (stav, kdy je nedostatek kyslíku v tkáních). Většinou elektrický proud prochází déle než po dobu jednoho srdečního cyklu, musí se tedy vždy setkat s citlivou fází srdeční činnosti. Tato citlivá fáze se na elektrokardiogramu označuje písmenem T a u člověka trvá asi 0,15 až 0,2 sec. Trvá-li však působení elektrického proudu déle než jednu srdeční periodu, u člověka po dobu 0,75 až 0,8 sec, zasáhne se fáze T ještě jednou. Při opětovném zasažení fáze T srdeční činnosti intenzita proudu, nutná k vyvolání fibrilace komor je podstatně menší. Chvění komor lze vyvolat již při elektrických proudech kolem 100mA. Z toho vyplývá, že dotyk trvající déle než 0,8 sec je nebezpečný i u nízkého napětí.

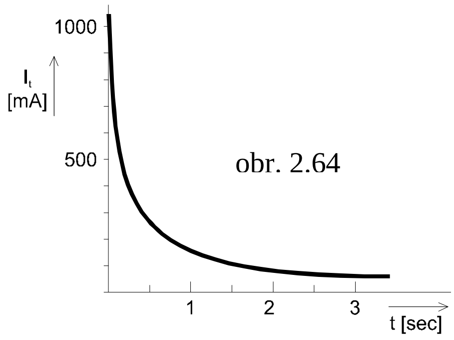
Ch. F. Dalziel zhodnotil statisticky výsledky prováděných pokusů a došel k závěru, že pravděpodobnost vzniku srdečních fibrilací je při tzv. energetickém kriteriu

$$I^2 \cdot t = 0{,}027 \quad [\mathrm{A^2 s}] \qquad (2.130)$$

Podle jiných pramenů se také uvádí, že na 99,5% nenastane ochrnutí srdeční činnosti, jestliže proud procházející tělem splňuje rovnici

$$I_t \geq \frac{0{,}165}{\sqrt{t}} \quad [\mathrm{A;s}] \qquad (2.131)$$

kde I je efektivní hodnota proudu tělem, t je čas působení proudu, 0,165 empirická konstanta.



obr. 2.64

Tato rovnice platí v časovém intervalu 0,03 ≤ t ≤ 3 s. Její grafické řešení je na obr. 2.64, z něhož je vidět velký význam rychle působících ochran z hlediska bezpečnosti před úrazy elektrickým proudem.

Z hlediska působení proudu procházejícího tělem je nejnebezpečnější proudu procházející přes srdce, mozek a míchu. Proud procházející mezi dvěma nohami je mnohem méně nebezpečný, než směrem ruka-noha nebo ruka-ruka. Zkušenosti potvrzují, že jestliže vyšší proudy působí krátký čas, nemusí vždy přivodit smrt, ale způsobí těžké popáleniny s trvalými následky.

Protože účinek elektrického proudu na čase jeho trvání, je třeba vzít v úvahu, že odpor těla klesá s časem průchodu proudu, takže se proud zvětšuje.

Proud procházející tělem můžeme lehce vypočíst z Ohmova zákona $I = U/R$. Jestliže uvažujeme odpor těla 2200 Ω, dostaneme při 220 V proud procházející tělem 0,1 A, při němž zpravidla nastává smrt, hlavně působí-li delší čas. Proto se v některých případech napětí snižuje a v prostředích se zvýšeným nebezpečím úrazu elektřinou (vlhko, mokro apod.) se vyžadují zařízení na malá (bezpečná) napětí.

Neurovegetativní činnost zdravého člověka se řídí chemicko-elektrickými pochody. Nejdůležitější orgán člověka - srdce a jeho činnost - se řídí bioelektrickými pochody. Biopotenciály v živém organismu dosahují velmi malé hodnoty (řádově kolem 1 mV).

Při úrazu elektrickým proudem se působením vnějších napětí, které mnohonásobně převyšuje přirozené hodnoty biopotenciálů, podle okolnosti lehce nebo těžce poruší elektrochemický regulační systém zdravého organismu. Buňky některých životně důležitých orgánů, jako je např. mozek, jsou značně závislé na okysličování a odumírají již několik minut po zastavení činnosti srdce.

Příčinou smrti při úrazech elektřinou bývá nejčastěji:

a) křečovité stažení srdečního svalu nebo svalů hrudníku (plic) spojené se ztrátou vědomí, při němž nastává zadušení,

b) fibrilace srdečních komor, kterou způsobuje jen střídavý proud průmyslové frekvence; místo pravidelného smršťování srdečního svalu nastane nepravidelné chvění s hmatatelným pulsem, které postupně slábne až se úplně přeruší; někdy je možná záchrana včasným poskytnutím vnější masáže srdce se současným poskytováním umělého dýchání, defibrilaci a vnitřní masáži srdce po chirurgickém zákroku;

c) popáleniny vysokého stupně a ve velkém rozsahu, které mohou být při stejnosměrném proudu spojené s elektrolytickými účinky (rozkladem krve).

Nakonec rekapitulujeme pocity a účinky při působení střídavého proudu:

El. proud v mA	Pocity a účinky
do 1	počátek pocitu u většiny lidí při 0,5 - 0,6 mA
1 – 4	brnění rukou
4 – 5	chvění rukou
5 – 7	prsty lze téměř vždy rozevřít a vyprostit z kontaktu

8 – 13	křeče rukou, vyproštění prstů z kontaktu je možné pouze násilím
15 – 20	postižený, který uchopil pevně předmět pod napětím, nemůže jej obvykle uvolnit bez cizí pomoci
20 – 25	křeče působící na celý organismus, zrychlení dechu, bez následků
25 – 50	ochromení srdeční činnosti, někdy bezvědomí, záchrana možná
50 – 100	těžké bezvědomí s vážnými následky, nebezpečí smrti
nad 100	zpravidla smrt

❑ Vliv záření elmag vln v pásmu vf a vvf na lidský organismus

Rozvoj techniky způsobil, že v posledních dvou stoletích se vynořily nejrůznější zdroje umělého záření - a ty ve svém souhrnu zřejmě převyšují hodnoty, které každý člověk dostává od přírody. Jakmile si odborníci uvědomili existenci těchto nových možných rizik, začali je zkoumat a na základě získaných výsledků určovali maximální přípustné dávky záření. Tak například existují normy pro pracovníky radioaktivních provozů, pro personál i pacienty u rentgenů, pro obsluhu radarů, vysílačů i laserových zařízení apod.

Dnes jsou poměrně dobře známy přípustné dávky ionizujícího záření, tedy radioaktivity, umíme se proti nim chránit a umíme je měřit. Havárie atomové elektrárny v Černobylu dala impuls k tomu, aby se rovněž začaly zkoumat účinky velice slabých, takřka neznatelných hodnot radioaktivity v průběhu dlouhé doby, třeba i několika desítek let, na živé organismy. Skupina vědců se pustila také do studia případných vlivů dlouhodobého působení malých dávek neionizujícího záření, jehož zdrojem jsou vysílače, radary, počítače, magnetogrily, infrazářiče, sušičky, lékařské přístroje a další elektronické stroje a zařízení. Souhrn těchto záření nazývají "elektromagnetický smog". Vliv uvedených záření na živé organismy není ještě většinou naprosto jasný. Proto se budeme dále zabývat jen zářením v pásmu vf a vvf, jehož vliv na člověka je již více prozkoumaný.

Jako vf označujeme frekvenční oblast 30 kHz až 300 MHz, čemuž odpovídá délka vlny řádově km až m. Jako vvf se označuje frekvenční oblast 300 MHz až 3000 GHz, čemuž odpovídá délka vlny až desetiny mm.

V důsledku nadměrné expozice elektromagnetickým zářením nastává v organismu celá řada změn, které mohou být přechodného nebo trvalého rázu. Podstatou biologických účinků elmag. vln je absorpce podstatné části energie těchto vln ozářenými tkanivy. Při těchto dějích se v závislosti na druhu ozářeného tkaniva mohou v ozářeném organismu uplatnit účinky v podstatě dvojího druhu: termické a atermické.

Termické účinky vznikají v důsledku nadměrné produkce tepla v ozářené části organismu. Jestliže se absorbovanou energií uvolní radikály z důležitých sloučenin, přivodí to celou řadu závažných biochemických změn atermického rázu, které mohou mít významnou úlohu v dalším rozvoji případných chorobných změn.

Termický účinek elmag. záření vf a vvf se dostaví, jestliže výkonová hustota přesahuje 10 mW/cm^2 . Projeví se to přehřátím ozářené části organismu, tzv. hypertermií. Pokud dojde k jednorázovému rozsáhlejšímu ozáření výkonovou hustotou kolem 100 mW/cm^2 , vznikne celková hypertemie, která může končit smrtí. Při jednorázovém ozáření hlavy výkonovou hustotou 10 mW/cm^2 a více vznikne hypertemie mozku s vážnými následky (otok cévní stěny a mnoho drobných krvácení do mozku).

Kromě poškození mozku může vzniknout i poškození zrakového orgánu, což se projevuje kromě zánětu spojivek, který má jen přechodný ráz, i trvalým zákalem oční čočky. Obdobné cévní změny mohou vzniknout po ozáření uvedenou výkonovou hustotou v kterémkoliv orgánu, hlavně má-li bohaté cévní zásobování, jako je to např. v játrech a pohlavních orgánech.

V profesionálních podmínkách jsou pracující exponovaní obvykle opakovanou malou intenzitou elmag. záření. Za těchto podmínek se hypertemie organismu již neobjevuje, vznikne však celá řada tzv. atermických účinků, které se dostaví tehdy, když se soustavně překračují maximální přípustné expozice. Projeví se obvykle až po několikaleté expozici.

Nadměrná chronická expozice elmag. záření se projevuje narušením funkcí nervového systému, poškozením zrakového orgánu, poruchami srdečně-cévního systému, narušením funkcí výměny látkové, narušením funkcí pohlavních orgánů, případně narušením funkcí dalších orgánů. Chronická profesionální expozice s výkonovou hustotou v desetinách mW/cm^2 může již vyvolat typické funkční změny nervového systému, projevující se především nervozitou, poruchami spánku apod.

Aby pracovní prostředí nemělo charakter rizikového pracoviště ze stránky ozáření elmg. vln, nesmí se překračovat průměrné denní, případně směnové hodnoty ozáření podle úpravy hlavního hygienika.

Výpočet ozáření (Θ) se provádí podle těchto vztahů:

a) v oblasti vf: $\Theta = E \cdot t$, kde E je intenzita pole [V/m], t čas působení pole [h];

b) v oblasti vvf: $\Theta = N \cdot t$, kde N je výkonová hustota [μW/cm^2], t čas působení pole [h].

Maximální přípustné průměrné denní, případně směnové hodnoty ozáření pro obsluhující personál jsou:

a) v pásmu vf 30 kHz až 30 MHz $\Theta = 400$,

b) v pásmu vf 30 MHz až 300 MHz $\Theta = 80$,

c) v pásmu vvf pro nepulsní provoz $\Theta = 200$,

d) v pásmu vvf pro pulsní provoz $\Theta = 80$.

2.6. Hraniční podmínky na rozhraní dvou prostředí

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojmy oblast, hranice, hraniční podmínky
- řešit úlohy s okrajovými podmínkami na rozhraní dielektrik
- řešit úlohy s okrajovými podmínkami na rozhraní magnetik
- řešit úlohy s okrajovými podmínkami na rozhraní polovodičů

Výklad

Uvažujme dvě podoblasti Ω_i, Ω_j s různými parametry prostředí. Pole v obou podoblastech je popsáno polními veličinami ***E,D,J,B,H***, které jsou funkcemi souřadnic bodů. Na rozhraní mezi oběma oblastmi Γ_{ij} jsou derivace polních veličin nespojité a neplatí zde Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru. Musí zde být doplněny **podmínkami přechodu**. Z integrálních tvarů Maxwellových rovnic a rovnice kontinuity budou dále tyto rovnice odvozeny jak pro spojitou změnu, tak i pro skok polní veličiny. Zatím jsou v souhrnu odvozeny v následující tabulce:

Velič.	Hran.(přechodová) podmínka	Ekvivalentní vektorové vyjádření
E	$E_{jt} = E_{it}$	$n^o \times (\mathbf{E}_j - \mathbf{E}_i) = 0 \Rightarrow$ Rot $\mathbf{E} = 0$
D	$D_{jn} - D_{in} = \sigma$	$n^o . (\mathbf{D}_j - \mathbf{D}_i) = \sigma \Rightarrow$ Div $\mathbf{D} = \sigma$
J	$J_{jn} = J_{in}$	$n^o . (\mathbf{J}_j - \mathbf{J}_i) = 0 \Rightarrow$ Div $\mathbf{J} = 0$
H	$H_{jt} - H_{jt} = K_N$	$n^o \times (\mathbf{H}_j - \mathbf{H}_i) = \mathbf{K} \Rightarrow$ Rot $\mathbf{H} = \mathbf{K}$
B	$B_{jn} = B_{in}$	$n^o . (\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_i) = 0 \Rightarrow$ Div $\mathbf{B} = 0$

Přičemž jsme zavedli plošné divergence a rotace např.

$$Div\, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_j - \boldsymbol{D}_i) \qquad (2.132)$$

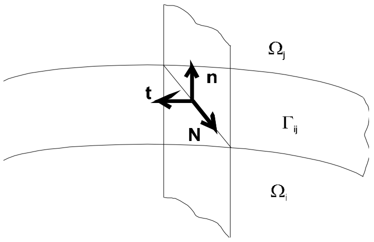
$$Rot\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_j - \boldsymbol{E}_i) \qquad (2.133)$$

Označení tečných a normálových složek odpovídá obr.2.65, kde označuje symbol:

t projekce veličin do jednotkového vektoru $\boldsymbol{t}^O$

n projekce do jednotkového vektoru $\boldsymbol{n}^O$

N projekce do jednotkového vektoru $\boldsymbol{N}^O = \boldsymbol{n}^O \times \boldsymbol{t}^O$



obr. 2.65

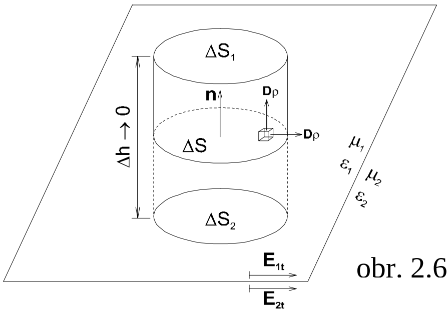
Pokud vyšetřujeme poměry v bodě P ležícím na rozhraní nazveme pojmem hodnota jednostranné veličiny ***E***,... v bodě $P \in \Gamma_{ij}$ velikost limity

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{P}) = \lim_{Pi \to P} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{P}_i) \quad \boldsymbol{P}_i \in \Omega_i \qquad \boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{P}) = \lim_{Pj \to P} \boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{P}_j) \quad \boldsymbol{P}_j \in \Omega_j \quad (2.134)$$

Kde P_i, P_j jsou body ležící velmi blízko bodu *P* v jednotlivých oblastech. Podobně je tomu i u dalších polních veličin.

❑ Rozhraní dvou dielektrik nebo dvou magnetik

Při odvození poměrů na rozhraní dvou oblastí Ω_1, Ω_2, které jsou tvořeny dvěmi homogenními dielektriky vyjděme nejprve z Maxwellovy rovnice - Gaussovy věty v integrálním tvaru, aplikované na elementární válcový objem obr.2.66 s velmi malou výškou válce $\Delta h \to 0$. Budicí veličinou je náboj plošné hustoty σ rozložený na rovině rozhraní a náboj objemové hustoty ρ rovnoměrně rozložený v objemu zkušebního válečku. Gaussova věta má potom tvar



obr. 2.66

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{ds} = \boldsymbol{Q} = \int_V \rho \cdot \boldsymbol{dV} + \int_S \sigma \cdot \boldsymbol{ds} \qquad (2.135)$$

Plochu horní podstavy označíme Δs_1, spodní podstavy Δs_2 a plochu pláště válečku $\Delta s_3 \to 0$. Integrál na levé straně rov (2.135) se rozpadá na tři integrály

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\Delta s_1} \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{ds} + \int_{\Delta s_2} \mathbf{D}_2 \cdot \boldsymbol{ds} + \int_{\Delta s_3 \to 0} (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\Delta s_1} \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{ds} + \int_{\Delta s_2} \mathbf{D}_2 \cdot \boldsymbol{ds}$$

a tedy pro $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s$

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta s + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{n}) \cdot \Delta s = \rho \cdot \Delta s \cdot \Delta h + \sigma \cdot \Delta s \qquad /:\Delta s$$

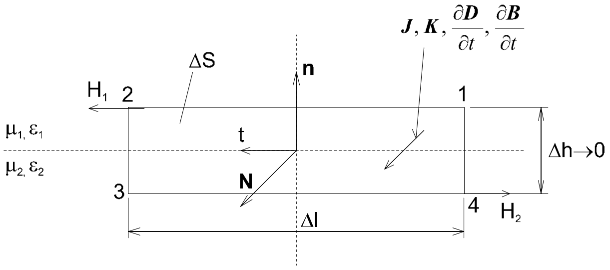
pro $\Delta h \to 0$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma \tag{2.136}$$

Podobně bychom řešili magnetické pole. Vyšli bychom z Maxwellovy rovnice $\oint \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{ds} = 0$, kterou bychom aplikovali opět na stejný elementární válec. Dostaneme tak po naprosto stejné úpravě pravé strany, tentokrát s polní veličinou **B**, a s uvažováním skutečnosti, že na pravé straně uvedené Maxw. rovnice se nenachází budicí veličina vztah:

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{2.137}$$

Můžeme tedy konstatovat, že na rozhraní dvou magnetik se normálová složka vektoru magnetické indukce mění spojitě a na rozhraní dvou dielektrických prostředí, pokud na něm není přítomen náboj plošné hustoty σ se normálová složka vektoru elektrické indukce rovněž mění spojitě.



obr. 2.67

Pro odvození dalších podmínek přechodu vyjděme z rov. (1.55) $\oint \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = \boldsymbol{I} + \partial \psi / \partial \boldsymbol{t}$ aplikované na elementární plošku podle obr.2.67, jejíž jedná strana Δh → 0. Potom upravíme levou stranu výchozí rovnice integrálu po dráze 1-2-3-4-1

$$\oint \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = \int_{12} \mathbf{H}_1 \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} + \int_{23} (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} + \int_{34} \mathbf{H}_2 \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} + \int_{41} (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} \tag{2.138}$$

Integrály po drahách 2-3 a 4-1 nabývají nulové hodnoty, protože po integraci je intenzita násobená $\Delta h \to 0$. Levá strana rovnice (1.55) bude tedy mít tvar

$$\int_{12} \mathbf{H}_1 \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} + \int_{34} \mathbf{H}_2 \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathrm{l} + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathrm{l} = \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathbf{t} \cdot \Delta \boldsymbol{l} + \boldsymbol{H}_1 \cdot (-\mathbf{t}) \cdot \Delta \boldsymbol{l} \tag{2.139}$$

Na pravé straně rovnice (1.55) je proud

$$\boldsymbol{I} = \int \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{ds} + \int \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = \boldsymbol{J} \cdot \mathbf{N} \cdot \Delta \boldsymbol{s} + \boldsymbol{K} \cdot \mathbf{N} \cdot \Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{J} \cdot \mathbf{N} \cdot \Delta \boldsymbol{l} \cdot \Delta \boldsymbol{h} + \boldsymbol{K} \cdot \mathbf{N} \cdot \Delta \boldsymbol{l} = +\boldsymbol{K} \cdot \mathbf{N} \cdot \Delta \boldsymbol{l} \tag{2.140}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{t}} = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \boldsymbol{t}} \cdot \Delta \boldsymbol{l} \cdot \Delta \boldsymbol{h} = 0 \tag{2.141}$$

tedy rovnice (1.55) bude mít po úpravách tvar

$$H_1 \cdot \mathbf{t} \cdot \Delta l - H_2 \cdot \mathbf{t} \cdot \Delta l = K \cdot \mathbf{N} \cdot \Delta l \qquad /:\Delta l \tag{2.142}$$

$$(H_1 - H_2) \cdot \boldsymbol{t} = K \cdot \boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad H_{1t} - H_{2t} = K_N \tag{2.143}$$

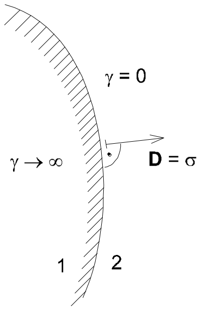
Pokud na rozhraní neteče plošný proud mění se zde tangenciální složky vektoru magnetické indukce spojitě.

Podobným postupem bychom z rovnice $\oint \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = -\partial \phi / \partial \boldsymbol{t}$ dostali záměnou *H* za *E* a ψ za ϕ závěr

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{2.144}$$

Tečná složka vektoru intenzity elektrického pole se na rozhraní dvou dielektrických prostředí mění spojitě. Jak již bylo řečeno, siločáry vznikají nebo zanikají všude tam, kde se mění permitivita dielektrika.

Podmínky na rozhraní dielektrika a vodiče obr.2.68 vyjadřuje tzv. **Coulombova věta elektrostatiky**. Vysvětlíme si ji snadno na příkladu nabitého vodiče (elektrody) tvaru koule o poloměru *a*. Volné náboje jsou rozmístěny na povrchu koule, uvnitř koule je **D** = **E** = 0. Nulové jsou pochopitelně jak tečné, tak i normálové složky těchto veličin. V dielektriku kolem koule prochází libovolnou integrační soustřednou kulovou plochou $r > a$ podle Gaussovy věty $D{\cdot}4\pi r^2 = \sigma{\cdot}4\pi a^2$ vektor indukce *D* kolmý na povrch plochy. Pro $r = a$ lze psát



obr. 2.68

$$E_{2t} = E_{1t} = 0$$

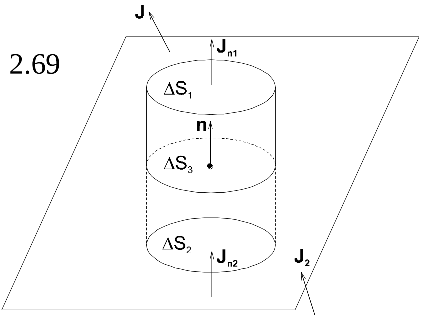
$$D_{1n} = 0 D_{2n} = \sigma \qquad (2.145)$$

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2} \qquad (2.146)$$

Indukce el.stat pole bezprostředně na povrchu vodiče se rovná plošné hustotě náboje na povrchu vodiče v daném místě. Indukční čáry vycházejí z povrchu - z ekvipotenciály – kolmo a neexistují tedy tečné složky.

❑ Rozhraní dvou vodivých prostředí

obr. 2.69



Na základě principu kontinuity

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{ds} = -\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{t}} \qquad (2.147)$$

aplikovaném na elementární válec obr.2.69 lze psát analogicky jako v předcházející kapitole

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\Delta s1} \mathbf{J}_1 \cdot \boldsymbol{ds} + \int_{\Delta s2} \mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{ds} + \int_{\Delta s3 \to 0} (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2) \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\Delta s1} \mathbf{J}_1 \cdot \boldsymbol{ds} + \int_{\Delta s2} \mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{ds} \qquad (2.148)$$

a tedy pro $\Delta_{s1} = \Delta_{s2} = \Delta s$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{ds} = \boldsymbol{J}_1 \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta s + \boldsymbol{J}_2 \cdot (-\mathbf{n}) \cdot \Delta s \qquad (2.149)$$

Ve stacionárním poli musí být celkové množství nábojů v uvažovaném válci konstantní a pravá strana rovnice kontinuity je nulová. Potom

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0 \qquad (2.150)$$

$$J_{1n} = J_{2n} \qquad (2.151)$$

Normálová složka proudové hustoty na rozhraní dvou vodivých prostředí se mění spojitě, neteče-li rozhraním v čase proměnný (např. střídavý) proud. Z diferenciálního Ohmova zákona $\boldsymbol{J} = \gamma{\cdot}\boldsymbol{E}$ můžeme dále psát

$$\gamma_1 \cdot E_{1n} - \gamma_2 \cdot E_{2n} = 0 \qquad (2.152)$$

$$\boldsymbol{Div}\ \mathbf{E} = \boldsymbol{E}_{2n} - \boldsymbol{E}_{1n} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} \cdot \boldsymbol{E}_{1n} \qquad (2.153)$$

Současně platí pro plošnou divergenci $Div\,\mathbf{D} = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_o$, tedy

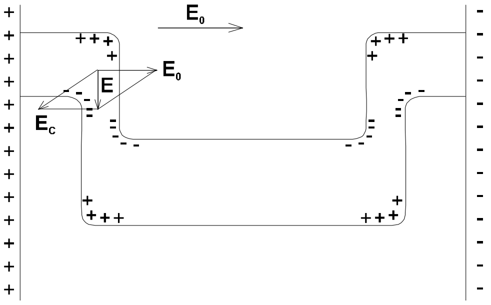
$$\varepsilon_2 \cdot E_{2n} - \varepsilon_1 \cdot E_{1n} = \sigma_o \tag{2.154}$$

Srovnáním vztahů pro $Div\,\mathbf{E}$ a $Div\,\mathbf{D}$ obdržíme poměr

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \tag{2.155}$$

Ze vztahu (2.154) vyjádřeného pomocí $\boldsymbol{J}$: $\varepsilon_2 \frac{\mathbf{J}_n}{\gamma_2} - \varepsilon_1 \frac{\mathbf{J}_n}{\gamma_1} = \sigma_0$ je

$$\sigma_0 = \mathbf{J}_n \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right) \tag{2.156}$$



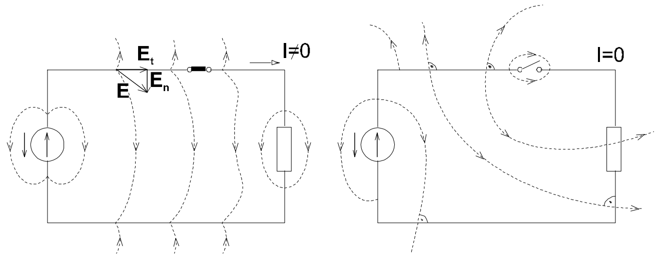
obr. 2.70

Z tohoto vztahu a ze vztahu (2.155) je zřejmé, že na rozhraní bude při průchodu proudu $\boldsymbol{J}_n$ nulový plošný náboj jen tehdy, bude-li splněna podmínka (2.155). V jiných případech bude na rozhraní vždy plošný náboj nenulový. Tento jev je výrazný zejména na rozhraní vodič - vzduch ($\gamma \to 0$), které je nabito plošným nábojem. Má to ostatně velký praktický význam při vedení proudu vodičem. Povrchové plošné náboje vytvoří coulombovské pole takového směru, aby součet intenzit tohoto pole a pole vyvolaného vnějším zdrojem měl směr osy vodiče a aby proud hustoty $\boldsymbol{J} = \gamma \cdot \boldsymbol{E}$ vůbec sledoval zakřivení vodiče v prostoru obr.2.70. Bez nábojů na povrchu vodiče by $\mathbf{E}$ a tedy i $\boldsymbol{J}$ měl protékat mezi "svorkami" zdroje bez ohledu na tvar vodivého spojení svorek.

Pro tečné složky je na povrchu vodiče protékaného stacionárním proudem směrodatná rovnice $rot\,\boldsymbol{E} = 0$ a tedy

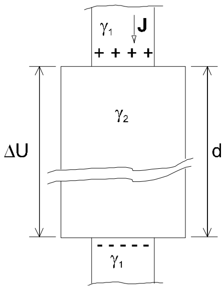
$$E_{1t} = E_{2t} \tag{2.157}$$

Ve vodiči však musí existovat tečná složka intenzity pole, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\gamma$, udržující neustálý průtok proudu. Z rovnosti tečných složek je zřejmé, že i na povrchu vodiče bude tečna složka intenzity $E_{1t} = E_{2t} = J_{1n}/\gamma_1$



obr. 2.71

Na rozdíl od pole statického, nebudou tedy vycházet siločáry z vodiče do okolního vzduchu kolmo, ale pod jistým, byť velmi malým úhlem (obr.2.71) a povrch vodiče již tedy není ekvipoenciální plochou. Tangenciální složka je vůči normálové zanedbatelná a stacionární pole v dielektriku můžeme řešit jako statické. Např. u dvou vodičů s $\gamma = 58$ mm^2 /Ωm s napětím 1000V, protékaných proudem s hustotou $J = 5$ A/mm^2, které jsou od sebe vzdáleny o $d = 10$ cm je tečná složka $E_t = J / \gamma = 0{,}086$ V/m a normálová složka $E_n = U/d = 1000$ V/m. Jejich poměr $E_n : E_t = 1000 : 0{,}086 = 11627{,}9$.



obr. 2.72

Jak již bylo řečeno v záhybech vodičů, kde je normálová složka vnějšího pole nenulová, se objeví plošný náboj. Podobně se plošný náboj objeví i na styku dobrého vodiče s odporovým materiálem obr.2.72. Např. při přechodu vodič - odpor je to náboj kladný na přechodu odpor - vodič záporný podle vztahu (2.156). Mezi "svorkami" odporového materiálu vznikne tedy Coulombovské pole intenzity E_c a na vzdálenosti obou rozhraní d vzniká úbytek napětí

$$\Delta U = d \cdot E_C = d \cdot \frac{J}{\gamma} = \frac{d \cdot I}{s \cdot \gamma} = \frac{I}{R} \quad (2.158)$$

Při označování úbytku napětí šipkou (orientovaný skalár) by tato měla začínat na svorce s + nábojem ve vodiči.

Z podmínky (2.157) vyplývá $J_{2t} / \gamma_2 - J_{1t} / \gamma_1 = 0$

$$J_{2t} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot J_{1t} \qquad (2.159)$$

Potom je ovšem na rozhraní

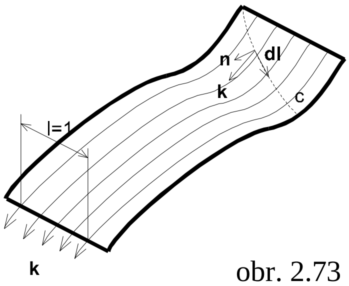
$$\boldsymbol{J}_{2t} \neq \boldsymbol{J}_{1t} \qquad (2.160)$$

neboli $\boldsymbol{rot}\ \mathbf{J} \neq 0$ (2.161)

Hustota proudu ***J*** tvoří na rozhraní **plošný vír**. Zřejmé je to na rozhraní proudovodiče a dielektrika, kde je velký rozdíl vodivostí. Analogicky jako se na rozhraní dielektrik objeví plošná hustota náboje σ, tady můžeme se objeví **plošný proud**

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{\boldsymbol{v}}' \qquad (2.162)$$

Je to proud přepočítaný na pruh jednotkové šířky. Přesně platí **K** ≠ 0 jen v ideálně vodivém prostředí, kde je **J** → ∞, tedy kdy nulovým průřezem může téct nenulový proud. V praxi však za plošný proud považujeme i proud tenkou vodivou deskou, vrstvou, nebo i tenkou vrstvou vinutí. Plošný proud protínající křivku *C* obr.2.73 je



obr. 2.73

$$I = \int_C K_n \cdot dl \qquad (2.163)$$

Podobně se zavádí **liniový proud**, což je nejčastěji užívaná idealizace proudu procházejícího velmi tenkým vláknem. Jeho velikost je

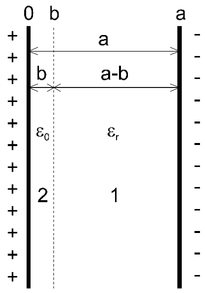
$$I = \tau' \cdot \boldsymbol{v}' \qquad (2.164)$$

Jak pro plošné, tak i pro liniové proudy musí platit rovnice kontinuity. Zde však máme na mysli proudy procházející jen v rozhraní samotném (např. v tenké vodivé ploše). Potom píšeme rovnici kontinuity ve dvojrozměrné souřadné soustavě plochy vedoucí proud:

$$\boldsymbol{Div}\ \mathbf{K} = \frac{\partial \boldsymbol{K_X}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{K_Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \qquad (2.165)$$

❑ Příklady nehomogenit v dielektriku

Při řešení pole v materiálu složeném z různých homogenních dielektrik postupujeme principiálně tak, že v každé homogenní části vyřešíme pole samostatně a řešení v jednotlivých homogenních úsecích navzájem přizpůsobíme tak, aby byly na rozhraní splněny výše uvedené podmínky. Řešení se poněkud zkomplikuje, je-li plocha rozhraní totožná s ekvipotenciální plochou, nebo je na ni kolmá. Podrobnější rozbor jednotlivých případů bude proveden později v souvislosti s rozborem některých metod řešení polí.



obr. 2.74

Zkoumání různých případů vložení dielektrika do elektrického pole mají velký praktický význam pro modelování nečistot, vzduchových bublin apod., které se vyskytnou v izolaci el. zařízení. Nejjednodušším případem může být vrstva vzduchu mezi deskou rovinného kondenzátoru a dielektrikem obr.2.74. Napětí přiložené na desky kondenzátoru se rozdělí stejně, jako na dvou sériově zapojených kondenzátorech.

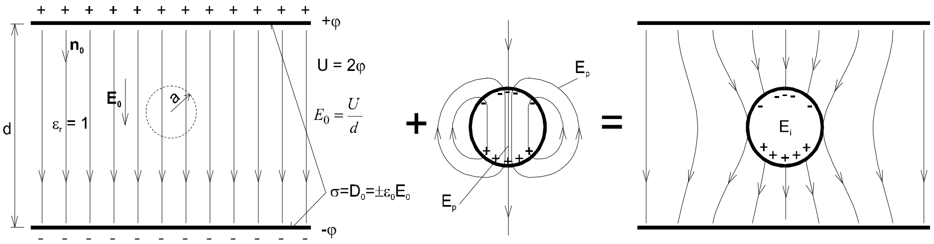
$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 = \int_0^b \mathbf{E}_2 \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{E}_1 \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{E}_1 \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{E}_2 \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\varepsilon_r} - 1)}{\boldsymbol{\varepsilon_r}} \qquad (2.166)$$

protože jsme z podmínky na rozhraní $D_{n1} = D_{n2}$ dosadili $E_1 = E_2 \cdot \varepsilon_o / \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$. V kondenzátoru bez vzduchové mezery by stejné napětí bylo pouze na dielektriku s intenzitou E_o. Tedy

$$\boldsymbol{U} = \int_0^a \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{l} = \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{a} \qquad (2.167)$$

Potom $$E_2 \cdot (a + b(\varepsilon_r - 1))/\varepsilon_r = E_o \cdot a \qquad (2.168)$$

$$\frac{E_2}{E_0} = \varepsilon_r \cdot \frac{a}{a + b(\varepsilon_r - 1)} > 1 \qquad (2.169)$$



obr. 2.75

Namáhání vzduchové vrstvy může být tedy i mnohem větší (čím tenší vrstva, tím větší namáhání) a může v ní dojít k doutnavému výboji nebo průrazu. To lze ale usoudit na základě jednoduché úvahy i bez větších výpočtů. Má-li být v obou vrstvách stejné $D_{n1} = \varepsilon E_1$, je $E_n = D_n / \varepsilon$ větší pro vzduch s $\varepsilon = \varepsilon_o$ pro izolant s $\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r > \varepsilon_o$.

Dále vložme do homogenního pole $E_o = U/d$ kouli o poloměru $a \ll d$ podle obr.2.75, která může modelovat podle hodnoty permitivity buď pevnou nečistotu nebo vzduchovou bublinu v izolačním oleji. Pole E_o je vybuzeno volným nábojem s hustotou σ_o na velmi vzdálených rozsáhlých elektrodách a je tedy $E_o = D/\varepsilon_o = \sigma_o / \varepsilon_o$. Koule s permitivitou ε_r se polarizuje tak, že uvnitř i vně vzniká intenzita přídavného pole E_p od vázaných nábojů σ_v.

$$E_P = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_0}{\varepsilon_r + 2 \cdot \varepsilon_0} \cdot E_0 \qquad (2.170)$$

Vektory této intenzity uvnitř koule jsou kolineární a je zde tedy homogenní pole

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P = \boldsymbol{E}_0 \left(1 - \frac{\boldsymbol{\varepsilon_r} - \boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon_r} + 2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0}\right) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{3\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0}{\boldsymbol{\varepsilon_r} + 2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0} \cdot \mathbf{n}_0 < \mathbf{E}_0 \qquad (2.171)$$

Krajní případ nastává pro $\varepsilon_r \to \infty$, kdy je v dielektriku nulové pole a chová se jako vodič v elektrostatickém poli. Toho lze využít při matematickém modelování vodivých elektrod v elektrostat. poli (zadáváme u nich velmi vysokou hodnotu permitivity $\varepsilon_r > 50000$).

Vázané plošné náboje vytvářejí na povrchu koule dipól s momentem

$$p = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \cdot E_P \qquad (2.172)$$

Vektor polarizace je

$$P = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E_i = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot E_i = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_0}{\varepsilon_r + 2\varepsilon_0} E_0 = 3\varepsilon_0 \cdot E_P = \frac{E_P}{N_d} \qquad (2.173)$$

kde N_d je **depolarizační činitel.** Skutečně tedy platí

$$p = P \cdot V_{koule} = 3\varepsilon_0 \cdot E_p \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_p \qquad (2.174)$$

Hustoty vázaných nábojů lze vypočíst ze vztahů

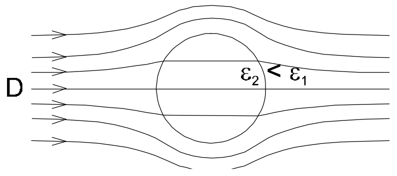
$\rho_v = - div\, \boldsymbol{P}$ (2.175) $\rho_v = P_a = P \cdot cos\, \vartheta$ (2.176)

Protože ***P*** se uvnitř koule nemění v závislosti na souřadnicích, bude i jeho divergence a tedy objemová hustota nábojů uvnitř koule nulová. Plošná hustota působí vně koule pole $\boldsymbol{E}_p$

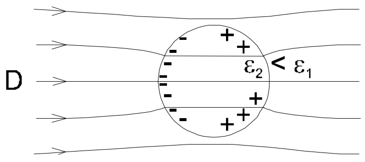
$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{p}} = \mathbf{E}_{\boldsymbol{i}} - \mathbf{E}_0 = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{r}2} - 1}{\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{r}2} + 2}\mathbf{E}_0 \qquad (2.177)$$

Toto pole se nazývá depolarizační a směřuje proti $\boldsymbol{E}_p$. Výsledné vnější pole

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_p \qquad (2.178)$$

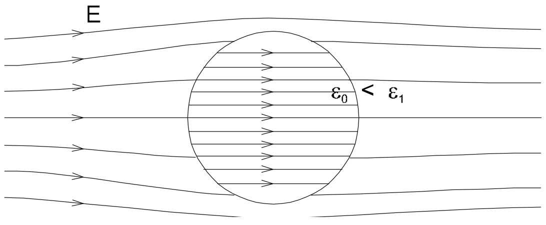


obr. 2.76



obr. 2.77

je obeně buď jakoby vtahováno do dielektrika obr.2.77 nebo vytlačováno z dielektrika obr.2.76. V případě kulové dutiny (vzduchu) v dielektriku bude polarita vázaných plošných nábojů σ_v na vnitřním povrchu dutiny opačná (obr.2.78) a uvnitř koule dojde k zesílení pole ***E***, přitom se však zeslabí indukce ***D***. Výsledky se změní takto:



obr. 2.78

$$E_p = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_0}{2\varepsilon_r + \varepsilon_0} E_0 \qquad (2.179)$$

$$E_i = \frac{3\varepsilon_0 \cdot E_0}{2\varepsilon_r + \varepsilon_0} > \vec{E}_0 \qquad (2.180)$$

Podle poměru velikosti permitivit mohou nastat případy, pro:

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ je $E_i = E_o$ a $p = 0$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ $p > 0$

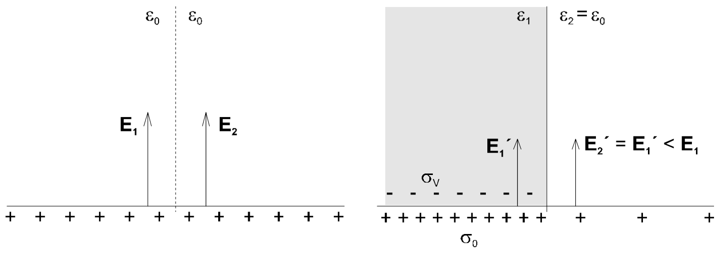
$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ $p < 0$

$\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ $E_i = 0$ v kouli je homogenní el. pole

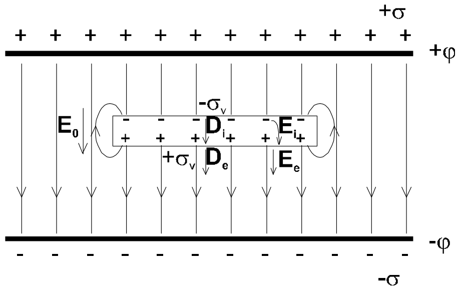
Těleso o větší permitivitě k sobě "přitahuje" siločáry, stejně jako by se chovalo v proudovém poli vodivější těleso. Proto přirovnáváme permitivitu k jakési dielektrické vodivosti a definujeme pojem **dielektrický odpor** indukční trubice:

$$R_d = \int_1^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{dl}{s} \qquad (2.181)$$

Dalším zajímavým případem vložení dielektrika do elektrického pole je situace, kdy na část elektrody, tedy homogenně nabité roviny nábojem σ_o = konst., přiložíme dielektrikum obr.2.79. Na jeho



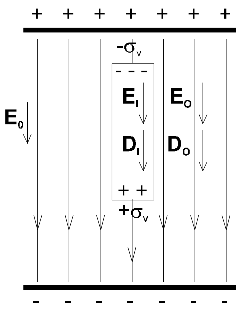
obr. 2.79



obr. 2.80

povrchu se vytvoří vázané náboje σ_v opačné polarity než σ_o, které původní pole zeslabí. Přitom musí i nadále platit rovnost tečných složek na rozhraní a to proto, že náboje σ_v přitáhnou do oblasti rozhraní takovou část opačně polarizovaných σ_o, že se velikosti tečných složek intenzit vyrovnají.

Nakonec uveďme dvě krajní polohy tenkého dielektrika vloženého do elektrického pole a dutiny v dielektriku. Nejprve to bude dielektrická deska velmi malé tloušťky *t*, šířky *b* » *t*, vložená do pole tak, aby její delší strany byly kolmé na původní pole $\boldsymbol{E}_o$ - obr.2.80. Siločáry jsou tedy nuceny kolmo projít deskou, která se sice zpolarizuje, ale vzhledem k malé tloušťce neovlivní příliš původní pole. Mimo desku tedy bude



obr. 2.81

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{E}_o \quad \boldsymbol{D}_e = \boldsymbol{D}_o \tag{2.182}$$

v desce se mění spojitě normálové složky

$$D_{in} = D_{en} \rightarrow E_{en} \cdot \varepsilon_o = E_{in} \cdot \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r \tag{2.183}$$

Pole ***E*** uvnitř i vně desky bude kolineární, proto můžeme psát

$$E_{in} = E_i \quad E_{en} = E_e \tag{2.184}$$

a dále

$$E_i = \frac{\varepsilon_0 \cdot E_e}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \tag{2.185}$$

Uvnitř je tedy pole ε_r krát menší, než vně dielektrika. Natočme nyní tvarově stejnou desku z dielektrika o 90° tak, aby delší strany byly rovnoběžné s vektorem ***E*** - obr.2.81. Na rozhraní platí rovnost tečných složek intenzit pole. Protože pole budou zřejmě uvnitř i vně vloženého dielektrika kolineární můžeme psát

$E_i = E_e$ (2.186)

Vzhledem k tomu, že na elektrody je přivedeno napětí $U = E_o \cdot d$ a vně dielektrika dochází k superpozici polí od nábojů na elektrodách a vázaných nábojů v dielektriku, je také v závislosti na vzdálenosti od dielektrika

$$E_e = E_i \le E_o \tag{2.187}$$

Intenzita pole v dielektriku vloženém do vzduchu se tedy pohybuje v mezích

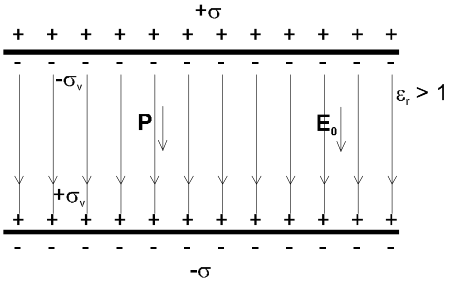
$$E_o / \varepsilon_r < E_i < E_o \tag{2.188}$$

V opačném případě, tedy je-li deska tvořena vrstvou vzduchu v dielektriku, stíní již dielektrikum částečně prostor mezi elektrodami obr.2.82. Pro získání stejného pole $\boldsymbol{E}_o$ jako ve vakuu při stejném $U = E_o.d$ na elektrodách, by musel být náboj na těchto elektrodách poněkud vyšší, než v prvém případě $\sigma_o' > \sigma_o$ a tedy

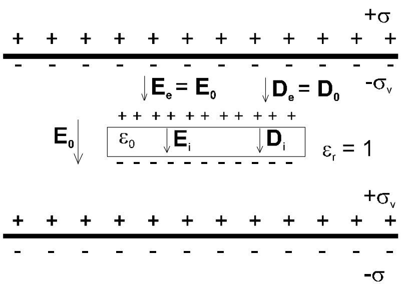
$$D = \sigma_o' = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_o \cdot E_o = \varepsilon_r \cdot D_o = \varepsilon_r \cdot \sigma_o \tag{2.189}$$

hustota náboje musí být ε_r krát větší než pro vakuum. Vázaný náboj na rozhraní dielektrika a horní elektrody je

$$\sigma_v = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n} = -P_n = -\varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E_0 = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_0 = -(\varepsilon_r - 1)\sigma_0 \tag{2.190}$$



obr. 2.82



obr. 2.83

Celkový náboj na rozhraní je dán součtem

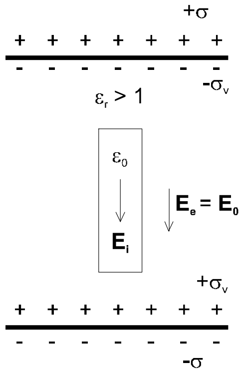
$$\sigma = \sigma_0' + \sigma_v = \sigma_0 \cdot \varepsilon_r - \varepsilon_r \cdot \sigma_0 + \sigma_0 = \sigma_0 \qquad (2.191)$$

Vložíme-li do dielektrika příčnou tenkou dutinku podle obr.2.83, bude na rozhraní

$$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{en}} \rightarrow E_{\mathrm{in}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{o}} = E_{\mathrm{en}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{o}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \qquad (2.192)$$

$$E_{\mathrm{i}} = E_{\mathrm{o}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \qquad (2.193)$$

tj. intenzita pole zde bude ε_r krát větší. U dutinky orientované podélně obr.2.84, bude na rozhraní platit rovnost tečných složek $E_i = E_o$. Ze vztahu (2.193) vyplývá, že přítomnost různých vzduchových bublin, štěrbin, dutinek apod. v izolačních hmotách může značně ohrozit překročení jejich pevnosti a vést k výboji, případně k úplnému průrazu a ztrátě izolačních vlastností.



obr. 2.84

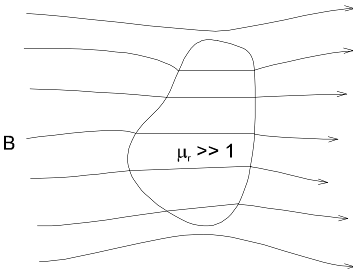
❑ Příklady nehomogenit v magnetickém poli

Vliv nehomogenit prostředí v magnetických polích se hojně v praxi projevuje především jako vliv konstrukčních prvků el. zařízení. Proto je třeba se jimi alespoň okrajově zabývat. Vložíme-li do magnetického pole těleso malé vůči rozměrům budicích cívek, dojde k:

a) deformaci indukčních čar směrem k vloženému tělesu; indukční čáry se jeví, jako by se přitahovaly; je to zřejmé i z analogie vztahů pro odpory

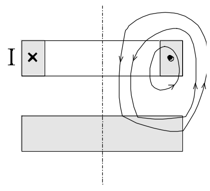
$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{S} \qquad R_d = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{S} \qquad R_m = \frac{1}{\mu}\frac{1}{S}$$

b) zesílení pole (indukce $\boldsymbol{B}$), zejména na plochách orientovaných normálově k siločárám obr.2.85.



obr. 2.85

Ve feromagnetické destičce umístěné v blízkosti cívky se pole deformuje podle obr.2.86 a omezuje rozšiřování pole do oblasti pod destičkou. Při měření indukčnosti cívky položené na železném stole nebo stole s železnými konstrukcemi může dojít ke zkreslení výsledků.



obr. 2.86

Na základě analogie elektrického a magnetického pole odvodíme vztahy pro polní veličiny změněné vlivem feromagnetika s konstantní permeabilitou ve tvaru koule. Vyjděme z analogických vztahů:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0 \qquad \mathrm{Rot}\,\boldsymbol{E} = 0 \qquad \mathrm{Rot}\,\boldsymbol{H} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \qquad \mathrm{Div}\,\boldsymbol{D} = 0 \qquad \mathrm{Div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \Delta\varphi_{\mathrm{m}} = 0$$

$$P_{\mathrm{n}} = \mu_{\mathrm{v}} \qquad M_{\mathrm{n}} \cdot \mu_{\mathrm{o}} = \sigma_{\mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_{\mathrm{o}} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_{\mathrm{o}} \cdot \boldsymbol{H} + \mu_{\mathrm{o}} \cdot \boldsymbol{M}$$

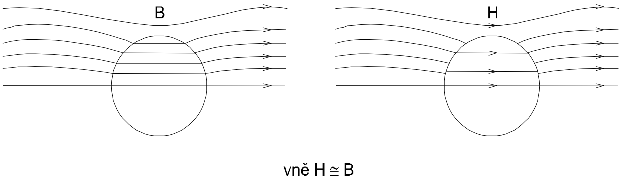
Potom můžeme přímo převzít výsledky kapitoly 2.6.3 a psát

$$H_p = \frac{\mu_r - \mu_0}{\mu_r + 2\mu_0} H_0 \qquad (2.194)$$

$$H_i = \frac{3\mu_0 \cdot H_0}{\mu_r + 2\mu_0} \qquad (2.195)$$

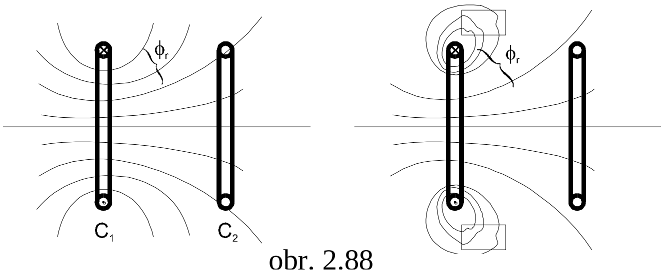
$$B_i = \frac{3\mu_r \cdot \mu_0 \cdot B_0}{\mu_r + 2\mu_0} \qquad (2.196)$$

Uvnitř feromagnetické koule s velkým μ_r bude opět homogenní pole s indukcí $B \cong 3Bo$. Grafické znázornění průběhu magnetických siločar a indukčních čar je na obr.2.87. Ve skutečnosti je zhuštění linií ***B*** resp. zředění siločar ***H*** v kouli mnohem výraznější.



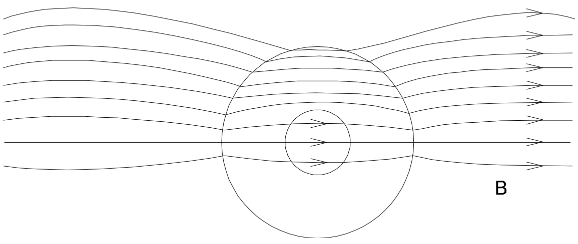
obr. 2.87

V praxi se častěji vyskytuje případ, kdy je do magnetického pole vložen válec z feromagnetika (např. svorník, nosník, šroub). Ve válci bude pole opět homogenní, jeho maximální indukce může nabýt jen hodnoty $2B_0$. Feromagnetické části konstrukcí deformují geometrii pole tím že k sobě indukční čáry „přitahují“. Tím ovlivní např. velikost části toku první cívky, který prochází cívkou druhou a následně i vzájemnou indukčnost dvou vzduchových cívek obr.2.88.

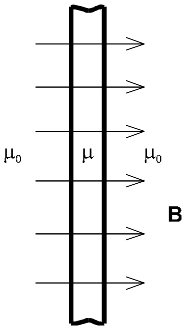


obr. 2.88

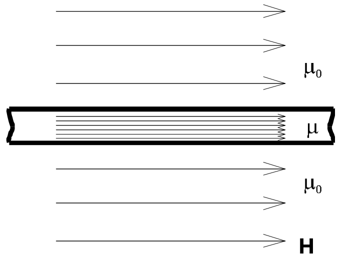
Vložíme-li do homogenního pole kulovou vrstvu obr.2.89, snaží se všechny siločáry a indukční čáry procházet materiálem s větší magnetickou „vodivostí“, tedy s větší permeabilitou a obejít vnitřní prostor naplněný vzduchem. Jako by se tedy vyhýbaly vnitřní dutině. Na rozdíl od proudovodiče však není rozdíl permeabilit a vzduchu tak velký jako rozdíl jejich měrných vodivostí a část siločar přece jen vstoupí do vnitřního prostoru kulové vrstvy. V dutině je pole sice značně zeslabeno, což může být chápáno jako jakýsi princip stínění. Toto stínění však není tak dokonalé, jako u stínění elektrostatického, můžeme jej však použít k částečnému magnetickému odstínění měřicích přístrojů.



obr. 2.89



obr. 2.90



obr. 2.91

Dále posoudíme podobné extrémní případy jako v elektrickém poli, tj. vliv tenké magnetické destičky vložené do magnetického pole. Pokud destičku vložíme kolmo na indukční čáry - obr.2.90, musí na rozhraní platit rovnost normálových složek indukce $B_{2n} = B_{1n}$. U destičky vložené do mag. pole rovnoběžně s indukčními čárami (obr.2.91), budou rozhodující složky tečné a jejich rovnost na rozhraní.

$$H_{2t} = H_{1t} \qquad B_{2n} = B_{1n} \cdot \mu_r > B_{2n} \qquad (2.197)$$

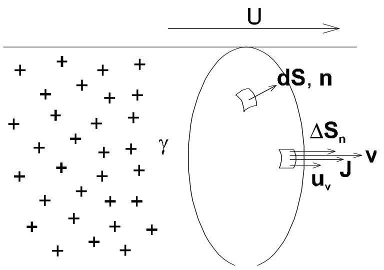
2.7. Masivní vodič v elektrickém poli obklopen dielektrikem

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojem proudové pole
- nakreslit mapu proudového pole

Výklad



Vložíme-li mezi dvě nabité desky vodič, dojde k rekombinaci volných nábojů na elektrodách, ve spojení s jejich vstřícným přesunem vodivým materiálem. Připojíme-li na elektrody zdroj, neustále dodávající stejné množství náboje, poteče vodivým materiálem ustálený proud a budeme hovořit o poli, které jsme nazvali stacionární (proudové) pole. Proud v libovolném vodiči tedy vytváří proudové pole. Podobně jako si přibližujeme v elektrostatickém poli tvar pole jeho ekvipotenciálami a siločárami (resp. indukčními čárami), znázorňujeme proudové pole tzv. **proudovými čárami**, které jsou podobně jako magnetické indukční čáry uzavřené a nemají začátek ani konec. Tyto proudové čáry jsou trajektorie k nímž je v každém bodě vektor proudové hustoty tečnou a které vymezují proudové trubice se stejným proudem např. na obr.2.92. Na tomto obrázku je $\boldsymbol{u}_v$ jednotkový vektor ve směru rychlosti nosičů náboje. Potom je průmět elementární plošky do směru rychlosti

$$\Delta_{sn} = \boldsymbol{u}_v.\Delta_s \tag{2.198}$$

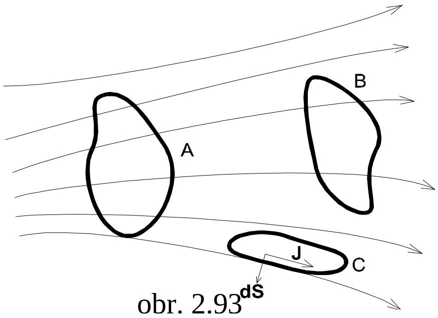
a proud ploškou

$$\Delta I = \Delta Q/\Delta t = \rho\cdot\Delta V/\Delta t = \rho\cdot\Delta_{sn}\,\Delta l/\Delta t = \rho\cdot v\cdot\Delta_{sn} \tag{2.199}$$

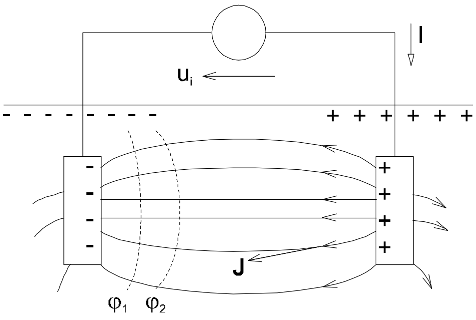
$$\mathbf{J} = \mathbf{u}_v \cdot \lim_{\Delta s_n \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta s_n} = \sigma \cdot \mathbf{v} = n \cdot e \cdot \mathbf{v} \tag{2.200}$$

kde n je počet elektronů a e náboj elektronu, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(x,y,z)$. Proud celou plochou potom bude

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.201}$$



obr. 2.93



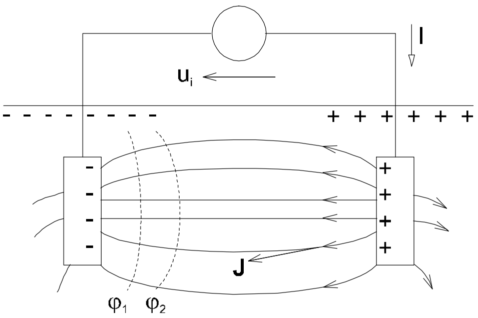
obr. 2.94

Nenulový proud I dostaneme pouze při průchodu proudové hustoty $\boldsymbol{J}$ nenulovou plochou např. v obr.2.93 plochou A. Považujeme-li průmět plochy do směru kolmého na směr proudu za nulový obr.2.93 plocha C, potom proud touto plochou bude také nulový. Příklad proudových čar v trojrozměrné oblasti (např.

v zemi) je na obr.2.94. Podobně příklad rozložení proudových čar v dvojrozměrné oblasti, tj. v případě kdy $\Delta_s = \Delta_l \cdot \Delta_h$, kde $\Delta_h \rightarrow 0$, je na obr.2.95. Potom popisujeme proudové pole, jak již bylo řečeno, plošnou hustou *K*, kde podle obr.2.96 je

$$\mathbf{K} = \mathbf{u}_v \cdot \lim_{\Delta ln \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{I}}{\Delta \boldsymbol{l}_n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \qquad (2.202)$$

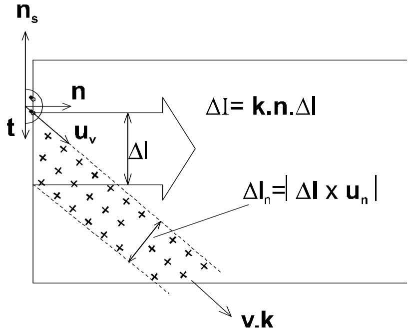
Jedná se tedy o limitní případ proudové hustoty ***J*** pro tloušťku desky $\Delta_h \rightarrow 0$ a tedy pro $\boldsymbol{J} \rightarrow \infty$. Celkový proud protékaný čarou *l* na povrchu *s* je tedy



obr. 2.95

$$\boldsymbol{I} = \int_l \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta \boldsymbol{l} = \int_l \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_S \times d\mathbf{l}) \qquad (2.203)$$

kde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_s \times \boldsymbol{t}$



obr. 2.96

Vložíme li mezi elektrody velmi tenké vodivé vlákno, můžeme analogicky psát

$$I = \tau \cdot v \qquad (2.204)$$

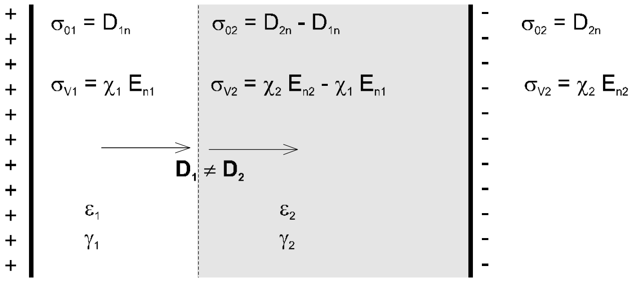
Proud ve vodivém materiálu má příčinu v přítomnosti nábojů na elektrodách. Tyto náboje vytvářejí pole ***E*** a tedy ***J*** = γ·***E***. Aby byly na elektrodách neustále doplňovány náboje, musí být někde v obvodu zařazen zdroj s přídavným polem rozdělujících sil (kap. 1.3.4). Mimo zdroj je pole potenciální ***E*** = -*grad* φ a tedy *rot* ***E*** = 0. Proto platí i

$$rot\, \gamma \cdot \boldsymbol{E} = rot\, \boldsymbol{J} = 0 \qquad (2.205)$$

a v homogenním prostředí vektor **J** netvoří víry (plošné víry jsou pouze na rozhraní). Dále platí pro stacionární proud

$$div\, \boldsymbol{J} = 0 \rightarrow div\, \boldsymbol{E} = 0 \qquad (2.206)$$

Porovnání se vztahem *div* ***E*** = ρ/ε₀ dokazuje, že uvnitř vodivé oblasti není přebytek kladných nebo záporných nábojů a vodič je po celém objemu stále neutrální.



obr. 2.97

Prochází-li vodičem proud, musí v něm být nenulová intenzita pole a dochází i k polarizaci. Vzhledem k (2.206) platí

$$div\, \kappa \cdot \boldsymbol{P} = 0 \rightarrow div\, \boldsymbol{P} = -\rho_v = 0 \qquad (2.207)$$

a objemová hustota vázaných nábojů je při stacionárním proudění nulová. Vložíme-li mezi elektrody dva materiály podle obr.2.97 (oblast 1 a 2), musí v obou (i na rozhraní s elektrodami) platit rovnost normálových složek proudové hustoty. Proudové čáry přitom samozřejmě vycházejí z elektrod kolmo a v prostoru vzdáleném od okrajů elektrod jsou kolmé i na rozhraní obou oblastí. Velikosti volných nábojů na površích elektrod musí být rovny normálovým složkám indukcí

$$|\rho_{01}| = D_{1n} \qquad |\rho_{03}| = D_{2n} \qquad (2.208)$$

na rozhraní oblastí

$$|\rho_{02}| = D_{2n} - D_{1n} \qquad (2.209)$$

Vázaný náboj se vypočte z normálové složky intenzity pole

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_v = P_n = \varepsilon_o \cdot\cdot \chi_e \cdot E_n = \varepsilon_o \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot E_n\\&\sigma_{v1} = \varepsilon_o \cdot (\varepsilon_{r1} - 1) \cdot E_{1n}\\&\sigma_{v2} = P_{2n} - P_{1n} = \varepsilon_o[(\varepsilon_{r2} - 1) \cdot E_{2n} - (er1 - 1) \cdot E_{1n}]\end{aligned}\right\} \qquad (2.210)$$

$$\sigma_{v3} = \varepsilon_o \cdot (\varepsilon_{r2} - 1) \cdot E_{2n}$$

Velikost proudové hustoty vypočteme z napětí na elektrodách

$$U = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2 = \frac{J_{1n}}{\gamma_1} d + \frac{J_{2n}}{\gamma_2} d = \frac{\gamma_2 \cdot d_1 + \gamma_1 \cdot d_2}{\gamma_1 \cdot \gamma_2} J$$

$$J = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{\gamma_2 \cdot d_1 + \gamma_1 \cdot d_2} U \qquad (2.211)$$

Potom $E_{1n} = J/\gamma_1 \quad E_{2n} = J/\gamma_2$ (2.212)

$D_{1n} = \varepsilon_1 \cdot E_{1n} \quad D_{2n} = \varepsilon_2 \cdot E_{2n}$ (2.213)

3. VELIČINY POČÍTANÉ Z ROZMĚRŮ A PARAMETRŮ PROSTŘEDÍ

V této kapitole se předpokládají základní znalosti pojmů elektrický odpor resp. vodivost, kapacita a indukčnost, v rozsahu vyučovaném v předmětech Teorie obvodů I a II. Tyto znalosti budou rozšířeny o aplikace, s nimiž se přímo v teorii obvodů nesetkáme a v praxi jsou používány.

3.1. Elektrická vodivost, elektrický odpor masivního vodiče

Čas ke studiu: 1 hodinu

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- řešit jednoduchá pole ve vodivém prostředí
- definovat pojem přechodový odpor
- počítat krokové napětí

Výklad

Makroskopická veličina elektrický odpor nahrazuje brzdící působení atomů v krystalech kovů, na které elektrony při svém pohybu narážejí. Při tom jim předávají kinetickou energii, kterou jim udělilo elektrické pole. Vznikají Joulovy ztráty, které mají formu tepelné energie. Je tedy znalost odporu materiálu a jeho převracené hodnoty - vodivosti důležitou pro dimenzování elektrických zařízení.

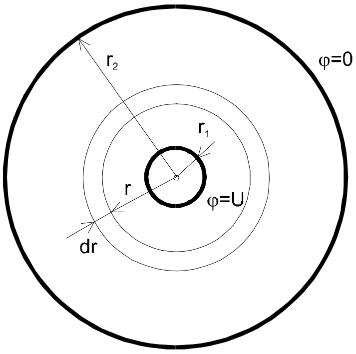
Nejsnáze se vypočte odpor u pravidelných symetrických oblastí. Při určení odporu materiálu ve tvaru hranolu nebo válce mezi dvěma elektrodami můžeme použít nejednodušší vztah známý z teorie obvodů

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\boldsymbol{s}} \qquad (3.1)$$

kde *l* je vzdálenost mezi elektrodami, tedy délka proudové trubice, *s* je příčný průřez vzorku.

Často je v praxi potřeba vypočíst **svod** (vodivost) izolace mezi žilami koaxiálního kabelu obr.3.1. Za tím účelem si v izoaci vytkneme elementární prvek tvaru mezikruží o tloušťce *dr* a šířce 2π*r* a délce *l*, kterou po rozvinutí ztotožníme s tenkým páskem. Zaoblení konců můžeme pro velmi malé *dR* zanedbat. Tím můžeme použít vztah (3.1), ale pro diferenciální veličiny, tedy ve tvaru

$$\boldsymbol{dR} = \frac{1}{\gamma}\frac{\boldsymbol{dr}}{2\pi\boldsymbol{rl}} \qquad (3.2)$$

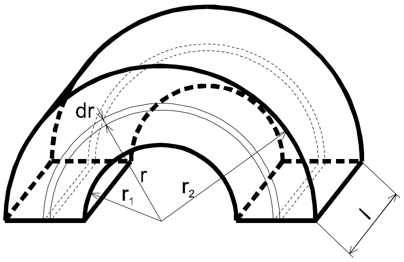


obr. 3.1

Potom

$$R = \int_{r1}^{r2} \frac{1}{\gamma} \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi \gamma l} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (3.3)$$

a svod $G = 1/R$. Většinou se udává měrný svod na jednotku délky. V uvedených vztazích potom nebude figurovat *l*.



obr. 3.2

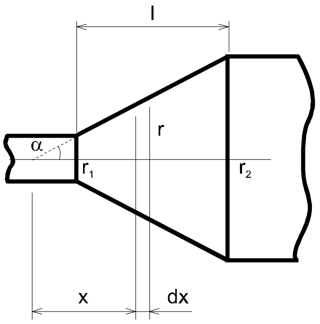
Podobný element bychom vytkli a stejný postup použili u výpočtu odporu poloviny prstence obr.3.2, pokud by elektrody byly válce dotýkající se prstence z jeho vnitřního a vnějšího poloměru a proud by tekl radiálně. Pokud by se ve stejném prstenci elektrody dotýkaly vzorku na jeho ose, tzn. proudové čáry by byly polokružnice, volili bychom sice stejný element, ale délka proudových čar by byla *πr*, tloušťka *dr* a šířka elementu zůstává *l*. Potom

$$dR = \frac{1}{\gamma} \frac{\pi r}{l \cdot dr} \qquad \Rightarrow \qquad dG = \frac{1}{dR} = \gamma \frac{l \cdot dr}{\pi r} \qquad (3.4)$$

Po integraci

$$G = \frac{\gamma \cdot l}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (3.5)$$

V některých aplikacích je potřeba vypočíst odpor spojitě se měnicího válcového vodiče např. podle obr.3.3. Na tomto obrázku je i vyznačen tvar elementu, jehož odpor je

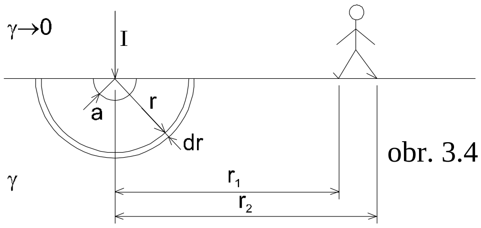


obr. 3.3

$$dR = \frac{1}{\gamma} \frac{dx}{s} = \frac{dx}{\gamma \pi r^2} \qquad (3.6)$$

$$tg\alpha = \frac{r_2 - r_1}{l} \text{ ale také } tg\alpha = \frac{r}{x} \qquad x = \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot r \Rightarrow dx = \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot dr$$

$$R = \frac{1}{\gamma\pi(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{\gamma\pi \cdot r_1 \cdot r_2} dr \qquad (3.7)$$



obr. 3.4

Častou úlohou je potřeba určení přechodového odporu uzemnění a s tím spojené určení krokového napětí v blízkosti uzemnění nebo na zem spadlého vodiče. Jako příklad určeme tyto veličiny pro uzemněnou polokouli o poloměru a (obr.3.4) pro vodivost země $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ S/m. Proudové čáry vycházejí z polokoule kolmo a šíří se paprskovitě do místa nulového potenciálu (v tomto případě do nekonečna). Přitom protínají poloviční plochu koule $s = 2 \cdot \pi \cdot r^2$, kde *r* je libovolný obecný poloměr *r* > *a*. Předpokládejme, že do země vtéká proud *I* a tok vektoru ***J*** plochou *s* bude:

$$J = \frac{I}{s} = \frac{I}{2\pi r^2} \qquad (3.8)$$

Na poloměru *r* bude

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \qquad (3.9)$$

Krokové napětí mezi poloměry r_1 a r_2, přičemž rozdíl vzdáleností $(r_2 - r_1)$ = délce kroku tj. asi 0,6m. Potom vypočteme

$$\boldsymbol{U}_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dr} = \frac{\boldsymbol{I}}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{\boldsymbol{r}_2} - \frac{1}{\boldsymbol{r}_1}\right) \qquad (3.10)$$

Definujme dále přechodové napětí, což je rozdíl potenciálů polokoule a potenciálu v nekonečnu

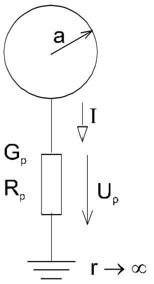
$$U_p = \lim_{r_1 \to \infty} U_{12} = \varphi_a - \varphi_\infty \qquad (3.11)$$

Získáme je tedy tak, že do (3.10) za r_2 dosadíme poloměr koule a za r_1 poloměr místa nulového potenciálu, tedy ∞. Ve skutečnosti je nutno respektovat inosféru kolem země a místo nulového potenciálu v ∞ je zjednodušením

$$\boldsymbol{U_p} = \frac{\boldsymbol{I}}{2\pi\gamma\boldsymbol{a}} \qquad (3.12)$$

Potom bude přechodový odpor

$$R_p = \frac{U_p}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma a} \qquad (3.13)$$

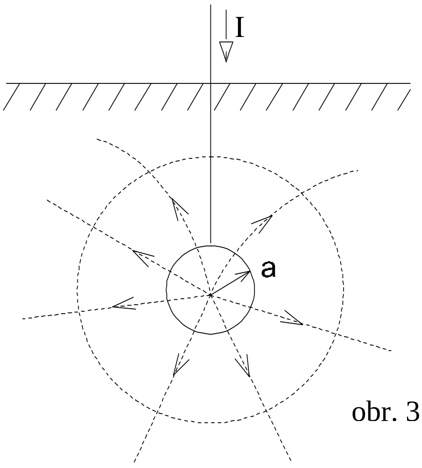


obr. 3.5

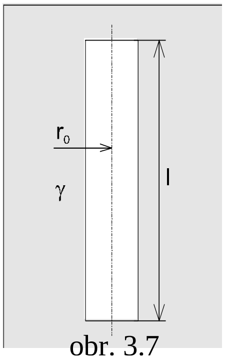
Náhradní schéma zapojení elektrody a přechodového odporu (vodivosti) je na obr.3.5.

V případě výpočtu zemnící elektrody tvaru koule (obr.3.6), která je zakopána velmi hluboko pod zemí (tak aby zemský povrch neovlivňoval příliš tvar proudového pole) použijeme stejný postup jako v předcházejícím případě, ale tok vektoru ***J*** bude přes celou kulovou plochu, tedy:

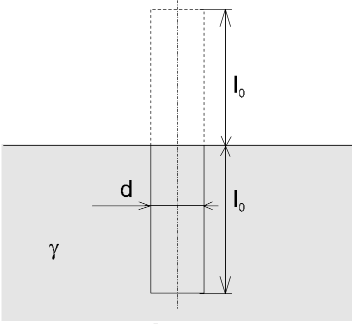
$$R_p = \frac{1}{4\pi\gamma a} \qquad (3.14)$$



obr. 3.6

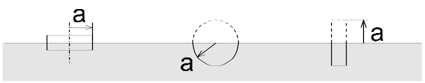


obr. 3.7



obr. 3.8

Literatura (Dědek, Dědková: Elektromagnetismus) uvádí vztahy na základě analogie s výpočtem kapacity. Kapacita tyče je



$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(1/r_0)} \qquad (3.15)$$

Záměnou $C \rightarrow G$, $\varepsilon \rightarrow \gamma$ dostáváme pro odpor tyče vztah

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma l}\ln\frac{l}{r_0} \qquad (3.16)$$

Pro tyč na povrchu země obr.3.8 uvádí stejná literatury vztahy

$l_o = l/2 \quad d = 2 \cdot r_o$

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma l_0}\ln\frac{4l_0}{d} \qquad (3.17)$$

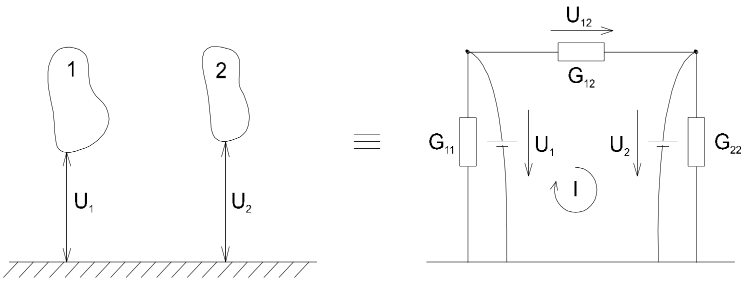
Dále uvádí teto literatura rovněž na základě analogických vztahů pro kapacitu a odpor tyto vzorce pro zemnič tvaru kruhové desky (kotouče) o poloměru *a*, umístěného hluboko v zemi. Kapacita kotouče je $C = 8 \cdot \varepsilon \cdot a$, odpor je tedy

$$R = 1/(8 \cdot \gamma \cdot a) \tag{3.18}$$

Stejný kotouč umístěný podle obr.3.9 svisle nebo vodorovně má zemní odpor

$$R = 1/(4 \cdot \gamma \cdot a) \tag{3.19}$$

V praxi je potřeba často počítat svod mezi několika elektrodami např. podle obr.3.10a. Opět využíváme analogii s výpočtem kapacit (podrobněji bude probráno dále). Vodivosti mezi elektrodami označíme jako vzájemné G_{ij}, vodivost mezi elektrodou a zemí jako vlastní G_{ii}. Vodivost je vlastně konstantou, která udává, jaká část proudu prochází mezi elektrodami při určitém napětí na elektrodách.



a)

obr. 3.10

b)

Jednotlivé proudy v obr.3.10b tedy jsou

$I_{11} = G_{11} \cdot U_1$ $\qquad$ $I_{22} = G_{22} \cdot U_2$

$$I_{12} = G_{12} \cdot (U_1 - U_2) \tag{3.20}$$

Známe-li napětí U_1, U_2 můžeme na obvod aplikovat Kirchhoffovy zákony

$$\oint_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \tag{3.21}$$

$$\oint_{l} \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} U_k = 0 \tag{3.22}$$

3.2. Kapacita

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojem kapacita
- napsat potenciálové koeficienty
- vyřešit kapacity pro jednoduchá uspořádání vodičů

Výklad

Z teorie obvodů je známo, že kapacita kondenzátoru je koeficientem úměrnosti mezi napětím na jeho elektrodách a nábojem, který je kondenzátorem jímán. Obecně lze psát

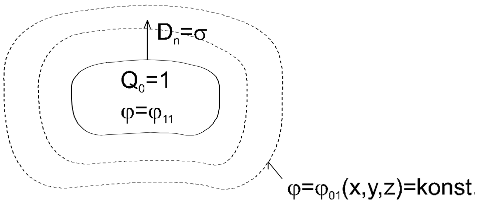
$$Q = C \cdot \varphi \qquad (3.23)$$

Přesto, že prakticky budeme vztahy pro výpočet kapacity odvozovat za použití polních veličin, je kapacita funkcí pouze **geometrických rozměrů** a **parametrů prostředí** (permitivity)**!**

$$C = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k, \ldots \varepsilon_m;\ g_1, g_2, \ldots\ldots g_k \ldots g_n),$$

kde g je obecná geometrická souřadnice. V dalších výpočtech budeme předpokládat pouze lineární prostředí, tzn. permitivity budou konstanty. U jednodušších geometrických tvarů lze kapacity určovat výpočtem, u složitějších konfigurací elektrod je často snadněji zjistit kapacitu na základě měření náboje a napětí. Přibližně lze určit kapacitu graficky - viz dále „Metoda křivočarých čtverců“, nebo některou z numerických metod.

Vlastní kapacita zvaná také kapacitou osamoceného tělesa je abstraktní pojem. Předpokládá, že v nekonečně velkém prostoru se nachází jen daný vodič. Druhá elektroda je vlastně umístěná v nekonečnu. Přivedeme-li na elektrodu obr.3.11 z nekonečna náboj Q_o = 1C bude mít elektroda proti nekonečnu potenciál $\varphi = \varphi_{11}$. Na celé ploše elektrody bude tedy celkový náboj



obr. 3.11

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot d\mathbf{s} = 1 \qquad (3.24)$$

Změníme-li náboj Q krát, změní se Q krát i potenciál, protože ve vztazích pro jeho výpočet je Q ve jmenovateli v prvé mocnině. Tedy

$$\varphi(x,y,z) = Q \cdot \varphi_{01}(x,y,z) \qquad (3.25)$$

Těleso na obrázku můžeme vzhledem k nekonečnu považovat za kouli s vystředěným poloměrem R a jeho potenciál proti nekonečnu $\varphi_{11} = Q/(4\pi \cdot \varepsilon_o R)$. Napětí mezi bodem nulového potenciálu (v nekonečnu) a tělesem je potom $U = \varphi_{11} - \varphi_\infty = \varphi_{11}$ Kapacita osamoceného tělesa při Q = 1C je

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\varphi_{11}} = \text{konst.} \qquad (3.26)$$

Větší praktický význam má **vzájemná kapacita** soustavy dvou vodivých těles (kondenzátoru). Nabijeme-li kondenzátor tak, že vodiče tvořící kondenzátor (elektrody) mají stejně velký náboj $|Q|$ opačného znaménka a je-li mezi nimi napětí U, potom vzájemná kapacita

$$C = Q/U \qquad (3.27)$$

opět závisí jen na geometrických rozměrech a parametrech prostředí. Jednotkou kapacity je Farad. Používá se většinou řádově v oblastech pF a μF.

V souvislosti s kapacitou je vhodné se zmínit o některých v praxi používaných typech kondenzátorů. Dále je tedy uveden přehled kondenzátorů, podle historického vývoje:

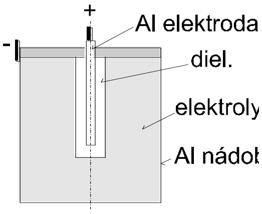
a) **vakuové** - elektrody mají ve skleněné vzduchoprázdné baňce, používaly se pro rozhlasové vysílače.

b) **vzduchové** a to konstantní i proměnné (deskové nebo válcové). Změna kapacity může být lineární nebo nelineární.

c) **slídové** - na slídové destičce jsou z obou stran stříbrné povlaky - elektrody. Tyto destičky jsou dále vloženy mezi desky z pertinaxu nebo zality do izolační ochranné hmoty.

d) **s dielektrikem z plastů**, polystyrénu nebo polytetrafluoru. Používají se na vyšší napětí.

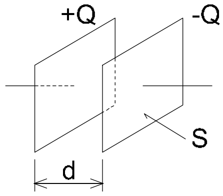
e) **s papírovým dielektrikem** - kondenzátorový papír je proložen kovovými foliemi a stočen do svitku. Svitek je uložen v trubičce z tvrdého papíru nebo kovové trubici, kde je zalit parafínem nebo jiným izolantem. Tyto kondenzátory se od kondenzátorů s běžným papírem liší tím, že mají při stejné kapacitě menší rozměry a při proražení se vypaří část elektrody.



obr. 3.12

f) **elektrolytické** kondenzátory mohou být suché nebo mokré. Dielektrikem je tenká vrstva oxidu hlinitého na hliníkové folii nebo na válcové elektrodě z hliníku. U suchých kondenzátorů jsou hliníkové folie proloženy vložkou z tkaniny nebo ze zvlášť pórovitého papíru, do nichž je nasát elektrolyt. Folie jsou stočeny do svitku, vloženy do hliníkového pouzdra nebo do trubky z tvrdého papíru a jsou tam dokonale utěsněny. U mokrých „elektrolytů“ je zápornou elektrodou válcová nádobka z hliníku, kladnou elektrodou hliníkový váleček s vrstvičkou dielektrika obr.3.12. Elektrolyt tvoří kyselina boritá, čpavková voda a glycerín. Tyto kondenzátory mají při malých rozměrech velké kapacity, ale při špatném pólování jimi protéká velký proud, mohou se přehřát a poškodit. Pro rozběh jednofázových motorků s pomocnou fází a pro zvláštní účely se používají tzv. **bipolární** kondenzátory, které mají na obou elektrodách vrstvičku oxidu hlinitého.

g) **keramické** kondenzátory mají tvar stébla, trubičky nebo disku. Elektrody jsou tvořeny pastou obsahující stříbro, která se z obou stran nanese na keramické dielektrikum a potom se vypálí. Je-li to potřeba, zesílí se elektrody pokovením.



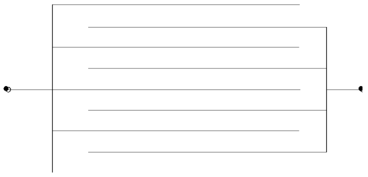
obr. 3.13

Kapacita řady typů uvedených kondenzátorů se dá řešit jako kapacita deskového kondenzátoru o více vrstvách. Vztah pro kapacitu rovinného deskového kondenzátoru odvozujeme pro velké plochy desek, kdy se dají zanedbat nehomogenity pole na krajích desek. S přípustnou přesností se odvozený vztah dá použít i pro skutečné rozměry kondenzátoru. Deskový kondenzátor je na obr. 3.13. Při odvození tedy vyjdeme z výrazu pro napětí $U = E \cdot d$, přičemž

$$E = D/\varepsilon = \sigma/\varepsilon = Q/(\sigma \cdot \varepsilon).$$

Tedy

$$\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{d}} \qquad (3.28)$$

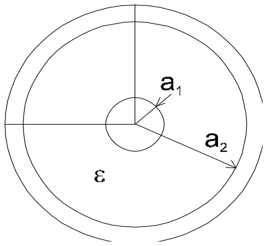


obr. 3.14

Pro více rovnoběžných desek obr.3.14

$$C = (n - 1) \cdot \varepsilon \cdot s/d \qquad (3.29)$$

kde n je počet desek kondenzátoru.



obr. 3.15

Některé typy kondenzátorů lze pro výpočet zjednodušit na válcové kondenzátory, tvořené elektrodami tvaru dvou soustředných válců a dielektrikem obr.3.15. Pole mezi těmito válci je souměrné, siločáry mají tvar paprsků, kolmých k povrchům válců. Toto pole odpovídá poli nekonečné přímky s rovnoměrně rozloženým nábojem s hustotou $\tau = Q/l$. Potenciál takového pole je ve vzdálenosti r od osy válců (např. koaxiálního kabelu)

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r + K \qquad (3.30)$$

dosadíme-li za r poloměr r_2 a za potenciál v místě r_2 nulu, vypočteme velikost konstanty

$$K = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r_2 \qquad (3.31)$$

pro místo nulového potenciálu na větším válci (plášti kabelu). Potom je napětí mezi oběma válci přímo

$$U = \varphi(r_1) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \tag{3.32}$$

Napětí jsme mohli také přímo vypočíst jako $U = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{dr}$

Potom $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(r_2 / r_1)}$ (3.33)

Při výpočtu kapacity předpokládáme vždy na jedné elektrodě náboj +*Q*, na druhé -*Q*, protože elektrický tok vycházející z jedné elektrody vstupuje celý do elektrody druhé. Při výpočtu pole sčítáme potenciály působené oběma náboji. V tomto příkladu jsme uvažovali jen náboj na vnitřní elektrodě, který je uvnitř integrační plochy, vedené v prostoru mezi oběma válci. Náboj na vnějším válci by se uplatnil teprve na integrační ploše s poloměrem $r > r_2$.

Často se uvádí jako školní úloha výpočet kapacity zeměkoule. Postupujeme přitom tak, že vypočteme kapacitu dvou soustředných koulí a poloměr vnější koule položíme rovný nekonečnu, případně přesněji poloměru spodní vrstvy ionosféry, obklopující zemi. Přitom je napětí mezi koulemi

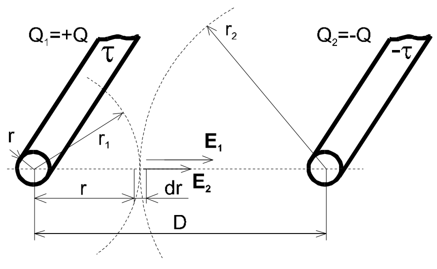
$$\boldsymbol{U} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{dr} = \frac{\boldsymbol{Q}}{4\pi\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{r}^2} = \frac{\boldsymbol{Q}}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2} \tag{3.34}$$

Kapacita kulového kond.

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \tag{3.35}$$

Kapacita zeměkoule je pro $r_2 \rightarrow \infty$

$$C = 4\pi\varepsilon_r \tag{3.36}$$



obr. 3.16

I v tomto příkladu jsme uvažovali pouze náboj na vnitřní kouli.
Tento přístup ale nelze použít např. u **dvojvodičového vedení**, tedy u vedení tvořeného dvěma paralelními nekonečně dlouhými vodiči kruhového průřezu se stejnými náboji obr. 3.16. Výška vodičů nad zemí musí být značně větší než jejich vzdálenost od sebe, abychom mohli zanedbat vliv země na průběh pole mezi vodiči. Povrchy obou vodičů tvoří ekvipotenciální plochy a oba vodiče můžeme nahradit přímkovými vodiči s náboji +τ a -τ. Pro $r \ll D$ je můžeme ztotožnit s osami vodičů (obecně to provádět nelze, jak uvidíme při rozboru metody zrcadlení). Potom jsou potenciály

na povrchu vod. 1 od vod. 1: $\varphi_{11} = (\tau/2\pi\cdot\varepsilon)\cdot\ln r + K'$

na povrchu vod. 1 od vod. 2: $\varphi_{12} = -(\tau/2\pi\cdot\varepsilon)\cdot\ln (D - r) + K'$

na povrchu vod. 2 od vod. 2: $\varphi_{22} = -(\tau/2\pi\cdot\varepsilon)\cdot\ln r + K''$

na povrchu vod. 2 od vod. 1: $\varphi_{21} = (\tau/2\pi\cdot\varepsilon)\cdot\ln (D - r) + K''$

$$U = \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{22} + \varphi_{21} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{D - r}{r} \tag{3.37}$$

Napětí bychom mohli také získat integrací

$$\boldsymbol{U} = \int_{r}^{D-r} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{dr} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \left(\int_{r}^{D-r} \frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{r}} + \int_{r}^{D-r} \frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{r}} \right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}} \tag{3.38}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln(D - r / r)} \tag{3.39}$$

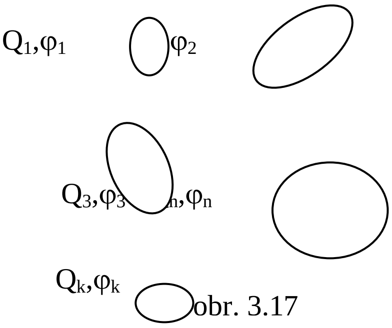
I tato kapacita je většinou udávána na jednotku délky.

❑ Vztahy mezi náboji a potenciály vodivých soustav

Potenciálové koeficienty

Předpokládejme, že máme soustavu *n* vodivých těles podle obr.3.17 nabitých náboji $Q_1 \div Q_n$ s potenciály $\varphi_1 \div \varphi_n$. Pokud je dielektrické prostředí mezi tělesy lineární, platí i mezi jednotlivými potenciály a náboji lineární vztahy. Zvýší-li se náboj na některém tělese, změní se potenciály i na dalších tělesech. Potenciál každého tělesa je tedy svázán s náboji na jiných tělesech a s nábojem vlastním rovnicemi:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \alpha_{11}\cdot Q_1 + \alpha_{12}\cdot Q_2 + \ldots + \alpha_{1k}\cdot Q_k \ldots + \alpha_{1n}\cdot Q_a \\
\varphi_2 &= \alpha_{21}\cdot Q_1 + \alpha_{22}\cdot Q_2 + \ldots + \alpha_{2k}\cdot Q_k \ldots + \alpha_{2n}\cdot Q_n \\
\varphi_k &= \alpha_{k1}\cdot Q_1 + \alpha_{k2}\cdot Q_2 + \ldots + \alpha_{kk}\cdot Q_k \ldots + \alpha_{kn}\cdot Q_n \\
\varphi_n &= \alpha_{n1}\cdot Q_1 + \alpha_{n2}\cdot Q_2 + \ldots + \alpha_{nk}\cdot Q_k \ldots + \alpha_{nn}\cdot Q_a
\end{aligned}\right\} \quad (3.40)$$



obr. 3.17

V maticovém zápisu

$$[\varphi] = [\alpha]\cdot[Q] \qquad (3.41)$$

Zde jsou α_{kk} **potenciálové koeficienty vlastní** k-tého vodiče α_{kl} **potenciálové koeficienty vzájemné** mezi k-tým a l-tým vodičem

Fyzikální význam potenciálových koeficientů zjistíme tak, že nejprve položíme v soustavě rovnic náboj k-tého vodiče $Q_k = 1$ a všechny ostatní náboje $Q_l = 0$, l = 1,2,..,n, $l \neq k$, potom dostáváme z k-té rovnice

$$\alpha_{kk} = \frac{\varphi_k}{Q_k} = \varphi_k \qquad \text{pro}\, Q_{l\neq k} = 0 \qquad (3.42)$$

α_{kk} tedy fyzikálně představuje potenciál vodiče, který je nabit jednotkovým nábojem, za podmínky, že ostatní vodiče soustavy jsou bez náboje. Jednotka je tedy $F^{-1} = V/As$.

$$\alpha_{1k} = \frac{\varphi_l}{Q_k}\varphi_l{}' \qquad \text{pro}\, Q_{l\neq k} = 0 \qquad (3.43)$$

α_{lk} je roven potenciálu l-tého vodiče, je-li k-tý vodič nabitý jednotkovým nábojem, přičemž ostatní vodiče jsou bez náboje. Jednotkou je opět $F^{-1} = V/As$.

Uvažujme, že systém je tvořen dvěma elektrodami ve tvaru soustředných koulí. Potom bude

$$\alpha_{12} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon r_{12}} \qquad \text{kde}\; r_{12} = \frac{r_1\cdot r_2}{r_2 - r_1} \qquad (3.44)$$

Podobně pro elektrody tvaru soustředných válců

$$\alpha_{12} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r_{12}} \qquad \text{kde}\; r_{12} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (3.45)$$

U geometricky pravidelných tvarů se souměrným uspořádáním je možno určit potenciálové koeficienty výpočtem, u tvaru složitějších měřením napětí a nábojů.

Koeficienty elektrostatické indukce

Lineární transformací dostaneme ze soustavy potenciálních koeficientů soustavu vyjadřující závislosti nábojů na potenciálech soustavy nabitých těles. Koeficienty úměrnosti označíme β a nazveme je **koeficienty elektrostatické indukce**. Soustava rovnic bude mít potom tvar:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \beta_{11}\cdot\varphi_1 + \beta_{12}\cdot\varphi_2 + \ldots.. + \beta_{1k}\cdot\varphi_k \ldots.. + \beta_{1n}\cdot\varphi_n \\ Q_2 &= \beta_{21}\cdot\varphi_1 + \beta_{22}\cdot\varphi_2 + \ldots.. + \beta_{2k}\cdot\varphi_k \ldots.. + \beta_{2n}\cdot\varphi_n \\ \\ Q_k &= \beta_{k1}\cdot\varphi_1 + \beta_{k2}\cdot\varphi_2 + \ldots.. + \beta_{kk}\cdot\varphi_k \ldots.. + \beta_{kn}\cdot\varphi_n \\ \\ Q_n &= \beta_{n1}\cdot\varphi_1 + \beta_{n2}\cdot\varphi_2 + \ldots.. + \beta_{nk}\cdot\varphi_k \ldots.. + \beta_{nn}\cdot\varphi_n \end{aligned}\right\} \qquad (3.46)$$

V maticovém zápisu

$$[Q] = [\beta]\cdot[\varphi] \qquad (3.47)$$

Zde jsou β_{kk} **koef. elektrostat. indukce vlastní** k-tého vodiče

β_{kl} **koef. elektrostat. indukce vzájemné** mezi k-tým a l-tým vodičem.

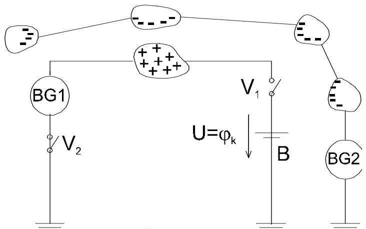
Sloupcovou matici [β] dostaneme inverzí matice [α], $[\beta] = [\alpha^{-1}]$. Obě matice jsou symetrické podle diagonály.

Fyzikální význam určíme podobně jako u potenciál. koeficientů tak, že nejprve položíme v soustavě rovnic $\varphi_k = 1$ a všechny ostatní potenciály $\varphi_l = 0$, l = 1,2,..,l → k, potom dostáváme z k-té rovnice

$$\beta_{kk} = \frac{Q_k}{\varphi_k} Q_k' \quad \text{pro} \varphi_{l\neq k} = 0 \qquad (3.48)$$

β_{kk} tedy fyzikálně představuje náboj k-tého tělesa, jestliže jsou potenciály všech ostatních těles nulové a $\varphi_k = 1$. Jednotkou je tedy Farad.

$$\beta_{lk} = \frac{Q_l}{\varphi_k} = Q_l' \qquad \text{pro}\, \varphi_{l\neq k} = 0 \qquad (3.49)$$



obr. 3.18

β_{lk} je roven náboji l-tého tělesa, je-li potenciál k-tého tělesa roven jedné, přičemž potenciály ostatních těles jsou nulové. Jednotkou je opět Farad. Koeficienty elektrostatické indukce určíme principiálně nepřímým měřením v uspořádání podle obr.3.18. k-té těleso je nabito z baterie na potenciál φ_k proti nulovému potenciálu země. Ostatní tělesa jsou spojena se zemí a jsou tedy také na nulovém potenciálu

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots. = \varphi_l = \ldots. = \varphi_n = 0,\ \varphi_k \neq 0,\ \varphi_{\text{země}} = 0$$

Postup měření:

- vodivě spojíme všechna tělesa, kromě k-tého,
- nabijeme k-té těleso na známý potenciál φ_k, následkem elektrostatické indukce budou náboje ostatních těles nenulové, a to záporné (odtud název koeficienty el. stat. indukce),
- odpojíme baterii, vybijeme k-té těleso přes balistický galvanometr BG_1, čímž změříme náboj Q_k, přitom l-té těleso ztratí svůj záporný náboj Q_l, jehož velikost změří galvanometr BG_2
- vypočteme $\beta_{kk} = Q_k/\varphi_k$, $\beta_{lk} = Q_l/\varphi_k$

Vlastní realizace měření je velmi obtížná, protože se zde projevuje parazitní vliv spojovacích vodičů a blízkých předmětů.

Vlastní a vzájemné částečné kapacity

Vyjměme ze soustavy rovnic pro koeficienty elektrostatické indukce k-tý řádek

$$Q_k = \beta_{k1}\cdot\varphi_1 + \beta_{k2}\cdot\varphi_2 + \ldots.. + \beta_{kk}\cdot\varphi_k \ldots.. + \beta_{kn}\cdot\varphi_n \qquad (3.50)$$

a definujme elektrické napětí $U_{kl} = \varphi_k - \varphi_l \rightarrow \varphi_l = \varphi_k - U_{kl}$

dosaďme do vyňatého řádku za φ_l kde $l \neq k$

$$Q_k = \beta_{k1}\cdot(\varphi_k - U_{k1}) + \beta_{k2}.(\varphi_k - U_{k2}) + \ldots.. + \beta_{kk}.(\varphi_k - U_{kk}) + \ldots.. + \beta_{kn}.(\varphi_k - U_{kn})$$

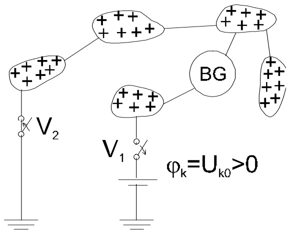
$$Q_k = -\underbrace{\beta_{k1}}_{C_{k1}}\cdot U_{k1} - \underbrace{\beta_{k2}}_{C_{k2}}\cdot U_{k2} - \ldots\ \varphi_k\underbrace{(\beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn})}_{C_{kk}} - \ldots - \underbrace{\beta_{kn}}_{C_{kn}}\cdot U_{kn}$$

Zápis všech řádků bude mít potom tvar

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= C_{11}\cdot U_{10} + C_{12}\cdot U_{12} + \ldots.. + C_{1k}\cdot U_{1k} \ldots.. + C_{1n}\cdot U_{1n}\\
Q_2 &= C_{21}\cdot U_{21} + C_{22}\cdot U_{20} + \ldots.. + C_{2k}\cdot U_{2k} \ldots.. + C_{2n}\cdot U_{2n}\\
Q_k &= C_{k1}\cdot U_{k1} + C_{k2}\cdot U_{k2} + \ldots.. + C_{kk}\cdot U_{k0} \ldots.. + C_{kn}\cdot U_{kn}\\
Q_n &= C_{n1}\cdot U_{n1} + C_{n2}\cdot U_{n2} + \ldots.. + C_{nk}\cdot U_{nk} \ldots.. + C_{nn}\cdot U_{n0}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.51)$$

kde $U_{k0} = \varphi_k - \varphi_0 = \varphi_k$ je potenciál k-tého tělesa, vůči místu nulového potenciálu, $U_{kl} = \varphi_k - \varphi_l$ je potenciální rozdíl mezi k-tým a l-tým tělesem. C_{kk} jsou **částečné kapacity** vlastní, C_{kl} **částečné kapacity** vzájemné. Všechny jsou stejně jako kapacity kondenzátorů pouze funkcí geometrických rozměrů a parametrů prostředí. Částečné kapacity lze určit u jednodušších případů výpočtem, u složitějších měřením v zapojení podle obr.3.19. Vodivá tělesa přitom spojíme navzájem, ale nikoliv se zemí, nabijeme je z baterie na známé napětí U a vypneme V_1. Potenciál všech těles je tedy stejný a je mezi nimi nulové napětí. Zapnutím V_2 přejde náboj k-tého tělesa Q_k do země přes balistický galvanometr. Potom je

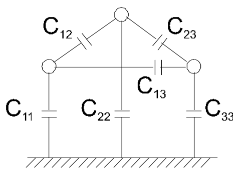
$$C_{kk} = \frac{Q_k}{U_{k0}} = \frac{Q_k}{\varphi_k} \qquad (3.52)$$



Vzhledem k tomu, že platí

$$C_{kk} = \sum_{l=1}^{n} \beta_{kl} \qquad (3.53)$$

můžeme vlastní částečné kapacity vypočíst i ze změřených β_{k1}. Přehled rozložení částečných kapacit u trojvodičového vedení nad zemí je na obr.3.20, podobně příklad částečných kapacit u jednoduchého tranzistorového zesilovače je na obr.3.21. U cívky napájené proudem vysoké frekvence můžeme také v praxi sledovat vliv částečných kapacit mezi jednotlivými závity, mezi přívody, či mezi závity a blízkými tělesy. Projeví se rezonančními frekvencemi odpovídajícími serioparalelnímu zapojení indukčnosti a kapacit.



obr. 3.20

Při splnění $\varphi_k \neq 0$ pro k = 1,2,...,n a $k \neq l$ a $\varphi_l = 0$, tedy $U_{lk} = \varphi_l - \varphi_k = - \varphi_k$ dostaneme

$$Q_l = - C_{lk}\cdot\varphi_k \text{ resp } C_{lk} = - Q_l/\varphi_k \qquad (3.54)$$

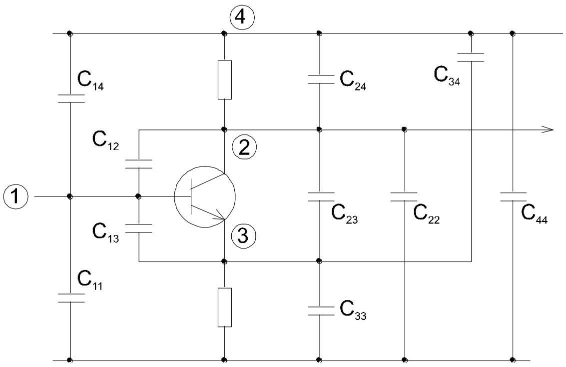
Porovnáním se vztahy pro β_{lk} zjišťujeme, že

$$C_{lk} = - \beta_{lk} \qquad (3.55)$$

a dále, protože $\beta_{lk} < 0$ musí být $C_{lk} > 0$. Vlastní i vzájemné částečné kapacity jsou tedy kladné.

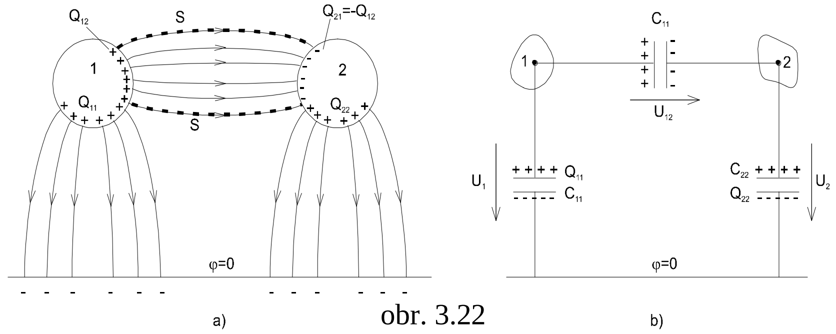
V lineárním dielektriku platí pro všechny uvedené koeficienty princip reciprocity

$$\alpha_{kl} = \alpha_{lk} \quad \beta_{kl} = \beta_{lk} \quad C_{kl} = C_{lk} \qquad (3.56)$$



obr. 3.21

Význam částečných kapacit si objasněme na příkladu dvou těles nad zemí podle obr.3.22a a jejich náhradního obvodového schématu na obr.3.22b. Použijeme přitom metodu zrcadlení, která bude vysvětlená později. Spočívá v tom, že náboje se v zemi „zrcadlí" s opačným znaménkem a stejnou vzdáleností od země. S použitím metody zrcadlení (která bude popsána dále) bude mít soustava rovnic tvar



obr. 3.22

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\cdot U_1 + C_{12}\cdot(U_1 - U_2) = C_{11}\cdot U_1 + C_{12}\cdot U_{12} \\ Q_2 &= C_{21}(U_2 - U_1) + C_{22}\cdot U_2 = C_{21}\cdot U_{21} + C_{22}\cdot U_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.57)$$

Je tedy např. část náboje elektrody 1 vázaného s elektrodou s nulovým potenciálem (zemí)

$$Q_{11} = C_1\cdot U_1 \qquad (3.58)$$

a část náboje elektrody 1 vázaný s elektrodou 2 s potenciálním rozdílem U2 - U1

$$Q_{12} = C_{12}(U_1 - U_2) \qquad (3.59)$$

Gaussova věta pro plochu označenou s' má tvar

$$Q = \oint_{S'} \sigma \cdot ds = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{12} = -Q_{21} \qquad (3.60)$$

Ze základní soustavy rovnic pro částečné kapacity je zřejmé, že soustava *n* elektrod má *n*(*n* + 1)/2 kapacit, z toho *n* vlastních.

3.3. Vlastní a vzájemná indukčnost

Čas ke studiu: 7 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- tři definice indukčnosti
- popsat rozdíl mezi vlastní a vzájemnou indukčností
- vyřešit indukčnosti pro jednoduché geometrie

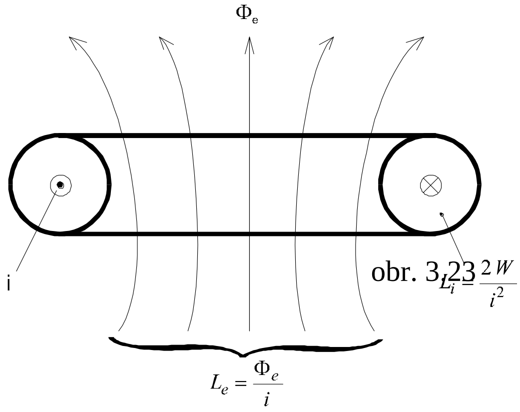
Výklad

Podobně, jako byla kapacita v elektrostatickém poli konstantou úměrnosti mezi nábojem a potenciálem, je v magnetickém poli konstantou úměrnosti mezi proudem i a spřaženým magnetickým tokem $\Psi = N{\cdot}\Phi$ indukčnost L:

$$\Psi = L{\cdot}i \qquad (3.61)$$

Tento vztah je tzv. **statická definice** indukčnosti. Kromě toho můžeme z výrazů, známých z teorie obvodů

$$u = L\cdot\frac{di}{dt} \qquad W = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (3.62)$$



obr. 3.23

odvodit definici **dynamickou**

$$L = \frac{u}{\frac{di}{dt}} \qquad (3.63)$$

a definici **energetickou**

$$L = \frac{2\cdot W}{i^2} \qquad (3.64)$$

Zatím byla řeč pouze o indukčnosti **vlastní**, kdy tok a proud se týkají pouze jednoho závitu, resp. cívky. Řez takovým masivním závitem je na obr.3.23. Zaveďme si na příkladu tohoto závitu pojmy **vnitřní** a **vnější** indukčnost. Vnější indukčnost definujme vztahem

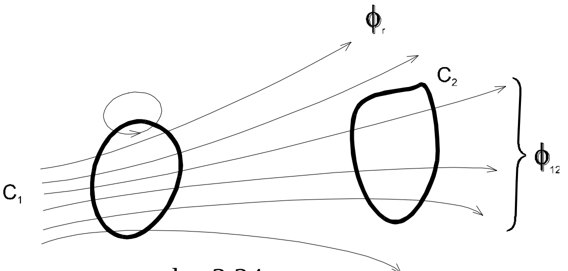
$$L_e = \frac{\Phi_e}{i} \qquad (3.65)$$

kde Φ_e je tok uzavírající se kolem vodiče, v tomto případě tok, protínající plochu závitu.

Vnitřní indukčnost L_i je definována uvnitř masivního vodiče a nelze ji již počítat ze statické definice, protože jednotlivé indukční čáry magnetického pole neobepínají celý proud. Počítáme ji proto z definice energetické. Ve většině případů jsou závity z neferomagnetického materiálu a také lze zanedbat nerovnoměrné rozložení proudu po průřezu vodiče, není to však vždy pravidlem. Celková vlastní indukčnost potom bude

$$L = L_i + L_e \qquad (3.66)$$

Dále definujme pojem **vzájemná indukčnost**. Nejjednodušší demonstrace tohoto pojmu je možné provést na dvou závitech, prostorově vzdálených tak, že mají alespoň část toku společnou. Jeli tato část toku tekoucí např. cívkou způsobena proudem i_1 v první cívce, označíme ji Φ_{12} a můžeme definovat vzájemnou indukčnost



obr. 3.24

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} \tag{3.67}$$

a naopak

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_2} \tag{3.68}$$

Obecně $$M_{k1} = \frac{\Phi_{k1}}{i_k} \tag{3.69}$$

Jednotkou vlastní i vzájemné indukčnosti je Henry.

Nachází-li se v lineárním izotropním prostředí n tenkých smyček, může protékat část toku každé této smyčky smyčkou jinou. Smyčky jsou tedy navzájem magneticky vázány a můžeme u každé dvojice definovat vzájemnou indukčnost. Pro odvození vzájemné indukčnosti využíváme s výhodou vektorový potenciál ***A***, vybuzený proudem l-té smyčky na smyčce k-té:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \boldsymbol{I}_1 \oint \frac{\mathbf{dl}_1}{\boldsymbol{r}_{1\boldsymbol{k}}} \tag{3.70}$$

Z toho

$$\Phi_k = \int\limits_{S_k} \vec{B}_k \cdot d\vec{s}_k = \oint\limits_{C_k} \vec{A}_k \cdot d\vec{l}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{C_k} \sum_{\underbrace{l=1}_{l\neq k}}^{n} I_l \oint\limits_{C_k} \frac{d\vec{l}_k \cdot d\vec{l}_l}{r_{lk}} \tag{3.71}$$

Tento vztah nelze použít pro l = k, protože r_{lk} by byl nulový a integrál by divegoval. Je to způsobeno tím, že liniový proud v nekonečně tenkém vodiči je idealizací. Přesuneme-li sumační znaménko před integrál je

$$\Phi_k = \sum_{l=1}^{n} I_l \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{C_k} \oint\limits_{C_l} \frac{dl_k \,.\, dl_l}{r_{lk}} \tag{3.72}$$

Označíme-li část integrálu M_{kl}, můžeme psát

$$\Phi_k = \sum_{l=1}^{n} M_{kl} \cdot I_l \tag{3.73}$$

Vzájemnou indukčnost mezi smyčkami k a l obr.3.24 lze potom obecně vypočíst podle **Neumannova vzorce**

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{kl}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{C_k} \oint\limits_{C_l} \frac{\mathbf{dl}_{\boldsymbol{k}} \cdot \mathbf{dl}_{\boldsymbol{l}}}{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{lk}}} \tag{3.74}$$

Tento vztah je zcela souměrný i oběma indexům, které můžeme navzájem zaměnit

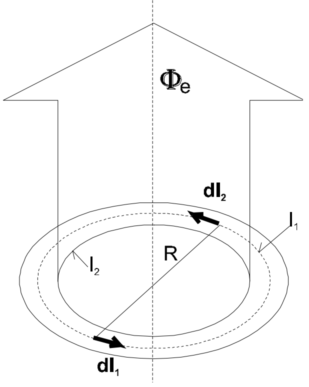
$$M_{\mathrm{kl}} = M_{\mathrm{lk}} \tag{3.75}$$

Neumannův vztah lze s výhodou použít u závitů v prostředí bez feromagnetických látek. Smysl $\boldsymbol{dl}_\mathrm{i}$ je dán smyslem proudu I_i, smysl $\boldsymbol{dl}_\mathrm{j}$ můžeme volit libovolně. Podle toho vyjde M_kl kladná nebo záporná.

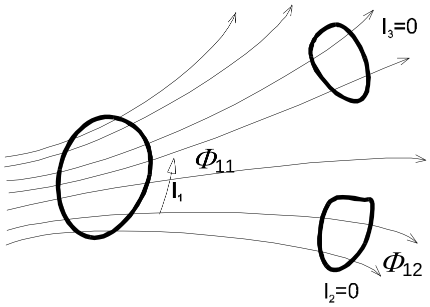
Vztah (3.73) obsahuje příspěvky všech proudů k toku Φ_k, tedy také příspěvek vlastního proudu I_k smyčky C_k. Ale vlastní indukčnost cívky

$$L_\mathrm{k} = M_\mathrm{kk} \tag{3.76}$$

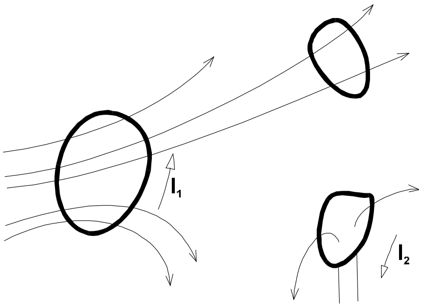
nemůžeme z již uvedených důvodů (r_kl = 0) počítat přímo podle Neumannova vztahu (3.74), ale můžeme tento vztah použít za jistého zvoleného předpokladu. Totiž toho, že nepovažujeme vodič za liniový, tedy nekonečně tenký, ale počítáme s jeho konečným průřezem - obr.3.25.



obr. 3.25



obr. 3.26 a



obr. 3.26 b

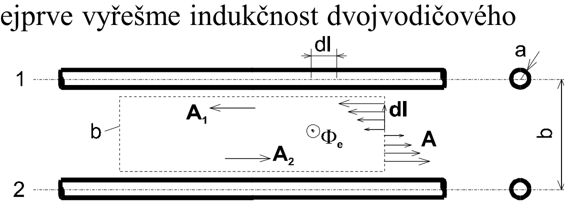
Předpokládejme dále, že proud vodičem je soustředěn do osy vodiče (element dl_1). Plochou smyčky protéká vnější pole Φ_e a vnější vlastní indukčnost vypočteme stejně, jako bychom počítali vzájemnou indukčnost kruhového závitu, jehož element je označen dl_1 a závitu s elementem dl_2, tedy podle (3.74)

$$\boldsymbol{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\boldsymbol{dl}_1 \cdot \boldsymbol{dl}_2}{\boldsymbol{r}_{12}} \tag{3.77}$$

Podobně jako jsme zavedli pojem částečná kapacita, můžeme definovat i **částečné** (dílčí) **indukčnosti**, příslušející dílčím tokům (souborům indukčních trubic). Např. podle obr. 3.26 můžeme tok Φ_{11} rozdělit na společný tok protékající cívkou 1 a 2: Φ_{12} a dále tok rozptylový $\Phi_{1\mathrm{r}} = \Phi_{11} - \Phi_{12}$. Nyní můžeme zavést další pojem **rozptylová indukčnost**

$$L_{1r} = \frac{\Phi_{1r}}{i_1} \tag{3.78}$$

V praxi má velký význam výpočet **indukčnosti vedení**. Nejprve vyřešme indukčnost dvojvodičového vedení (dvojlinky) podle obr.3.27. Délka takového vedení je mnohem větší než vzdálenost vodičů *b*. Vytkněme si v prostoru mezi vodiči uzavřenou integrační dráhu (na obr.3.27 čárkovaně). V libovolné vzdálenosti *r* od osy vodiče je vektorový potenciál



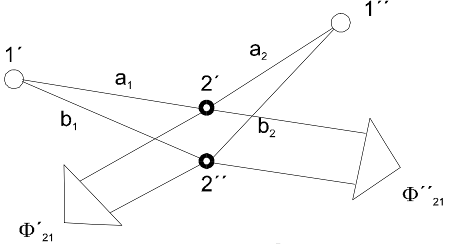
obr. 3.27

$$A = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \tag{3.79}$$

Na povrchu vodiče 1

$$A_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \ln \frac{1}{a} - \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \ln \frac{1}{b} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \tag{3.80}$$

Na povrchu druhého vodiče bude vektorový potenciál stejné hodnoty, ale opačného směru. Integrál po čárkované dráze se rozpadá na integrály po čtyřech úsecích 1 ÷ 4, přičemž na úsecích 3 a 4 je ***A*** kolmý na ***dl*** a hodnota integrálu skalárního součinu těchto vektorů je nulová. Potom je



obr. 3.28

$$\Phi_e = \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = 2\cdot \boldsymbol{l}\cdot \frac{\mu_0\cdot \boldsymbol{I}}{2\pi}\ln\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \qquad (3.81)$$

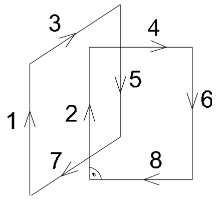
a vnější indukčnost vedení

$$L_e = \frac{\Phi_e}{I} = \frac{\mu_0\cdot l}{\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad (3.82)$$

Vzájemnou indukčnost mezi dvěma dvojvodičovými vedeními podle obr.3.28 vypočteme tak, že vyřešíme magnetické toky od vodičů 1‘ a 1‘‘ , superpozicí je sečteme nebo odečteme (podle vzájemné polohy obou vedení) a podělíme budicím proudem protékajícím vedením 1. Při výpočtu obou složek toků nejprve vypočteme tok procházející elementární ploškou, tedy části plochy mezi 2‘ a 2‘‘ a integrujeme ji přes celou plochu. Pozor, je třeba vzít v úvahu, že pro výpočet toku se uplatní vlastně jen průmět plochy do vektoru ***B***, nebo naopak průmět vektoru ***B***, kolmý na plochu smyčky 2. V každém místě této plochy je *B* i *H* jiné v závislosti vzdálenosti tohoto místa od budicího vodiče.

Dále je nezbytné alespoň se zmínit o **metodě úseků** pro výpočet indukčnosti. Jedná se vlastně o použití Neumannova vztahu pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou smyček složených z přímých úseků konečné délky, např. podle obr.3.29. Na tomto obrázku jsou dva obdélníkové závity navzájem na sebe kolmé. Příspěvky úseků navzájem kolmých se neuplatní, protože nemají společné toky. Vzájemná indukčnost rovnoběžných vodičů obr.3.30 se vypočte podle vztahu

$$M_{12} = \pm\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{d\vec{x}_1\cdot d\vec{x}_2}{r_{12}} = \pm\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^1 dx_1\int_0^1\frac{dx_2}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+y^2}}$$



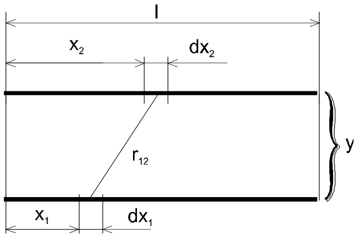
obr. 3.29

Zavedeme substituci $x = x_2 - x_1$

a tedy $\int\frac{dx}{x^2+y^2} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)+K$

$$M_{12} = \pm\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int_0^1 \ln\left[1-x_1+\sqrt{(1-x_1)^2+y^2}\right]-\int_0^1 \ln\left[x_1+\sqrt{x_1^2+y^2}\right]-\right\} = ...$$

$$..... = \pm\frac{\mu_0}{4\pi}\left[y-\sqrt{1^2+y^2}+1\cdot\ln\left(\frac{1+\sqrt{1^2+y^2}}{y}\right)\right]$$



obr. 3.30

Z takto vypočtených dílčích indukčností vypočteme celkovou vzájemnou indukčnost řešených závitů

$$M = M_{12} - M_{16} + M_{25} - M_{56} \qquad (3.83)$$

Podobně jako jsme řešili vnější indukčnost tenkého kruhového závitu tím, že jsme koncentrovali proud do tenkého vodiče v ose závitu, můžeme řešit i vlastní indukčnost obdélníkového závitu. Vlastní indukčnost jednoho úseku rozepíšeme jako vzájemnou indukčnost podle Neumannova vzorce

$$\boldsymbol{L} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint d\mathbf{l}\cdot\int_{l_k}\frac{d\mathbf{l}'}{\boldsymbol{R}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\int_{l_k} d\mathbf{l}\cdot\int_{l_l}\frac{d\mathbf{l}}{\boldsymbol{R}} \qquad (3.84)$$

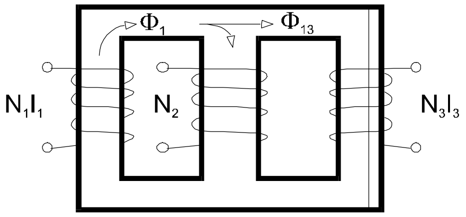
neboli

$$L = \sum_{k=1}^{n}\cdot\sum_{l=1}^{n} L_{k1} \qquad (3.85)$$

Přitom integrujeme pro k ≠ l po osách vodičů, pro k = l po ose a po površce cívky.

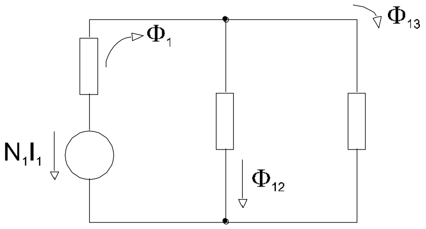
Nakonec vypočtěme vlastní a vzájemnou indukčnost jednoduchého magnetického obvodu podle obr.3.31. Předpokládáme, že se budeme pohybovat v přímkové části magnetizační charakteristiky a magnetická permeabilita je konstantní. Nakresleme náhradní odporové schéma, jak je na obr.3.32.

Magnetický tok $$\Phi_1 = \frac{N_1 \cdot I_1}{R_{m1} + R_{m2} \cdot R_{m3} / \left(R_{m2} \cdot R_{m3}\right)}$$



obr. 3.31

≡



obr. 3.32

Vlastní indukčnost cívky navinuté na sloupku 1 bude

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \frac{N_1^2 \cdot \left(R_{m2} \cdot R_{m3}\right)}{R_{m1} + R_{m2} + R_{m1} \cdot R_{m3} + R_{m2} \cdot R_{m3}} \qquad (3.86)$$

Pro výpočet vzájemné indukčnosti např. mezi cívkami na sloupcích 1 a 3 potřebujeme vypočíst, jaká část toku Ψ_1 prochází cívkou na sloupku 3, tedy tok Φ_{13}. Za tím účelem využijeme Hopkinsnův zákon $\Phi_1 = \Phi_{12} + \Phi_{13}$ a vztah, který vyplývá z rozdělení toku sloupky v nepřímém poměru jejich odporů $\Phi_{13} \cdot R_{m3} = \Phi_{12} \cdot R_{m2}$

Z těchto rovnic vypočteme

$$\Phi_{13} = \frac{N_1 \cdot I_1 \cdot R_{m2}}{R_{m1} \cdot R_{m2} + R_{m1} \cdot R_{m3} + R_{m2} \cdot R_{m3}}$$

$$M = \frac{\Psi_{13}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot N_3 \cdot R_{m2}}{R_{m1} \cdot R_{m2} + R_{m1} \cdot R_{m3} + R_{m2} \cdot R_{m3}} \qquad (3.87)$$

3.4. Vzájemné rušení elektrických zařízení

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit způsoby vzájemné vazby elektrických obvodů
- definovat pojem EMC
- popsat možné způsoby odstranění nebo omezení interferenfe

Výklad

❑ Elektromagnetická kompatibilita EMC

Rozšiřující se množství elektrických přístrojů, profesionálně i amatérsky využívaných vysílaček, různých přenosných ručních nebo mobilních telefonů, zapalování aut apod. způsobují v prostředí určeném pro život a pro přístroje usnadňující tento život elektromagnetické zamoření. Prvotním úkolem konstruktérů elektrických přístrojů je eliminovat vliv tohoto „elektromagnetického smogu“ na životní funkce lidského organismu, včetně vlivů psychických, dalším úkolem je omezit ovlivnění jiných elektronických zařízení vnějším rušením. Zvláště citlivá na elektromagnetická pole je výpočetní technika. Škody při selhání systému (odstavením počítačů, ztrátou dat), např. po úderu blesku bývají 10 ÷ 100 krát větší než přímé škody. Čím rychlejší jsou počítače, tím jsou zranitelnější a tím menší rušení může způsobit chybu v hard- nebo softwaru.

Vliv elektromagnetického rušení může být zanášen do zařízení po vedení galvanickou, kapacitní nebo induktivní vazbou nebo vlivem šíření vln volným prostorem. Nejen konstruktéři techniky, která rušení produkuje, ale i konstruktéři zařízení, které by rušením mohlo být ovlivněno musí při svých návrzích brát v úvahu zodolnění svých výrobků proti vlivům elektromagnetických polí. Každý odklad při rozhodování o nasazení ochrany proti účinkům elektromagnetického rušení a pulsního přepětí u počítačových sítí se může stát osudným. Zatímco menší intenzity rušení se mohou projevit pouze zamrznutím počítače, „spadnutím“ počítačové sítě, ztrátou přenášených dat, zabloudění jinak spolehlivého programu apod., větší intenzity (např. způsobené indukcí při úderu blesku) mohou způsobit fyzické zničení všech síťových karet, zdrojů, videokaret apod. Situace může vést i ke zničení firmy.

Mezi nejčastější typy rušení v sítích patří vf rušení a pulsní přepětí. Vysokofrekvenční rušení má svůj původ především v činnosti vysílačů, mobilních telefonů, ale i radarů (např. v blízkosti řek a letišť) a z nedostatečně odrušených elektrospotřebičů. Může znemožnit přenos dat a v extrémních případech způsobit i výpadek činnosti mikroprocesorových systémů. Přepětí pulsní může mít jak rušivé, tak ničivé následky. Jako pulsní přepětí označujeme krátké pulsy na vedení s trváním několik ns až ms, jejichž amplituda překročí jmenovité napětí na vedení o desítky procent nebo až o několik řádů (např. 1000 krát).

Nejčastějším zdrojem přepětí a obecně rušení v soustavě nn napájení je vedle malých spotřebičů (zářivky, kopírky) především činnost velkých místních elektrických spotřebičů, zejména spouštění těžkých motorů (válcovací stolice, výtahy), indukční ohřevy apod. Ke zdrojům pulsního přepětí patří i činnost vypínačů všech druhů - podle charakteru spotřebiče se při vypnutí objeví v síti přepětí 1,5 ÷ 3 násobku jmenovité hodnoty (např. u startéru zářivek je $U_{\mathrm{max}} = 3 \cdot U_{\mathrm{jm}}$, u ss relé $U_{\mathrm{max}} = 20 \cdot U_{\mathrm{jm}}$). Pulsy mohou dosahovat hodnot od několika stovek voltů (kopírky, mrazáky, zářivky, halogénky) až po kV u některých motorů.

K vnějším průmyslovým zdrojům rušení patří především přepínací jevy ve vn a vvn rozvodech. Na vedení při přepínání vn a vvn vznikají pulsy s charakteristickou délkou náběžné hrany 10ns, dosahující v absolutních hodnotách až kV. Tyto pulsy se šíří po vedení a přenášejí se do rozvodů nn přes transformátory především kapacitní vazbou. K vnějším zdrojům rušení patří i atmosférické výboje ve formě přímého zásahu blesku nebo indukcí.

U indukovaného přepětí si musíme uvědomit, že rozdíl mezi venkovním a vnitřním vedením je dán pouze stínícím účinkem zdí budov. Útlum zdí může být v některých případech (zděné budovy, montované dřevěné stavby) minimální a rozdíl mezi venkovním a vnitřním vedením je pak dán pouze tím, že vnitřní vedení nemůže být přímo zasaženo bleskem. U železobetonových staveb je stínící účinek armovacího železa diskutabilní. Spoje armatury jsou zkoušeny totiž pouze z hlediska statické pevnosti a ne z hlediska elektrické vodivosti. Při elektromagnetické indukci se pak budova s Fe armaturou chová jako složitá struktura rezonátorů, vzájemně oddělených vysokými impedancemi nedostatečných svárů. V tomto případě se může ve vedení nataženém podél armovacích drátů vlivem rezonančních jevů naindukovat větší přepětí než ve vodiči „nestíněném“. Platí zásada: špatné, či nedokonale provedené stínění je horší než žádné.

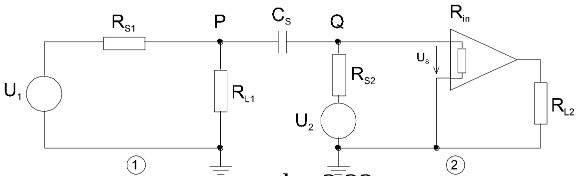
Nejsilnějším zdrojem přepětí je blesk, který může způsobit přepětí 100kV až 1MV. Indukční účinky blesku způsobí přepětí až desítky kV. Ochranu proti úderům blesku dělíme na vnitřní a vnější.

Vnější ochranu tvoří bleskosvodná soustava - vertikální Franklinovy tyče spojené zemniči s dobrým uzemněním. V některých případech se vytváří u důležitých budov bleskosvodná síť, která snižuje účinky přímého zásahu budov tím více, čím je hustější. Modernějším prostředkem ochrany než zahušťování bleskosvodné sítě je použití aktivního bleskosvodu. Francouzská firma Helita vyvinula systém, který je aktivován vysokou intenzitou elektrického pole. Po aktivaci tento bleskosvod vysílá k vyvíjejícímu se blesku vstřícný výboj a vychýlí blesk ke špičce jímací tyče bleskosvodu. Poloměr ochrany aktivního bleskosvodu může být až 25-násobek ochranného poloměru klasického bleskosvodu Franklinova typu, je tedy HELITA také, zejména u členitých budov, levnější.

Vnitřní ochranu proti účinkům blesku, tj. proti atmosférickému i průmyslovému přepětí, tvoří soustava svodičů bleskových proudů a přepěťových ochran, založená na nelineárních prvcích, které při vzrůstu napětí nad jmenovité napětí snižují v extrémně krátkém čase svůj odpor a svádějí přepětí na ochranný vodič.

U ochrany proti přepětí platí pravidlo, že zařízení nebo systém musí být chráněno plně nebo vůbec. Velmi časté jsou případy, kdy opomenutím ochrany jediného datového vstupu do serveru (např. spojení se vzdálenou tiskárnou) dojde při úderu blesku, nebo při větší poruše v napájecí síti, ke zničení nejen tohoto nechráněného vstupu, ale i dalších I/O karet, případně celé základní desky počítače. Komplexnost ochrany zařízení pak znamená ochranu všech datových vstupů proti přepětí a 3 stupňovou ochranu napájecích rozvodů. Poslední stupeň této ochrany (ochrana zásuvky) bývá doplněn vf filtrem.

☐ Elektromagnetická interference elektronických obvodů



obr. 3.33

V této kapitole využijeme znalosti z kapitol předcházejících, které se dotýkají kapacit a indukčností. Nežádoucí kapacitní spojení mezi dvěmi elektronickými obvody může představovat zásadní problém. Tvoří spolu s nežádoucími indukčními vazbami dílčí problém zkoumání **elektromagnetické interference**. Problém spočívá spíše než v přesném řešení polí v minimalizování nežádoucích vazeb. Teorie elektromagnetického pole nabízí řadu zkoumatelných případů elektromagnetické interference a techniky jejich zpracování.

Velmi častá kapacitní vazba může být způsobena existenci parazitních kapacit mezi souběžnými vodiči (rušícím a rušeným) nebo obecně kapacitním působením jednotlivých částí konstrukce. Můžeme definovat tři základní varianty působení:

a) ovlivňující a ovlivňovaný obvod jsou galvanicky oddělené,

b) ovlivňující a ovlivňovaný obvod mají společný vztažný obvod,

c) obvody jsou ovlivňované přes kapacitu vůči zemi.

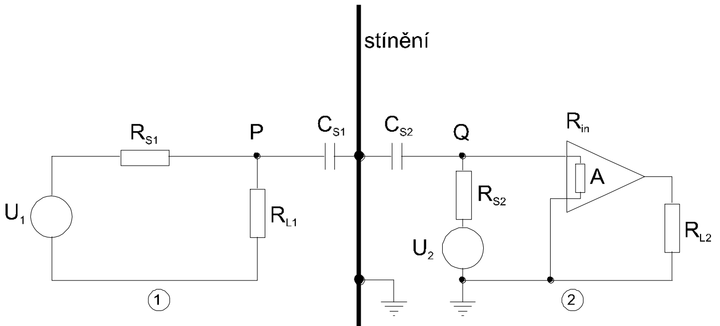
Jednoduchý případ sdružení dvou obvodů parazitní kapacitou je ukázán na obr. 3.33. Obvody 1 a 2 jsou spojeny parazitní kapacitou C_s a běžnou zemí. Parazitní kapacita je malá, běžně řádu pF, takže její impedance ($X_s = 1/j\omega C_s$) je vysoká, ale klesá se stoupající frekvencí. U_1 je napětí zdroje, vlivem interference ovlivňující obvod 2. Proud, tekoucí kapacitorem je malý ve srovnání s proudem v R_{L1}, takže rušivý signál který se objeví na vstupu zesilovače je aproximován vztahem

$$U_s = \frac{R_{L1}}{R_{s1} + R_{L1}} \frac{R'_{in}}{X_s + R'_{in}} U_1 \qquad (3.88)$$

kde $X_s = 1/j\omega C_s$ a $R'_{in} = (R_{s2} \cdot R_{in})/(R_{s2} + R_{in})$. Rušivé napětí dáno touto rovnicí je srovnáváno s napětím signálu na zesilovači

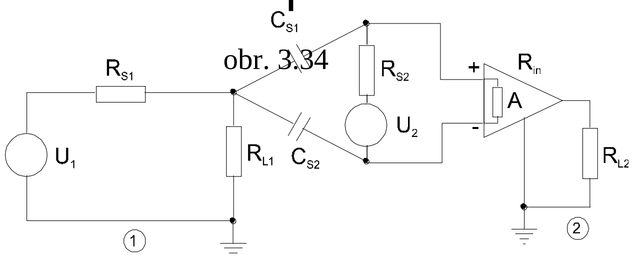
$$U_{sig} = U_2 \cdot R_{in}/(R_{s2} + R_{in}) \qquad (3.89)$$

Z rovnice (3.88) je zřejmé, že rušivý signál je největší, když je impedance zdroje R_{s1} nízká a efektivní vstupní impedance druhého obvodu R'_{in} je vysoká. Indikace správné velikosti kapacitance která může působit obtíže může být získána, když předpokládáme, že obvod 1 je především střídavý. R_{s1} je potom velmi malý. Jestliže je R'_{in} = 1MW a U_s = 1mV, je Z_s přibližně 2,4.10^{14} Ω, což odpovídá při 50 Hz parazitní kapacitě řádu 10^{-17} F.



obr. 3.34

Kapacitní sdružení mezi obvody může být redukováno položením uzemněné roviny mezi obvody podle obr.3.34. Parazitní kapacita je rozdělena do dvou částí v sérii, jejichž jeden společný bod je uzemněn. V praxi je tomu tak, že zatímco stěna kompletně uzavírá jeden z obvodů, je stále mezi body P a Q zbytková kapacita přímo je spojující, „obtékající“ stěnu. Dostatečně efektivního stínění lze dosáhnout dílčím ohrazením prováděným tak, že ohrazení přeruší většinu siločar probíhajících z bodu P do Q. Podstatné je, že stěna je uzemněna, na druhé straně je bod P spojen s bodem Q kapacitou C_{s1} v sérii s C_{s2} bez signálové cesty k zemi z těchto bodů.



obr. 3.35

Pokud je vyžadováno velmi dobré odstínění el.polí nízkých frekvencí, musí být užita krabička z vodivého materiálu. Protože všechny zdroje polí leží vně krabičky a ta musí být ekvipotenciální plochou, je teoreticky uvnitř pole nulové. Taková krabička je známá pod názvem **Faradayová klec**. V praxi musí být sebedokonalejší krabička opatřena dírami pro přívody a vývody, které snižují stínící efekt. Podobně bude záviset stínící účinek na kvalitě spojů při výrobě krabičky. **Efektivita elektrického stínění** je definována jako poměr hodnoty elektrického pole se stíněním v určitém bodě k hodnotě elektrického pole s odejmutým stíněním v témže bodě. Obvykle je vyjadřována v dB. Stínění vf pole bude probráno v souvislosti s šířením elmag vln.

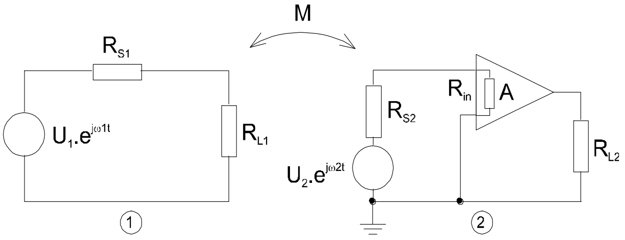
Efekt kapacitního sdružení může být také redukován užitím diferenciálního zesilovače, když je zdroj U_2 izolován od země - viz obr. 3.35. Parazitní kapacity C_{s1} a C_{s2} jsou často přibližně stejné a tak je rušivý signál na normálním a invertujícím vstupu zesilovače přibližně stejný. Jestliže má zesilovač vysoký činitel potlačení souhlasného napětí u diferenčního vstupu, potom se k užitečnému signálu připočte jen jejich rozdíl. Přidání uzemněného krytu dále ještě více redukuje parazitní kapacitní sdružení a nežádoucí signál. Zdroj v obvodu 2 může být měnič (převodník, čidlo), umístěný v jisté vzdálenosti od zesilovače. V tomto případě musí být přívody stíněny, stejně jako zesilovač. Kapacitní vazby mohou nastat také mezi vstupem a výstupem zesilovače. Když k tomu dojde, může způsobit kladná zpětná vazba oscilaci obvodu, takže je opět použito stínění.

Podobný problém může vyvstát u indukčního sdružení. Obr.3.36 ukazuje příklad jednoduchého sdružení dvou obvodů jejich vzájemnou indukčností M. Jestliže protéká obvodem 1 střídavý proud, produkuje tento proud magnetický tok, který může být spojen s obvodem 2. Pro jednoduchost předpokládejme, že I_1 je mnohem větší než I_2, takže

$$I_1 = \frac{U_1}{R_{s1} + R_{L1}} e^{j\omega 1t} \qquad (3.90)$$

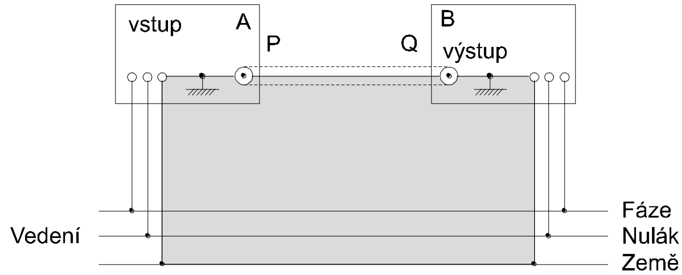
a elektromotorické napětí, indukované v obvodu 2 je

$$U_i = -M \frac{dI_1}{dt} = -\frac{j \cdot \omega_1 \cdot M \cdot U_1}{R_{s1} + R_{L1}} e^{j\omega 1t} \qquad (3.91)$$



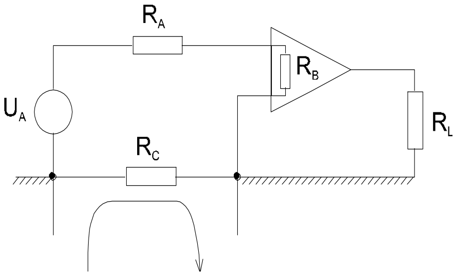
obr. 3.36

Toto napětí se sčítá se signálem obvodu 2. Interference je nejhorší, když je U_1 velké a smyčková impedance obvodu 1 je malá. Nejběžnější případ nastává, když obvod 1 reprezentuje síť, pak se jeví jako nežádoucí 50Hz síťový brum. V tomto případě není možné redukovat interferenci změnou U_1 nebo (R_{s1} + R_{L1}), takže soustředíme úsilí do snížení *M*. K tomu musíme úměrně snížit magnetický tok, produkovaný obvodem 1, který je spřažen s obvodem 2. Strategie může vypadat takto:



obr. 3.37

Zmenšíme plochu obvodu 2. Pokud je zdrojem signálu U_2 převodník ve větší vzdálenosti od zesilovače, může být zmenšení plochy dosaženo stočením (zkroucením) přívodních vodičů.



obr. 3.38

Natočením obvodu 2 tak, že jeho rovina je rovnoběžná s tokem, produkovaným obvodem 1. Tímto natočení lze snížit spřažený tok až na nulu. Zvláště je to užitečné, jestliže jsou oba obvody ve stejné krabici ve fixované pozici.

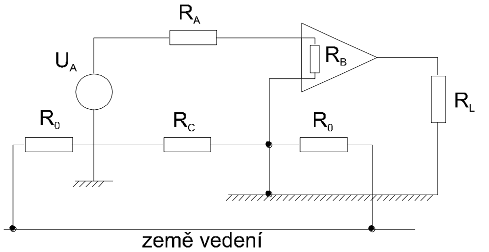
Vložení stínicí desky z materiálu o vysoké permeabilitě mezi oba obvody. Užívá se speciální permaloy s relativní permeabilitou okolo 10^5 . Tato metoda je účinná pouze pro nízké frekvence.

Zvláštní potíže v elektromagnetické interferenci jsou způsobeny **zemní smyčkou**. Obr.3.37 ukazuje typickou situaci tohoto problému. Dva elektronické přístroje *A* a *B* jsou připojeny na síť třížilovým kabelem, jehož zemní vodič je připojen ke kostře přístrojů. Přístroje jsou tedy spojeny navzájem koaxiálním kabelem, jehož stínění je spojeno s kostrami přístrojů, které je chrání před kapacitní interferencí. Tímto uspořádáním vznikají uzavřené zemní smyčky, nakresleny v příčném řezu na obr.3.37. Smyčka má malý odpor a jsou v ní indukovány velké proudy jak od toku sítě, tak od jiných zdrojů. Indukovaný proud I_i teče přes rezistanci pláště koaxiálního kabelu R_c, jak je zřejmé z obr.3.38. To je zdrojem rušivého potenciálního rozdílu mezi *P* a *Q*, který je přičítán k napětí signálu U_A. Jsou možné dvě řešení tohoto problému:

1. Přerušení zemní smyčky tak, že ji nemůže protékat proud. To není ovšem tak jednoduché, jak se to jeví. Rozpojení země vedoucí z kolíku *R* nebo *S* je velmi nebezpečné, protože se na kostře může objevit nebezpečné smrtelné napětí. Toto řešení je možné při permanentním uzavření přístrojů *A* a *B* do stejné přístrojové skříně. Ideální by bylo, kdyby od země k libovolnému bodu mohla vést jen jedna cesta. Alternativou může být rozpojení stínění koaxiálního kabelu na svorce *P* s tím, že signál z rozpojeného místa sleduje cestu zemí *PSRQ.* Vzájemná indukčnost mezi obvodem a síti je potom malá.

2. Zvýšení odporu zemní smyčky. Můžeme to uskutečnit vložením rezistoru mezi zem a svorku každého přístroje, jak je vidět na obr.3.39. Jestliže je doplněný rezistor R_D mnohem větší než R_C,

potom je proud cirkulující v zemní smyčce snížen. Nežádoucí napětí objevující se na odporu R_C je sníženo přibližně s faktorem $R_C/2 \cdot R_D$. Je však důležité, aby R_D byl natolik malý, aby každá část zařízení, které je možné se dotknout, byla chráněna před nebezpečným dotykovým napětím!!! Jestliže $R_C = 0{,}1\Omega$ a $R_D = 50\Omega$, pak hlavní pojistka v každém přístroji má být 250 mA. Potom napětí na svorce *P* nebo *Q* nemůže převýšit 12,5V.



obr. 3.39

Často se interferenční zdroje rozdělují podle časového průběhu rušivého napětí. Periodické analogové průběhy vznikají např. jako vyšší harmonické různých funkčních signálů. Jiné zdroje vytváří tzv. spojité rušení (nemůže být považováno za posloupnost oddělených jevů). Impulsní průběhy jsou např. náhodně vznikající ojedinělé impulsy při elektrostatických výbojích, spínacích procesech, mechanických kontaktech apod. Naproti tomu kvazipulsní průběhy jsou superpozicí rušení spojitého a impulsního a jsou produkovány např. tyristorovými střídači.

Mezi nejčastější typy rušení v sítích patří vysokofrekvenční rušení (vysílače, mobilní telefony, radary, neodrušené el. spotřebiče) a impulsní přepětí. V počítačové technice může vf rušení znemožnit přenos dat a v extrémních případech způsobit i výpadek činnosti mikroprocesorových systémů. Impulsním přepětím označujeme krátké pulsy na vedení s trváním několika ns až ms, jejichž amplituda překročí jmenovité napětí na vedení o desítky procent nebo o několik řádů. Impulsní přepětí může mít pro výpočetní techniku na rozdíl od vf rušení jak rušivé tak ničivé následky.

Velmi rozsáhlou a důležitou oblastí je měření elektromagnetické interference. Zahrnuje měřicí metody a postupy pro kvantitativní hodnocení vybraných parametrů hlavně na rozhraních zdrojů a přijímačů rušení.Kromě měření se v současné době rychle rozvíjí i oblast testování elektromagnetické odolností objektů pomocí tzv. simulátorů rušení. Testování se provádí nejen na hotových zařízeních, ale i v průběhu jejich vývoje.

4. ENERGIE A SÍLY V ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍCH

4.1. Energie v elektrostatickém poli

Čas ke studiu: 5 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat vztahy pro energii bodových nábojů a nabitých těles
- určit hustoty energií
- vyřešit síly v jednoduchých uspořádáních zdrojů pole

Výklad

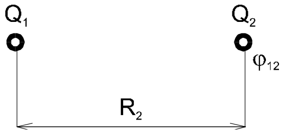
Při definování potenciálu elektrického pole jsme se setkali se souvislostí pojmů potenciál, náboj a práce. Na základě těchto znalostí můžeme napsat, že energie elektrostatického pole W_e je rovna práci, kterou vykonají vnější síly při přemístění nábojů z nekonečna do jejich konečné polohy**.**

Vlastní energie bodového náboje, tedy náboje konečné velikosti na nosiči prostorově nulové velikosti by měla být nekonečná. Jedná se o idealizaci praktických úloh, kterou v tomto smyslu v praktických úlohách neužíváme.

Energie pole dvou bodových nábojů

Na obr.4.1 jsou nakresleny dva bodové náboje. Přivedením náboje Q_1 do prostoru se v místě náboje Q_2 od náboje Q_1 vytvoří potenciál φ_{12}. Síla pole od náboje Q_1 se snaží náboj Q_2 přesunout do místa nulového potenciálu, tj. do nekonečna. Pokud by byl tento přesun úspěšný spotřebovala by se práce pole náboje Q_1. Vykonaná práce je rovna energii pole obou bodových nábojů která je udržuje v původní poloze. Její velikost je

$$A = W = \varphi_{12} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} \cdot Q_2 \qquad (4.1)$$



obr. 4.1

Opačně přesunutím Q_2 z nekonečna do bodu 2 vnější silou se opět uvolní energie

$$A = W = \varphi_{21} \cdot Q_1 \qquad (4.2)$$

Z těchto nesymetrických tvarů uděláme tvar symetrický tím, že vypočteme průměr

$$A = \varphi_{21} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} \cdot Q_2 = {}^1/_2 (Q_2 \cdot \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} + Q_1 \cdot \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}}) \qquad (4.3)$$

$$W = {}^1/_2 (\varphi_{21} \cdot Q_2 + \varphi_{21} \cdot Q_1) \qquad (4.4)$$

Energie je odvozena ze silového působení a je tedy také interakční. Pole je schopno energii úplně vrátit a stejně jako síly má elastický charakter.

Energie tří bodových nábojů

K předcházejícím dvěma nábojům přivedeme třetí. Metodou superpozice sečteme účinky mezi jednotlivými náboji:

$W_{12} = {}^1/_2(\varphi_{21}\cdot Q_2 + \varphi_{21}\cdot Q_1)$ $W_{23} = {}^1/_2(\varphi_{23}\cdot Q_3 + \varphi_{32}\cdot Q_2)$ $W_{31} = {}^1/_2(\varphi_{31}\cdot Q_1 + \varphi_{13}\cdot Q_3)$

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = {}^1/_2[\underbrace{(\varphi_{21} + \varphi_{31})}_{\varphi_1}Q_1 + \underbrace{(\varphi_{12} + \varphi_{32})}_{\varphi_2}Q_2 + \underbrace{(\varphi_{23} + \varphi_{13})}_{\varphi_3}Q_3] =$$

$$= {}^1/_2[(\varphi_1)Q_1 + (\varphi_2)Q_2 + (\varphi_3)Q_3]$$

$$W = {}^1/_2[\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2 + \varphi_3 Q_3] = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{k=3}\varphi_k.Q_k$$

kde $\varphi_k = \varphi_{jk} + \varphi_{lk}$ (4.5)

pro n diskrétních nábojů

$$W = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{k=n}\varphi_k.Q_k \tag{4.6}$$

V těchto vztazích je např. φ_1 potenciál od nábojů Q_2 a Q_3 v místě náboje Q_1 atd., obecně pro n nábojů

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{Q_1}{r_{kl}} \tag{4.7}$$

Energie osamoceného nabitého vodiče

Vodič postupně nabíjíme tak, že na jeho povrch přivádíme z místa nulového potenciálu elementární náboje dQ. Jak již bylo řečeno přenesením náboje se zvýší potenciál o $d\varphi$ a přitom se vnějšími silami vykoná práce

$$dA = \varphi\cdot dQ = C\cdot\varphi\cdot d\varphi \tag{4.8}$$

Sečtením potenciálů od všech přinesených elementárních nábojů:

$$A = \int_0^{\varphi} C\cdot\varphi\cdot d\varphi = \frac{1}{2}\cdot C\cdot\varphi^2 \tag{4.9}$$

Energie pole vodiče potom bude

$$W = \frac{1}{2}\cdot C\cdot\varphi^2 = \frac{1}{2}\cdot\varphi\cdot Q = \frac{Q^2}{2C} \tag{4.10}$$

Energie pole soustavy *n* nabitých vodivých těles.

Na jedno k-té těleso soustavy vodivých těles (elektrod) přivádějme náboj dQ_k úměrně s koeficientem λ tak, že $dQ_k = Q_k\cdot d\lambda$. V konečném stavu nabití budou náboje a potenciály

$$Q_1, Q_2, ...Q_k, ...Q_n, \varphi_1, \varphi_2, ...\ \varphi_k, ...;.\varphi_n$$

Náboje a potenciály tedy rostou úměrně s koeficientem λ, který nabývá max. hodnotu λ = 1, tedy

$Q_k' = \lambda\cdot Q_k$

$\varphi_k' = \lambda\cdot\varphi_k$

$dQ_k = Q_k\cdot d\lambda$ (4.11)

Při přinášení nových elementárních nábojů vykonají vnější síly práci

$$dA = \varphi_1'\cdot dQ_1' + \varphi_2'\cdot dQ_2' + \ldots + \varphi_k'\cdot dQ_k' + \ldots + \varphi_n'\cdot dQ_n' = \sum_1^n \varphi_k' \cdot dQ_k' = \sum_1^n \varphi_k \cdot Q_k \cdot \lambda \cdot d\lambda \qquad (4.12)$$

Celková práce

$$A = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot Q_k \cdot \lambda \cdot d\lambda = \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot Q_k \cdot \int_0^1 \lambda \cdot d\lambda = \sum \varphi_k \cdot Q_k \cdot \left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot Q_k \qquad (4.13)$$

Energie soustavy nabitých těles:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot Q_k \qquad (4.14)$$

Také z rovnice $\varphi_k = \sum_{l=1}^n \alpha_{k1} \cdot Q_1$ nebo $Q_k = \sum_{l=1}^n \beta_{k1} \cdot \varphi_1$ lze psát

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{k1} \cdot Q_k \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_{k1} \cdot \varphi_k \cdot \varphi_1 \qquad (4.15)$$

Náboj lze zapsat také pomocí plošných hustot nábojů na povrchu elektrod. Potom je energie

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{Si} \sigma_k \cdot \varphi_k \cdot ds = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot \int_{Si} \sigma_k \cdot ds \qquad (4.16)$$

Energie pole dvou nabitých těles

Použijeme výsledky předcházejícího odstavce pro $n = 2$. Energii

$$W_e = {}^1/_2(\varphi_1 \cdot Q_1 + \varphi_2 \cdot Q_2) \qquad (4.17)$$

vyjádříme tak, aby se dala počítat jen pomocí φ, Q nebo U a patřičných konstant. Ze soustavy rovnic

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = \alpha_{11} \cdot Q_1 + \alpha_{12} \cdot Q_2 \\ \underline{\varphi_2 = \alpha_{21} \cdot Q_1 + \alpha_{22} \cdot Q_2} \end{array}\right\} \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} \qquad (4.18)$$

$$W_e = {}^1/_2\, \alpha_{11} Q_1^2 + \alpha_{12} \cdot Q_1 \cdot Q_2 + {}^1/_2\, \alpha_{22} \cdot Q_2^2 \qquad (4.19)$$

Podobně z rovnic

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = \beta_{11} \cdot \varphi_1 + \beta_{12} \cdot \varphi_2 \\ \underline{Q_2 = \beta_{21} \cdot \varphi_1 + \beta_{22} \cdot \varphi_2} \end{array}\right\} \quad \beta_{12} = \beta_{21} \qquad (4.20)$$

$$W_e = {}^1/_2\, \beta_{11} \cdot \varphi_1^2 + \beta_{12} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 + {}^1/_2\, \beta_{22} \cdot \varphi_2 \qquad (4.21)$$

Podobně pro částečné kapacity

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = C_{11} \cdot U_1 + C_{12} \cdot (U_1 - U_2) \\ \underline{Q_2 = C_{22} \cdot U_2 + C_{21} \cdot (U_2 - U_1)} \end{array}\right\} \quad C_{12} = C_{21} \qquad (4.22)$$

$$W_e = {}^1/_2 \cdot U_1 \cdot Q_1 + {}^1/_2 \cdot U_2 \cdot Q_2 = {}^1/_2\, C_{11} \cdot U_1^2 + {}^1/_2 C_{12} \cdot (U_1 - U_2)^2 + {}^1/_2 C_{22} \cdot U_2^2 \qquad (4.23)$$

Je tedy celková energie součtem energií vlastních a vzájemných kapacit.

Z uvedených vztahů vyplývá důležitý poznatek. Energie není lineární, ale kvadratickou funkcí potenciálu, napětí nebo náboje. **Nelze** tedy přímo použít metodu **superpozice**.

Energie elektrostatického pole kondenzátoru

Elektrody kondenzátoru můžeme považovat za soustavu dvou nabitých těles s náboji $Q_2 = -Q_1$ a s napětím $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Potom je energie

$$W_e = {}^1/_2[\varphi_1\cdot Q_1 + \varphi_2\cdot(-Q_1)] = {}^1/_2\cdot Q_1\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) = {}^1/_2\cdot Q_1\cdot U \qquad (4.24)$$

Pro označení $Q_1 = Q$ lze psát různé vyjádření energie

$$W = {}^1/_2\cdot Q\cdot U = {}^1/_2\cdot C\cdot U^2 = Q^2/\,2C \qquad (4.25)$$

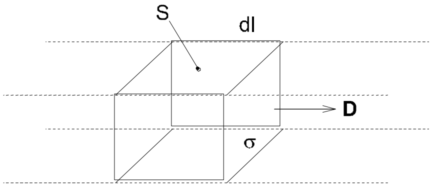
Protože se energie nemůže měnit skokem (kondenzátor by se musel za nekonečně malou dobu nabít nekonečně velkým proudem), **nemůže se měnit skokem ani napětí na kondenzátoru**.

V elementární indukční trubici mezi deskami kondenzátoru podle obr.4.2 se koncentruje energie $d^2W = {}^1/_2\cdot d\varphi\cdot dQ$, přičemž $d\varphi = E\cdot dl$ a $dQ = D\cdot ds$ potom je energie v trubici

$$d^2W = {}^1/_2\cdot E\cdot D\cdot dV \qquad (4.26)$$

a hustota energie mezi deskami kondenzátoru

$$w = {}^1/_2\cdot E\cdot D \qquad (4.27)$$



obr. 4.2

Energie nábojů zadaných hustotou ρ a σ

Náboj rozprostřený v prostoru s hustotou $\rho(x,y,z)$ vytváří potenciál $\varphi(x,y,z)$. Energie přiřazená náboji $dQ = \rho\cdot dV$ je

$$W_e = \left(\frac{1}{2}\sum_1^n Q_k\cdot\varphi_k\right) = \frac{1}{2}\cdot\int_V \rho\cdot\varphi\cdot dV \qquad (4.28)$$

Potenciál φ na rozdíl od φ_k je již potenciál výsledný, zahrnující v sobě i vlastní příspěvek, který již není nekonečný, jako u osamoceného náboje koncentrovaného v nulovém objemu, ale je naopak zanedbatelný. Analogicky pro plošně rozložený náboj

$$W_e = {}^1/_2 \int_S \sigma\cdot\varphi\cdot ds \qquad (4.29)$$

Vztahy platí jak ve vakuu, tak i v dielektriku. Zde je vliv vázaných nábojů ρ_v a σ_v zahrnut v hodnotě potenciálů.

Hustota energie elektrostatického pole

O výpočtu hustoty energie mezi deskami kondenzátoru - vztah (4.27) již byla zmínka. Prozkoumejme nyní poměry v oblasti libovolného tvaru obr.4.3 mezi dvěma elektrodami s náboji hustoty σ. Mezi elektrodami je hustota nábojů ρ. Celková energie v oblasti mezi elektrodami je

$$W_e = {}^1/_2 \int_V \rho\cdot\varphi\cdot dV + {}^1/_2 \int_{S+Si} \sigma\cdot\varphi\cdot ds \qquad (4.30)$$

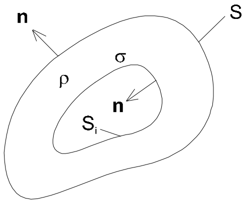
dosaďme $\qquad \rho = div\,\boldsymbol{D} \qquad \sigma = \boldsymbol{D}\cdot n$

$$W_e = {}^1/_2 \int_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{div}\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{dV} - {}^1/_2 \int_{\boldsymbol{S+Si}} \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{ds} \qquad (4.31)$$

Z identity $\qquad div\,(\varphi\cdot\boldsymbol{D}) = \varphi\cdot div\,\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\cdot grad\,\varphi$

$$\varphi\cdot div\,\boldsymbol{D} = div\,(\varphi\cdot\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D}\cdot grad\,\varphi = div\,(\varphi\cdot\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$W_e = {}^1/_2\int_V div\,(\varphi\cdot\boldsymbol{D})\cdot dV + {}^1/_2\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\cdot dV - {}^1/_2\int_{S+Si} \varphi\cdot\boldsymbol{D}\cdot ds \qquad (4.32)$$



obr. 4.3

První člen a třetí člen se vyruší po úpravě podle Gaussovy věty

$$\int_V \boldsymbol{div}(\varphi\cdot\mathbf{D})\cdot \boldsymbol{dV} = \int_{S+Si} \varphi\cdot\mathbf{D}\cdot \boldsymbol{ds} \qquad (4.33)$$

takže

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\cdot \boldsymbol{dV} = \int_V \boldsymbol{w_e}\cdot \boldsymbol{dV} \qquad (4.34)$$

hustota energie $w_e = {}^1/_2\cdot \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = {}^1/_2\, \varepsilon\cdot E^2 = {}^1/_2\cdot D^2/\,\varepsilon$ (4.35)

4.2. Práce a výkon el. proudu v proudovém poli

Čas ke studiu: 1 hodinu

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit pojmy energie, práce, výkon
- vyřešit práci v elektrickém poli

Výklad

Z teorie obvodů víme, že průchodem proudu dochází ke ztrátám, tedy k přeměně energie elektrické v tepelnou. Průchod proudu je v podstatě přemísťováním nábojů. Přemístěním dQ z místa s potenciálem φ_1 do místa s potenciálem φ_2, přičemž $\varphi_1 > \varphi_2$ vykonají vnější síly práci

$$dA = dQ(\varphi_1 - \varphi_2) = dQ\cdot U \qquad (4.36)$$

v poli ustálených proudů je $dQ = I\cdot dt$ a tedy

$$dA = I\cdot U\cdot dt \qquad (4.37)$$

U ani I nejsou funkcemi času a proto po integraci od 0 do t bude

$$A = U\cdot I\cdot t \qquad (4.38)$$

Tedy dostáváme vztah známý rovněž z teorie obvodů. Práce je konána na úkor zdrojů, které udržují konstantní napětí na elektrodách.

Výkon proudu transformovaný v teplo je

$$P_č = \frac{dA}{dt} = U\cdot I \qquad (4.39)$$

Objemová hustota ztrát

$$p = \frac{dP_Č}{dV} = \frac{dU\cdot dI}{dl\cdot ds} = E\cdot J = \gamma\cdot E = J^2/\gamma \qquad (4.40)$$

Výkon přeměněný v teplo na jednotlivých vodivostech

.

$$P_č = U\cdot I = G\cdot U^2 = R\cdot I^2 \qquad (4.41)$$

Pomocí vodivostních koeficientů

$$P_č = \sum G_{kk}\cdot U_k^{\,2} + G_{kl}(U_k - U_l)^2 = \int_V P_č\cdot dV \qquad (4.42)$$

4.3. Energie v magnetickém poli

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat energii magnetického pole
- vysvětlit souvislost ztracené energie a tvaru hysterézní smyčky
- rozlišit pojem energie a koenergie

Výklad

Z teorie obvodů je pro vzduchovou cívku napájenou harmonickým napětím znám vztah (pro počet závitů $N = 1$)

$$u_\mathrm{i} = R \cdot i + \frac{d\Phi}{dt} = R \cdot i + L\frac{di}{dt} \qquad (4.43)$$

Vynásobením tohoto vztahu členem $i \cdot dt$ dostaneme práci, kterou vykoná zdroj za krátký časový okamžik dt.

$$dA = u_\mathrm{i} \cdot i \cdot dt = R \cdot i^2 \cdot dt + i \cdot d\varPhi = R \cdot i \cdot dt + L \cdot i \cdot di \qquad (4.44)$$

přičemž $i \cdot d\varPhi$ představuje přírůstek (úbytek) energie magnetického pole, akumulovaný v cívce

$$dW_\mathrm{m} = i \cdot d\varPhi = L \cdot i \cdot di \qquad (4.45)$$

Mohou nastat dva případy. Jestliže je

$dW_\mathrm{m} > 0$, jedná se o přírůstek energie pole od proudu i, pro

$dW_\mathrm{m} < 0$ je energie pole vrácena zpět do zdroje nebo absorbována v rezistoru (přeměněna na teplo). Integrací od 0 do i získáváme energii mag. pole v cívce, bez zahrnutí hysterézních a vířivých ztrát

$$W_\mathrm{m} = {}^1/_2\, L \cdot i^2 = {}^1/_2\ \varPhi \cdot i \qquad (4.46)$$

Uvažujme nyní n tuhých nepohyblivých smyček s n zdroji v nevodivém lineárním prostředí. Ve smyčkách se akumuluje práce všech zdrojů v energii magnetického pole. Její přírůstek je

$$dA = dW_\mathrm{m} = \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot d\Phi_k \qquad (4.47)$$

kde $d\varPhi_\mathrm{k}$ je celkový tok smyčkou k, tj. součet vlastních a vzájemných toků

$$d\varPhi_\mathrm{k} = \sum_{l=1}^{n} L_{k1} \cdot di_l \qquad (4.48)$$

L_kl představuje vzájemné indukčnosti mezi cívkami. Pro dvě cívky bude

$$dW_\mathrm{m} = \sum i_k \sum L_{kl} .di_l \ = L_{11} \cdot i_1 \cdot di_1 + L_{12} \cdot i_1 \cdot di_2 + L_{21} \cdot i_2 \cdot di_1 \ + L_{22} \cdot i_2 \cdot di_2 \qquad (4.49)$$

Výslednou hodnotu energie nalezneme integrováním, přičemž můžeme integrovat v libovolném pořadí. Nejprve tedy zvyšujme proud v první cívce z 0 na i_1 při $i_2 = 0$, potom bude první člen $W_1 = {}^1/_2$

$L_{11}\cdot i_1$, ostatní členy budou nulové. V druhém kroku zvyšujme proud v druhé cívce z 0 na i_2. Změna energie bude

$$W_2 = L_{12}\cdot i_1\cdot i_2 + L_{22}\cdot i_2^2 \qquad (4.50)$$

Celková energie potom je

$$W_\mathrm{m} = W_1 + W_2 = {}^1/_2\, L_{11}\cdot i_1^2 + L_{12}\cdot i_1\cdot i_2 + {}^1/_2\, L_{22}\cdot i_2^2 \qquad (4.51)$$

Při opačném postupu bychom dostali $L_{21}\cdot i_1\cdot i_2$ místo $L_{12}\cdot i_1\cdot i_2$. Oba případy zesymetrizujeme tak, že z nich vypočteme aritmetický průměr

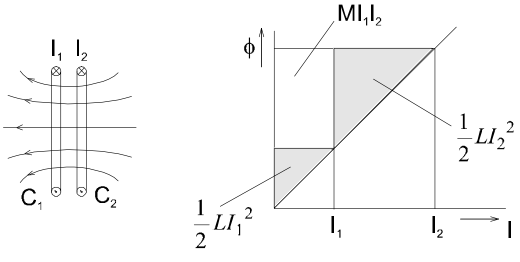
$$W_\mathrm{m} = {}^1/_2(L_{11}\cdot i_1^2 + L_{12}\cdot i_1\cdot i_2 + L_{21}\cdot i_1\cdot i_2 + L_{22}\cdot i_2^2) \qquad (4.52)$$

Vztah zobecníme pro *n* smyček

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} L_{k1}\cdot i_k\cdot i_l \qquad (4.53)$$

Zavedeme pojem celkový tok k-té smyčky $\Phi_\mathrm{k} = \sum_{l=1}^{n} L_{k1}\cdot i_l$

Energie v soustavě $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k\cdot i_k$ (4.54)



a) obr. 4.4 b)

Ze vztahu pro energii jedné smyčky (cívky) $W_\mathrm{m} = {}^1/_2 L\cdot i^2$ vyplývá důležitý závěr, že **proud v indukčnosti se nemůže měnit skokem, ale spojitě.**

U soustavy více smyček jsme z kurzu teorie obvodů zvykli na označování vzájemné indukčnosti L_kl pro $k \neq$ l symbolem $M_{(\mathrm{kl})}$. V tom případě bude mít vztah pro výpočet energie soustavy dvou cívek tvar

$$W_\mathrm{m} = {}^1/_2 L_1\cdot i_1^2 + {}^1/_2 L_2\cdot i_2^2 + M\cdot i_1\cdot i_2 \qquad (4.55)$$

Jednotlivé členy tohoto vztahu můžeme pro lineární prostředí graficky znázornit plochami podle obr.4.4.

Hustota energie magnetického pole

Uvažujme skupinu *n* vodičů konečných rozměrů v lineárním prostředí. Potom vypočteme tok k-té smyčky

$$\Phi_\mathrm{k} = \int_{li} \mathbf{A}\cdot \boldsymbol{dl}_{\boldsymbol{k}} \qquad (4.56)$$

energie

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k\cdot i_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k\int_{li} A\cdot dl_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{li} A\cdot J_k\cdot dV_k \qquad (4.57)$$

Při úpravách jsme použili ekvivalenci proudových elementů $i_\mathrm{k}\cdot dl_\mathrm{k} = J_\mathrm{k}\cdot dV_\mathrm{k}$. Integrujeme přes prostor zahrnující všechny smyčky. Mimo proudovodič je $J = 0$. Pro jednu smyčku

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\cdot dV \qquad (4.58)$$

Takto vypočteme energii z hustot zdrojových veličin. Přitom jsme integrovali jen přes objem vodičů. Integrál převedeme na neomezený prostor použitím identity

$$div\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot rot\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot rot\,\boldsymbol{H}$$

tj. $\boldsymbol{A}\cdot rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}\cdot J = \boldsymbol{H}\cdot rot\,\boldsymbol{A} - div\,(\boldsymbol{A}\ \mathrm{x}\ \boldsymbol{H})$

potom

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\cdot rot\,\boldsymbol{A}\cdot dV - \frac{1}{2}\int_V div(\boldsymbol{A}\ \mathrm{x}\ \boldsymbol{H})\cdot dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\cdot rot\,\boldsymbol{A}\cdot dV - \frac{1}{2}\oint_S (\boldsymbol{A}\ \mathrm{x}\ \boldsymbol{H})\cdot ds \qquad (4.59)$$

Hodnota členu ($\boldsymbol{A}$ x $\boldsymbol{H}$) klesá se třetí mocninou R, protože $\boldsymbol{A} \sim 1/R$, $\boldsymbol{H} \sim 1/R^2$ .Jestliže zkoumáme neohraničený prostor, kdy $R \to \infty$, je tento člen nulový a

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\cdot dV \qquad (4.60)$$

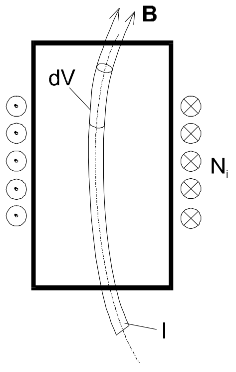
energie je v lineárním prostředí rozložena s hustotou

$$w_\mathrm{m} = {}^1\!/_2\, \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (4.61)$$

V izotropním prostředí, kde jsou oba vektory na pravé straně kolineární je

$$w_\mathrm{m} = {}^1\!/_2\, \mu\cdot H^2 = {}^1\!/_2\, B^2/\mu \ = {}^1\!/_2 H\cdot B \qquad (4.62)$$

Energie ztracená v hysterézním cyklu



obr. 4.5

Při snižování napájecího proudu vzduchové cívky se snižuje i akumulovaná energie tak, že při nulovém proudu je nulová. Jinak tomu bude v prostředí s hysterezi. Ve feromagnetiku mají vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ různé směry. Vytkneme zde jednu silovou trubici o ploše ds podle obr.4.5. Nebudeme uvažovat ztráty odporem cívky ani vířivými proudy. Potom bude změna spřaženého toku úměrná změně energie pole

$$\boldsymbol{dW} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{d}\Phi = \boldsymbol{d}\Phi\cdot\oint \mathbf{H}\cdot\boldsymbol{d}\mathbf{l} = \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{ds}\cdot\oint \mathbf{H}\cdot\boldsymbol{d}\mathbf{l} \qquad (4.63)$$

Použili jsme tedy Ampérův zákon po dráze totožné s osou silové trubice. Silová trubice se na změně podílí částí

$$\delta(dW_\mathrm{m}) = \delta(d\Phi)\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} \qquad (4.64)$$

Označme změnu indukce v čase $\boldsymbol{dB}$ a vyjměme element trubice podle obr.4.6. Změna toku v elementu bude

$$\delta(d\Phi) = \delta s\cdot dB \qquad (4.65)$$

a tedy změna energie

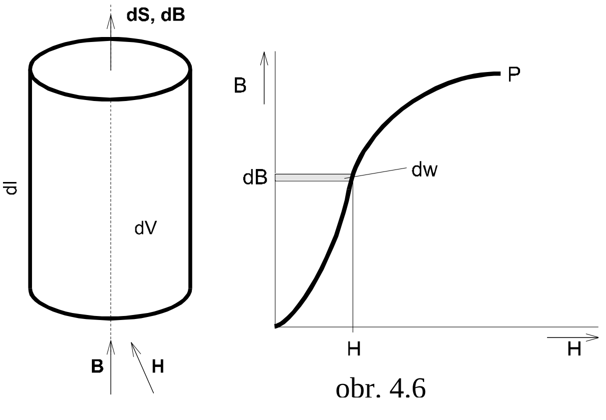
$$\delta(dW_\mathrm{m}) = d\boldsymbol{B}\cdot\delta s\cdot\oint \mathbf{H}\cdot\boldsymbol{d}\mathbf{l} \qquad (4.66)$$

Integrujme energii přes celou plochu s

$$dW_\mathrm{m} = (\oint \mathbf{H}\cdot\boldsymbol{d}\mathbf{l})\cdot(\int \boldsymbol{d}\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}) = \int_V \mathbf{H}\cdot\boldsymbol{d}\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{dV} \qquad (4.67)$$

Z obrázku elementu silotrubice je zřejmé, že vektory $\delta\boldsymbol{s}$, $d\boldsymbol{B}$, $d\boldsymbol{l}$ jsou kolineární a mohli jsme napsat $dV = \delta\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{l}$. Diferenciální operátor δ je vztažen na změnu plochy objemového elementu. Je tedy změna hustoty energie

$$dw_\mathrm{m} = \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B} \qquad (4.68)$$

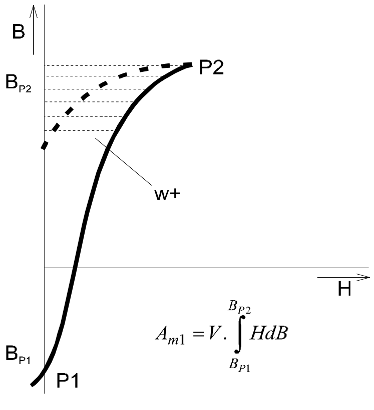


obr. 4.6

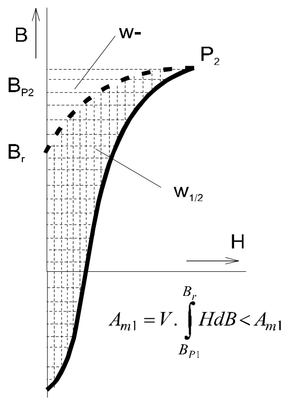
což podle obr.4.7 odpovídá šrafované ploše elementu nad magnetizační chrakteristikou. Změní-li se indukce z hodnoty B_1 na B_2, změní se také hustota energie v poli s hysterezi

$$w_2 - w_1 = \int_{B1}^{B2} H \cdot dB \qquad (4.69)$$

Magnetujme nyní feromagnetický materiál s hysterezí tak, že přejdeme podle obr.4.8 z bodu P_1 do bodu P_2. Musíme přitom vykonat práci



obr. 4.7



obr. 4.8

$$A_{m1} = V\cdot \int_{BP1}^{BP2} H \cdot dB \qquad (4.70)$$

Z bodu P_2 potom odmagnetujme materiál na nulu intenzity pole. Zdroji se vrátí práce

$$A_{m2} = V\cdot \int_{BP2}^{Br} H \cdot dB < A_{m1} \qquad (4.71)$$

Rozdíl A_{m1} - A_{m2} představuje hysterézní ztráty za půl periody budicího proudu. Další půlperiodu se cyklus opakuje. Objemová hustota ztrát hysterezi za jeden cyklus je

$$w_1 = \oint H \cdot dB \ [\mathrm{Ws/m^3}] \qquad (4.72)$$

V praxi se např. u elektrických strojů vztahují hysterézní ztráty pro jednotlivé materiály na max. hodnotu indukce. Např. Steinmetz uvádí empirický vztah

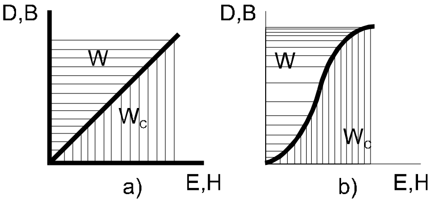
$$w_1 = \beta \cdot B_{\max}{}^{1,6} \qquad (4.73)$$

který v prakticky používaném rozsahu $B_{\max} = 0,1 \div 1,5$ T udává hustotu ztrát p_h jako ztrátový výkon

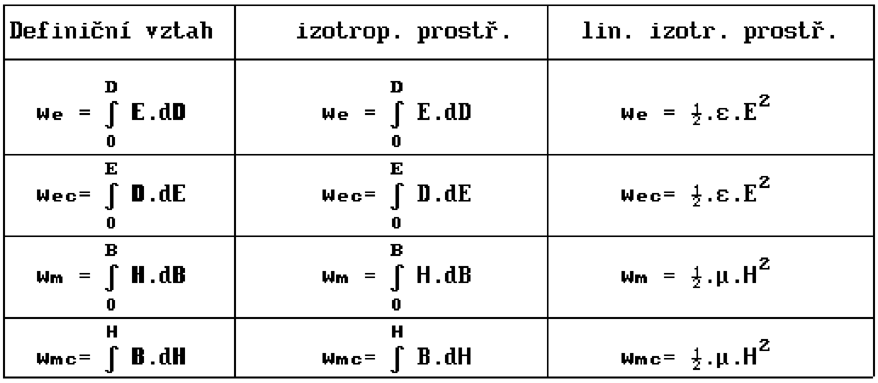
$$p_h = \eta , f , B_{\max}{}^{1,6} \qquad (4.74)$$

Zde je pro křemíkovou ocel $\eta = 0{,}001$, pro měkké železo $\eta = 0{,}002 \div 0{,}004$ a pro litinu $\eta = 0{,}03$. Vztah je pouze aproximací a neplatí pro malé $B_{\max} < 0{,}15$ T.

Geometrická interpretace vztahu pro hustoty energii je na obr.4.9a pro lineární a obr.4.9b pro nelineární prostředí. Šrafovaná plocha nad křivkou vyjadřuje hustotu energie, plocha pod křivkou je úměrná hustotě doplňkové energie neboli koenergie. V následující tabulce jsou přehledně uspořádány vztahy pro hustoty energie a koenergie



obr. 4.9



Definiční vztah	izotrop. prostř.	lin. izotr. prostř.
$w_e = \int_0^D E.dD$	$w_e = \int_0^D E.dD$	$w_e = \frac{1}{2}.\varepsilon.E^2$
$w_{ec} = \int_0^E D.dE$	$w_{ec} = \int_0^E D.dE$	$w_{ec} = \frac{1}{2}.\varepsilon.E^2$
$w_m = \int_0^B H.dB$	$w_m = \int_0^B H.dB$	$w_m = \frac{1}{2}.\mu.H^2$
$w_{mc} = \int^H B.dH$	$w_{mc} = \int^H B.dH$	$w_{mc} = \frac{1}{2}.\mu.H^2$

Přitom

$$w_e + w_{ec} = E \cdot D \quad (4.75) \qquad w_m + w_{mc} = H \cdot B \qquad (4.76)$$

hustota energie el. pole buzeného náboji s hustotou ρ

$$w_e = \int_0^{\rho} \varphi \cdot d\rho$$

4.4. Thomsonův princip o minimu energií

Čas ke studiu: 1 hodina

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat princip o minimu energie
- napsat symbolické vyjádření principu

Výklad

Podle tohoto principu: Každá potenciální soustava vykoná maximální práci, kterou jí dovolují vnější omezení, a tím zmenší svou energii na minimum za daných podmínek dosažitelné. Princip minima energie lze v přírodě zaregistrovat všude, např. i u takového běžného případu, jako je pád jablka se stromu. Jablko je upevněno mechanicky na větvi - vnějším omezením - a má jistou potenciální energii. Po uvolnění vnějšího omezení padá k zemi, vykoná přitom práci a jeho potenciální energie se snižuje na hodnotu, kterou určuje opět nové vnější omezení - povrch země.

Uvolníme-li náhle fixované náboje, budou se bez omezení vnějšími silami pohybovat, až se celá energie pole vyčerpá. Platí **Thomsonova věta**: Náboje na soustavě pevných vodičů uložených v dielektriku se samy rozloží po povrchu těchto vodičů tak, aby energie výsledného elektrostatického pole byla minimální.

Jedním z důsledků Tomsonova principu je tedy rozložení nábojů na površích elektrod, jako další příklad je možno uvést polarizaci prostředí, která zmenšuje intenzitu pole a tím i hustotu energie. Tyto případy platí pouze v elektrostatickém poli, bez připojeného zdroje, kdy mluvíme o soustavě **izolované**, která svými vnitřními silami vyhledává stav minimální energie, čili koná práci, omezenou vnějšími silami. V soustavách neizolovaných např. v cívce zapojené na zdroj, platí uvedený princip pro celou soustavu, tj. včetně zdrojů a přívodů.

Pro stacionární elektrická (resp. magnetická) pole nabývají polní veličiny (potenciál, intenzita, indukce) takových hodnot, že při daných vnějších omezujících podmínkách je minimální rozdíl mezi energii elektrického W_e (resp. magnetického W_m) pole a energií zdrojů pole W, tj. energií daného rozložení nábojů nebo proudů. Symbolicky to vyjádříme rovnicemi

$$W_e - W = \min \qquad W_m - W = \min \tag{4.77}$$

Rozdíl energií na levé straně těchto rovnic je z matematického hlediska funkcionálem určité polní veličiny a nazývá se energetický funkcionál. Tento pojem je zobecněním pojmu funkce, jež každému reálnému číslu z daného definičního oboru přiřazuje právě jedno reálné číslo. Jestliže je okrajový problém v jisté dvojrozměrné prostorové oblasti Ω s hranicemi Γ popsán pro polní veličinu u Poissonovou rovnicí

$$\mathrm{k}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\,\mathrm{f} \tag{4.78}$$

kde pravá strana představuje budicí funkci, pak okrajový problém popsán takovouto rovnici a doplněn o okrajové podmínky je ekvivalentní s variačním problémem stanovit takovou funkci u, aby pro ní nabýval minima energetický funkcionál:

$$\mathrm{F(u)} = \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}\cdot k[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]dx\cdot dy}_{W_e,W_m} - \underbrace{\int_\Omega f\cdot u\cdot dx\cdot dy}_{W} \tag{4.79}$$

Speciálně pro elektrostatické pole

$$F(\varphi)=\int_\Omega \frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot[\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}_{Ex^2}+\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}_{Ey^2}]\cdot dx\cdot dy-\int_\Omega \rho\cdot\varphi\cdot dx\cdot dy \tag{4.80}$$

Pro nevírové magnetické pole nebude rovnice obsahovat na pravé straně zdrojovou funkci, protože skalární magnetický potenciál není v místě zdrojů (proudů) definován:

$$\mathrm{F}(\square_{\mathrm{m}}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\cdot\mu\cdot[\underbrace{(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x})^2}_{H_x^2}+\underbrace{(\frac{\partial\varphi_m}{\partial y})^2}_{H_y^2}]\cdot dx\cdot dy \tag{4.81}$$

Pro stacionární magnetické pole ve válcové oblasti s průřezem Ω a jednotkovou výškou ve směru z:

$$\mathrm{F}(\mathbf{A}_{\mathrm{z}}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\cdot\nu\cdot[(\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial x})^2+(\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial y})^2]\cdot dx\cdot dy-\int_\Omega \vec{J}_z\cdot\vec{A}_z\cdot dx\cdot dy \tag{4.82}$$

4.5. Rovnice výkonové rovnováhy

Čas ke studiu: 1 hodina

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat Poyntingův vektor pro neharmonická pole
- popsat bilanci výkonů pro neharmonická pole
- stejně jako púředchozí body pro pole harmonické

Výklad

V elektromagnetickém poli přirozeně platí jeden ze základních fyzikálních zákonů - zákon zachování energie. Pokusme se odvodit rovnice, které provádí kvantitativně bilanci energií v určité oblasti - objemu *V*. Odvození proveďme pro veličiny obecně časově proměnné a pro veličiny harmonicky proměnné.

❑ Bilance výkonů v neharmonických polích. Poyntingův vektor.

Vyjděme z Maxwellových rovnic

$$rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{in}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{e}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad |\cdot\boldsymbol{E} \qquad\qquad rot\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad |\cdot\boldsymbol{H}$$

Obě rovnice vynásobíme, jak je naznačeno, intenzitami a odečteme od druhé rovnice rovnici první:

$$\boldsymbol{H}\cdot rot\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot rot\,\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{in}} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}} \tag{4.83}$$

Rovnici integrujme přes řešenou oblast *V*. Levou stranu upravme podle vektorové identity

$$div\,[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] = \boldsymbol{H}\cdot rot\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot rot\,\boldsymbol{H}$$

a jednotlivé členy přeuspořádejme:

$$\underbrace{-\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_e\cdot dV}_{P_Z} = \underbrace{\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_{in}\cdot dV}_{P_{\check{C}}} + \underbrace{\int_V (\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})\cdot dV}_{\frac{d}{dt}(W_e+W_m)} + \underbrace{\int_V div[\vec{E}\times\vec{H}]\cdot dV}_{P_f} \tag{4.84}$$

Význam jednotlivých členů je tento:

P_z představuje výkon všech zdrojů v objemu *V*. První člen na pravé straně vyjadřuje činné ztráty v objemu *V*, které se přemění na Jouleovo teplo

$$P_{\check{c}} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_{in}\cdot dV = \int_V \gamma\cdot\vec{E}^2\cdot dV \tag{4.85}$$

Integrand druhého členu na pravé straně zahrnuje celkovou změnu hustoty energie pole, tj. výkon dodaný el. a mag. poli v jednotkovém objemu

$$\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\varepsilon\cdot E^2 + \frac{1}{2}\mu\cdot H^2) = \frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m) \tag{4.86}$$

potom

$$\frac{d}{dt}(W_e + W_m) = \frac{d}{dt}\int (w_e + w_m)dV \qquad (4.87)$$

je celkový výkon použitý na vybudování elektrického a magnetického pole v objemu *V*.

Člen označený P_f představuje výkon, který odchází z objemu *V* přes povrch *S* obklopující tento objem do okolního prostředí

$$P_f = \int_V div\left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \cdot dV = \oint_S \left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \cdot dS \qquad (4.88)$$

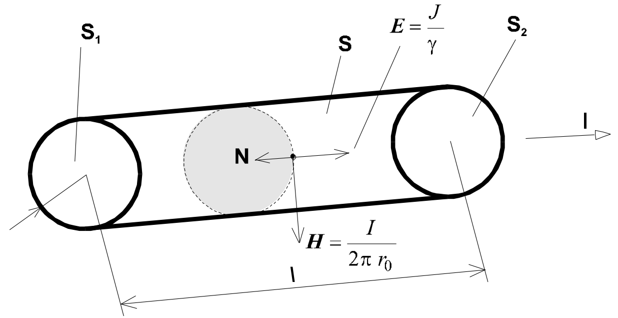
Vektorový součin za integrálem nazveme Poyntingův vektor

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \text{ x } \boldsymbol{H} \qquad (4.89)$$

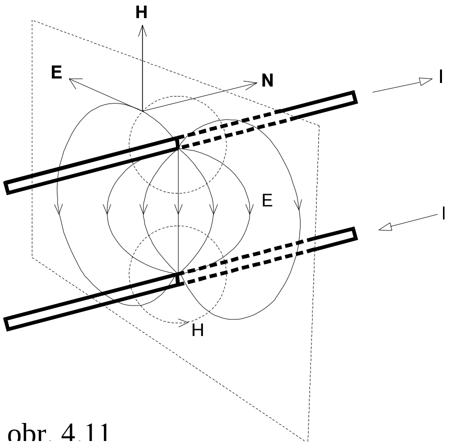
Jeho velikost je rovna velikosti hustoty toku výkonu jednotkou plochy [W/m^2], směr určuje směr šíření energie.

Získali jsme tedy tzv. *rovnici výkonové rovnováhy*

$$P_z = P_\text{č} + \frac{d}{dt}(W_e + W_m) + P_f \qquad (4.90)$$



obr. 4.10

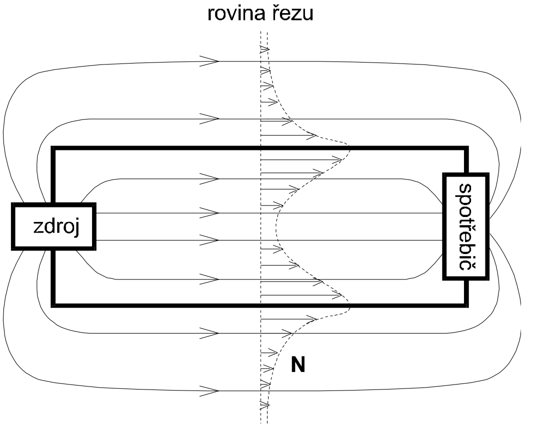


obr. 4.11

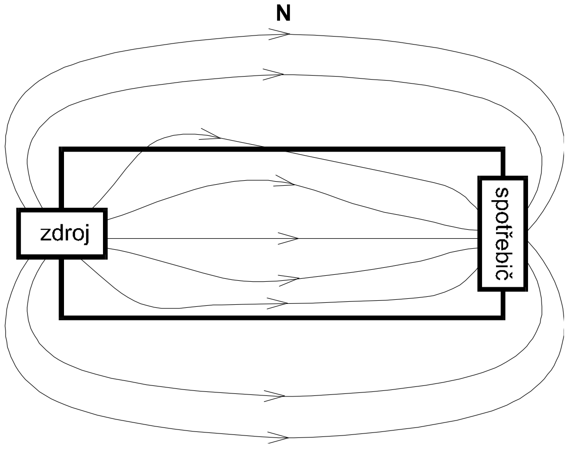
jejíž výklad je tento: Výkon dodaný zdroji, nacházejícími se v objemu *V* se zčásti spotřebuje na krytí činných ztrát, zčásti na vybudování el. a mag. pole v objemu a část uniká povrchem z objemu.

Činné ztráty jsou vždy kladné $P_\text{č} \geq 0$, ostatní mohou nabývat jak kladných, tak záporných hodnot. V objemech, v nichž se nenacházejí zdroje, tj. v libovolném místě ne vedení od zdroje ke spotřebiči, je navíc P_z = O. Energie pro krytí činných ztrát je v tomto případě odebírána poklesem celkové akumulované energie v objemu (*dW/dt* < 0) nebo je dodávána vnějšími zdroji (P_f < 0).

Pro příklad si uveďme určení Poyntingova vektoru na povrchu dlouhého válcového vodiče s vysokou vodivostí *γ* protékaného proudem *I* -viz obr. 4.10. Jedná se o ustálený stav mimo zdrojů a v bilanční



obr. 4.12

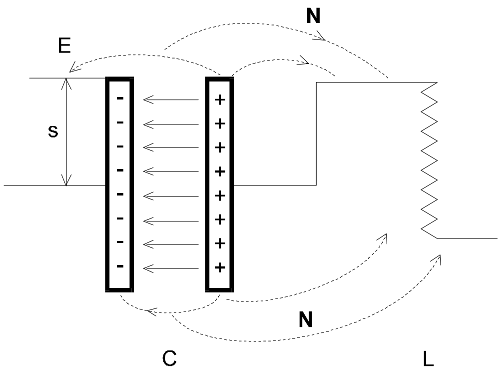


obr. 4.13

rovnici je tedy $dW/dt = 0$ a $P_z = 0$. Mimo vodič na obecném poloměru r je $H = I/2\pi r$ a velikost intenzity **E** bychom vypočetli jako intenzitu mezi dvěma nabitými vodiči. Vektor **E** je tečnou k siločáře, která vychází z jednoho vodiče a vchází do druhého, směr vektoru **H** určíme pravidlem pravé ruky. Oba dva tyto vektory leží v rovině kolmé na osu vodiče a jejich vektorový součin - Poyntingův vektor **N** = **E** x **H** má směr osy vodiče a smysl od zdroje ke spotřebiči.

Na povrchu vodiče musí existovat i složka vektoru E rovnoběžná s osou vodiče, která zajišťuje vedení proudu tímto vodičem $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$. Směr **H** zůstává stejný jako mimo vodič. Poyntingův vektor tedy směřuje do vodiče a představuje hustotu výkonu, která vstupuje do vodiče ke krytí činných ztrát $P_č = - P_f$. Významné je, že na plochách S_1 a S_2 je velikost $P_f = \oint \vec{N} \cdot d\vec{s}$ nulová (**N** je kolmý na *ds)*. Uvnitř vodiče se v podélném směru nepřenáší žádný výkon. *Veškerý výkon je přenášený ze zdroje do spotřebiče v okolním prostředí (dielektriku) nikoli vodičem. Část energie přechází do vodiče ke krytí činných ztrát. Vodiče pouze usměrňují tok výkonu. V dielektriku je směr přenášení výkonu určen proudem posuvným, nikoli vedeným. V časově proměnn. polích tedy není pro přenos výkonů přítomnost vodičů nutná.*

Vzájemné poměry polních vektorů mimo vodič jsou na obr. 4.11. Rozložení Poyntingova vektoru v závislosti na vzdálenosti od vodičů dvojvodičového bezeztrátového vedení je na obr. obr. 4.12. Na obr. 4.13 je schématicky nakreslen tok energie u vedení ztrátového (část přechází do vodiče). Na obr. 4.14 je schéma výměny energie mezi C a L.



obr. 4.14

❑ Komplexní Poyntingův vektor

Z teorie obvodů známe pro skalární obvodové stejnosměrné veličiny vztah $P = U \cdot I$, analogicky je ve stejnosměrném poli pro vektorové polní veličiny

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \underbrace{\left(E_y H_z - E_z H_y\right)}_{N_x}\vec{u}_x + \underbrace{\left(E_z H_x - E_x H_z\right)}_{N_y}\vec{u}_y + \underbrace{\left(E_x H_y - E_y H_x\right)}_{N_z}\vec{u}_z \qquad (4.91)$$

Jestliže však jsou všechny tyto veličiny harmonicky proměnné, pak se okamžité hodnoty obvodových veličin rovnají:

$$u = \sqrt{2}\cdot U_{ef}\, sin(\omega t + \varphi_u) \; i = \sqrt{2}\cdot I_{ef}\, si\underset{.}{n}\omega t + \varphi_i)$$

a v el. obvodech platí pro činný výkon

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i \cdot dt = UI \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) \Rightarrow \hat{P} = \mathrm{Re}\{\hat{U} \cdot I^*\}$$

podobně pro vektorové polní veličiny

$$N_x = N_x = \frac{1}{T}\int_0^T N_x \cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{(E_y H_z - E_z H_y)}_{\text{okamž hodnoty}} dt \qquad (4.92)$$

pro fázory polních veličin vypočteme analogicky k veličinám obvodovým střední hodnotu Poyntingova vektoru

$$\vec{N}_{stř} = R_e\left\{\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{H}}\right\}$$

např. $$\vec{N}_{stř} = R_e\left\{\hat{E}_y H_z^* \times \hat{E}_z H_y^*\right\} \qquad (4.93)$$

Ve všech případech je hvězdičkou označen fázor komplexně sdružený

$$\vec{H}^* = \vec{H}_r - j\vec{H}_i = H_x^*\vec{u}_x + H_y^*\vec{u}_y + H_z^*\vec{u}_z$$

Můžeme tedy napsat analogické vztahy mezi veličinami obvodovými a polními v tomto tvaru:

Obvodové veličiny	Polní veličiny
$P = U \cdot I$	$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E}$ x $\boldsymbol{H}$
$\hat{P} = \hat{U} \cdot I^*$	$\hat{\vec{N}} = \hat{\vec{E}} \times \vec{H}^*$
$\hat{P}_{Č} = R_e\left\{\hat{U} \cdot I^*\right\}$	$N_{stř} = R_e\left\{\hat{\vec{E}} \times \vec{H}^*\right\}$

kde $\hat{\vec{E}}$ a $\vec{H}^*$ jsou efektivní hodnoty fázorů. Často se počítá Poyntingův vektor z maximálních hodnot, kdy $\hat{\vec{E}}$ a $\vec{H}^*$ musíme dělit √2 a

$$N_{stř} = \frac{1}{2} R_e\left\{\hat{\vec{E}} \times \vec{H}^*\right\} \qquad (4.94)$$

Reálná část komplexního Poyntingova vektoru tedy vyjadřuje střední hustotu toku výkonu harmonického pole na jednotku plochy. Tato střední hodnota je vždy kladná a příklad grafického průběhu jeho x-ové složky je na obr.D20.

Výkonové poměry v poli harmonických veličin

Vyjděme opět z Maxwellových rovnic

$$rot\ \boldsymbol{H}^* = rot\ (\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}} - j\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}) = (rot\ \boldsymbol{H})^* = \boldsymbol{J}^*_{\mathrm{in}} + \boldsymbol{J}^*_{\mathrm{e}} + j\omega \boldsymbol{D}^* \ \left|\cdot \hat{\vec{E}}\right.$$

$$rot\hat{\vec{E}} = -j\omega\hat{\vec{B}} \quad \left|\cdot \vec{H}^*\right.$$

Obě rovnice vynásobíme, jak je naznačeno, intenzitami a odečteme od druhé rovnice rovnici první:

$$H^* \cdot rot\hat{\vec{E}} - \hat{\vec{E}} \cdot rot\vec{H}^* = -\vec{H}^* j\omega\hat{\vec{B}} - \hat{\vec{E}} \cdot j\omega\vec{D}^* - \hat{\vec{E}}\vec{J}^*_{in} - \hat{\vec{E}}\vec{J}^*_e$$

Rovnici integrujeme přes řešenou oblast V. Levou stranu upravíme podle vektorové identity

$$div\left[\hat{\vec{E}} \times \vec{H}^*\right] = \vec{H}^* \cdot rot\hat{\vec{E}} - \hat{\vec{E}} \cdot rot\vec{H}^*$$

a jednotlivé členy přeuspořádáme:

$$-\int_V \hat{\vec{E}}\vec{J}^*_e \cdot dV = \int_V \hat{\vec{E}}\vec{J}^*_{in} \cdot dV + j2\omega\int_V \left(\frac{\hat{\vec{B}} \cdot \vec{H}^*}{2} + \frac{\hat{\vec{E}} \cdot \vec{D}^*}{2}\right) \cdot dV + \int_V div[\hat{\vec{E}} \times \vec{H}^*] \cdot dv$$

což odpovídá rovnici

$$\hat{P}_z \quad = \quad P_{\mathrm{čstř}} + j2\omega(W_{\mathrm{estř}} + W_{\mathrm{mstř}}) + \oint_S \hat{\vec{N}} \cdot ds \qquad (4.95)$$

Reálné části vyjadřují rovnováhu středních hodnot výkonů, imaginární části 2ω násobek středního rozdílu energií v elektrickém a magnetickém poli - jalový výkon.

Člen na levé straně představ. komplexní výkon zdrojů $\hat{P}_z$. Jeho reálná část je střední výkon zdrojů za jednu periodu

$$P_{\text{zstř}} = R_{\text{e}}\{\hat{P}_z\} = R_{\text{e}}\{-\int_V \hat{\vec{E}}\vec{J}_e^* \cdot dV\ \}$$

Rozepíšeme reálnou část hustoty energie

$$R_e\ \{\hat{\vec{E}}\vec{J}_e^*\} = R_e\{(\vec{E}_r + j\vec{E}_i).(\vec{J}_{er} - j\vec{J}_{ei})\} = R_e\{(\vec{E}_r\vec{J}_{er} + \vec{E}_i\vec{J}_{ei}) + j(\vec{E}_i\vec{J}_{er} - \vec{E}_r\vec{J}_{ei})\} = \vec{E}_r\vec{J}_{er} + \vec{E}_i\vec{J}_{ei} \quad (4.96)$$

Pro srovnání určeme okamžitou hodnotu intenzity

$$E = I_m\{\sqrt{2}(\vec{E}_r + j\vec{E}_i)\cdot e^{j\omega t}\} = I_m\{\sqrt{2}(\vec{E}_r + j\vec{E}_i)\cdot(\cos\omega t + j\cdot\sin\omega t)\} = \sqrt{2}(\vec{E}_r\cdot\sin\omega t + \vec{E}_i\cdot\cos\omega t)$$

Pomocí tohoto vztahu vypočtěme střední hodnotu výkonu zdrojů:

$$P_{\text{zstř}} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}\cdot\vec{J}_e\cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{2}(\vec{E}_r\cdot\sin\omega t + \vec{E}_i\cdot\cos\omega t)\cdot\sqrt{2}(\vec{J}_{er}\cdot\sin\omega t + \vec{J}_{ei}\cdot\cos\omega t)\cdot dt =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T (\vec{E}_r\vec{J}_{er}\cdot\sin^2\omega t + \vec{E}_r\vec{J}_{ei}\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega t + \vec{E}_i\vec{J}_{er}\cdot\cos\omega t\cdot\sin\omega t + \vec{E}_i\vec{J}_{ei}\cdot\cos^2\omega t)\cdot dt$$

dále je

$$\int_0^T (\vec{E}_r\vec{J}_{ei}\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega t)\cdot dt = \int_0^T (\vec{E}_i\vec{J}_{er}\cdot\cos\omega t\cdot\sin\omega t)dt = 0$$

$$\int_0^T \sin^2\omega t = \int_0^T (\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t))dt = \frac{T}{2} \qquad \int_0^T \cos^2\omega t = \int_0^T (\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t))dt = \frac{T}{2}$$

A tedy $P_{\text{zstř}} = \boldsymbol{E}_{\text{r}}\cdot\boldsymbol{J}_{\text{er}} + \boldsymbol{E}_{\text{i}}\cdot\boldsymbol{J}_{\text{ei}}$

Vzhledem k tomu, že výsledek je stejný jako vztah (4.96), můžeme konstatovat, že člen na levé straně rov. (4.95) má skutečně význam střední objemové hustoty výkonů zdrojů.

Prvý člen na pravé straně rov. (4.95) představuje střední hodnotu činných ztrát

$$P_{\check{C}st\check{r}}\int_V \hat{\vec{E}}\cdot\vec{J}^*\cdot dV = \int_V \gamma\left|\hat{\vec{E}}\right|^2\cdot dV \qquad \left|\hat{\vec{E}}\right|^2 = \hat{\vec{E}}\cdot\vec{E}^* = \vec{E}_r^2 + \vec{E}_i^2 = \left|\hat{\vec{E}}_x\right|^2 + \left|\hat{\vec{E}}_y\right|^2 + \left|\hat{\vec{E}}_z\right|^2$$

je kvadrát modulu komplexního vektoru $\hat{\vec{E}}$.

Druhý člen na pravé straně rov. (4.95) můžeme psát ve tvaru

$$j2\omega\int_V (\frac{\hat{\vec{B}}\cdot\vec{H}^*}{2} + \frac{\hat{\vec{E}}\cdot\vec{D}^*}{2})\cdot dV = j2\omega(W_{mst\check{r}} - W_{est\check{r}})$$

přičemž

$$w_{mst\check{r}} = \frac{\hat{\vec{B}}\cdot\vec{H}^*}{2} = \frac{1}{2}\mu\left|\hat{\vec{H}}\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T w_m(t)dt$$

$$w_{est\check{r}} = \frac{\hat{\vec{E}}\cdot\vec{D}^*}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\hat{\vec{E}}\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T w_e(t)dt$$

jsou střední hodnoty hustot energií v magnetickém, resp. elektrickém poli. Z nich je možno vypočíst střední hodnoty energií:

$$W_{mstř} = \int_V w_m \cdot dV \qquad W_{estř} = \int_V w_e \cdot dV$$

Důležitým stavem je případ, kdy jsou střední hodnoty obou energií stejné a pro jalový výkon Q platí

$$Q = 2\omega(W_{\mathrm{mstř}} - W_{\mathrm{estř}}) = 0$$

bvod se v tomto případě nachází ve stavu rezonance a zdroje nemusí vůbec dodávat jalový výkon. Energie se vyměňuje pouze mezi kapacitami a indukčnostmi obvodu. Její celková zásoba

$$W_{\mathrm{j}} = W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{m}}$$

je konstantní a je rovna W_{emax}, resp. W_{mmax}.

4.6. Síly v elektrostatickém poli

Čas ke studiu: 1 hodinu

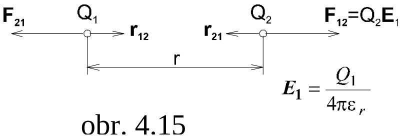
Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat silové působení v elektrostatických polích
- řešit silové poměry z energií

Výklad

Pro výpočet lze nejjednodušeji popsat silové působení elstat pole na náboj vztahem $\boldsymbol{F} = Q \cdot \boldsymbol{E}$. Pokud je pole buzeno také bodovým nábojem např. Q_1 obr.4.15, potom jeho pole působí na náboj Q_2 silou $\boldsymbol{F}_{12} = Q_2 \cdot \boldsymbol{E}_1$ a vzájemné silové působení obou nábojů popisuje Coulombův zákon

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \vec{r}_{12} \qquad (4.97)$$



obr. 4.15

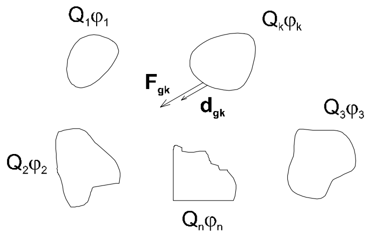
Opačně pole náboje Q_2 na náboj Q_1

$$\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \vec{r}_{21} \qquad (4.98)$$

Podle principu akce a reakce je

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \left(\vec{r}_{12} + \vec{r}_{21}\right) = 0 \qquad (4.99)$$

Coulombův zákon platí pouze pro bodové náboje a pro náboje jejichž poloměr je mnohonásobně menší, než vyšetřovaná vzdálenost od náboje a lze použít tato idealizace. Praktické ověření Coulombova zákona je náročné, především pro obtížnost vyloučení vlastního pole náboje, na který vyšetřovaná síla působí. Pokud bychom chtěli tento zákon použít např na výpočet síly mezi deskami kondenzátoru, museli bychom si desky rozdělit na elementární plošky s náboji (bodovými), museli bychom znát rozložení nábojů na deskách a superpozici vypočíst a sečíst vzájemné účinky všech nábojů. Prakticky je to těžko nerealizovatelné.



obr. 4.16

V řadě praktických případů se provádí **výpočet síly z energie**. Uvažujme soustavu nabitých těles obr. 4.16, jejichž geometrické tvary a poloha jsou udány obecnými souřadnicemi *g*. Nejmenší počet zevšeobecněných souřadnic, určujících jednoznačně geometrii dané soustavy se nazývá **stupeň volnosti** soustavy. Elektromechanické síly se potom snaží každou tuto obecnou souřadnici změnit. Vyjadřuje-li např. symbol *g* lineární posunutí, bude na soustavu působit mechanická síla, pokud je *g* úhel bude se jednat o moment dvojice sil, je-li *g* plocha, půjde o mechanické pnutí apod.

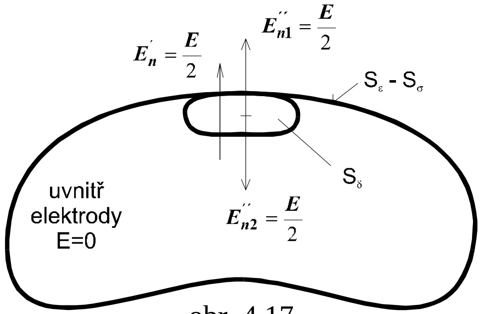
Dále budeme předpokládat, že všechna tělesa soustavy jsou nepohyblivá a souřadnici *g* můžeme měnit jen na k-tém tělese. Předpokládejme také absolutně tuhá tělesa, která nemění svůj tvar. Posunutí o *dg* bude pomalé, bez tepelných ztrát. Potom bude mít zákon zachování energie tvar

$$\sum \varphi_k \cdot dQ_k = dW_e + \vec{F}_g \cdot dg \qquad (4.100)$$

Tento zápis tedy vyjadřuje skutečnost, že celková energie dodaná vnějšími zdroji do soustavy se mění částečně na mechanickou práci $\boldsymbol{F} \cdot dg$ a částečně na energii pole. Energie pole se tedy mění buď přírůstkem (úbytkem) nábojů ze zdroje nebo mechanickým posunutím silou $\boldsymbol{F}_g$.

Při rozboru rovnice (4.100) nejprve předpokládejme Q_k = konst. Potom $dQ_k = 0$ a rovnice má tvar

$$0 = dW_e + \boldsymbol{F}_g \cdot dg \qquad (4.101)$$



obr. 4.17

a z toho

$$F_g = -\left(\frac{\partial We}{\partial g}\right)_{Q=konst} \qquad (4.102)$$

Síla při konstantním náboji je tedy rovna záporně vzaté derivaci energie podle měněné souřadnice. Práce je konána na úkor vnitřní energie soustavy a energie soustavy se tedy sníží (záporné znaménko u síly). Příkladem může být změna polohy jedné elektrody deskového kondenzátoru nabitého na *Q*, při odpojeném zdroji.

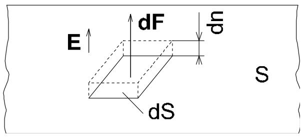
Dále předpokládejme změnu souřadnice při konstantním potenciálu φ = konst. Příkladem může být opět změna polohy elektrody deskového kondenzátoru, ale při připojeném zdroji. Použijme již uvedené vztahy

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot Q_k \qquad dW_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot dQ_k \qquad (4.103)$$

Rovnice (4.100) má potom tvar

$$2 \cdot dW_e = dW_e + \boldsymbol{F}_g \cdot dg \quad (4.104) \quad \text{a síla} \quad F_g = +\left(\frac{\partial We}{\partial g}\right)_{\varphi=konst.} \quad (4.105)$$

Práce se v tomto případě vykoná na úkor energie vnějších zdrojů a celková energie soustavy se zvětší.



obr. 4.18

Derivací energie můžeme také zjistit jaká je na povrchu elektrody plošná hustota síly. V souvislosti s Thomsonovým principem o minimu energií bylo řečeno, že na povrchu elektrod jsou souhlasné náboje, které se odpuzují a mají snahu pohybovat se tak daleko od sebe, jak daleko jim to dovolí vnější omezení. Existuje tedy nějaká síla, která se snaží vytlačit náboje z povrchu elektrody. Můžeme ji zjistit ze změny energie při posuvu malé plošky *ds* ve směru kolmém na elektrodu. Uvnitř vodiče je v elektrostatickém poli $E = 0 \Rightarrow W = 0$. Na povrchu je energie rozložená s hustotou $^1/_2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$. Při posunutí o *dn* podle obr. 4.17 se energie změní o

$$dW = -\,^1/_2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\cdot ds\cdot dn \tag{4.106}$$

Úbytek energie je roven práci síly pole, která zajistí mechanické posunutí o *dn*.

$$-\,dW = dA = dF\cdot dn = {}^1/_2\,E\cdot D\cdot ds\cdot dn \tag{4.107}$$

z toho

$$dF\,/\,ds = {}^1/_2\,E\cdot D = w \tag{4.108}$$

Síla je tedy rovna hustotě energie pole při povrchu elektrody. Tento závěr můžeme odvodit také z velikosti intenzity pole na elektrodě např. podle obr. 4.18. Celá plocha elektrody *s* a tedy i element plochy s_e jsou nabity nábojem s hustotou σ. Tato hustota je rovna velikosti normálové složky elektrické indukce $D_n = \sigma = \sigma_c\cdot\varepsilon_r$. Z elementu vycházejí siločáry na obě strany, takže podle obrázku

$$E''_{n1,2} = \pm\frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0} = \pm\frac{E}{2} \tag{4.109}$$

silové účinky této intenzity se na elementu ruší. Příspěvky od zbytku plochy elektrody $s - s_e$ musí být takové, aby se uvnitř elektrody intenzita vyrušila a $E = 0$. Výsledná intenzita od těchto příspěvků musí mít tedy směr proti E''_{n2} a musí mít velikost

$$E'_n = \frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0} = \frac{E}{2} \tag{4.110}$$

Tato intenzita působí na volný náboj *dQ* na elementu silou

$$d\boldsymbol{F} = dQ\cdot\boldsymbol{E'}_{\mathrm{n}} = \sigma\cdot d\boldsymbol{s}\cdot E/\,2 = {}^1/_2\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\cdot ds = {}^1/_2\,\varepsilon\cdot E^2\cdot\boldsymbol{n}\cdot ds \tag{4.111}$$

Výsledná síla na povrch elektrody je

$$F = \frac{1}{2}\int_s \varepsilon\cdot E^2\cdot d\vec{s} \tag{4.112}$$

V porovnání s magnetickými silami je tato síla zanedbatelná.

Sílu můžeme počítat i ze změny potenciálových koeficientů nebo změny koeficientů elektrostatické indukce. Pro energii *n* bodových nábojů jsme odvodili vztah

$$W_e = {}^1\!/_2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_{kl}\cdot Q_k\cdot Q_l = {}^1\!/_2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\beta_{kl}\,U_k\cdot U_l$$

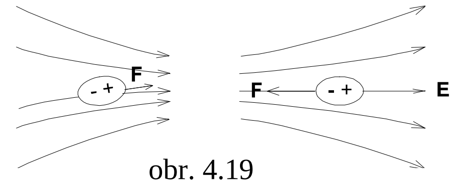
Změníme-li obecnou souřadnici g_{l} (l = 1, ...m), změní se i α_{kl} a β_{kl} a přitom se vykoná elementární práce

$$dA = -dW = -\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial We}{\partial g_1}\right)_{Q=konst.}\cdot dg_1 \tag{4.113}$$

Známe-li závisloslost α nebo β na obecné souřadnici, můžeme po dosazení vypočíst sílu, jako derivaci energie.

Elektrostatické síly jsou v praxi malé např. pro rovinný kondenzátor běžných prakticky používaných rozměrů

$$F = \frac{\varepsilon \cdot s \cdot U}{2a} \qquad (4.114)$$

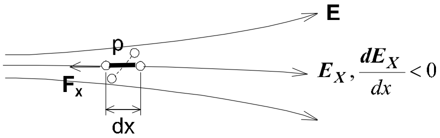


obr. 4.19

při $E = 10^7$ V/m, $\varepsilon_r = 1$, dosahuje řádově 10^{-1} Ncm^{-2} .V praxi se nedaří sestavovat elektrické silové stroje, pracující na elektrostatickém principu. Nicméně v některých zařízeních se silové účinky elstat pole na náboj využívají. Je to především u:

odprašování (odlučovačů popílku)

elektrostatické nanášení nátěrů

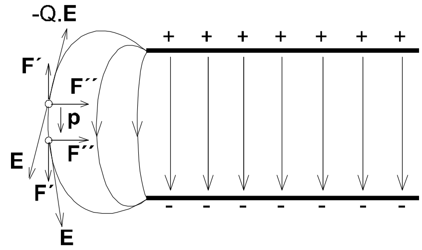


obr. 4.20

Přitom je důležité si uvědomit, že malý elektrický dipól je v nehomogenním el. poli podle obr. 4.19 vždy vtahován do míst s větší hustotou siločar. Je-li částečka ještě i nabitá, čili oba náboje nejsou zcela stejné, působí na ní také coulombovská síla. Dipól je tedy nejprve natáčen do směru intenzity obr.4.20. Síla se vypočte jako součet sil působící na oba náboje

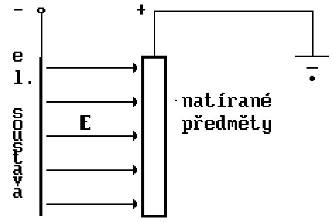
$$F_x = - Q \cdot E_x(x) + Q(E_x(x) + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx) = Q \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx = p \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

(4.115)



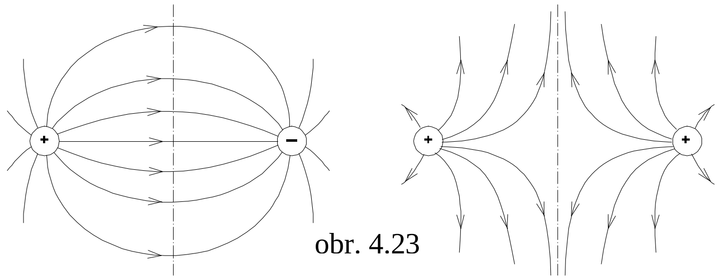
obr. 4.21

Na obr. 4.21 je nakreslen dipól rovnoběžný s vektorem ***E***, na něhož působí i síly kolmé na ***p***.



obr. 4.22

Elektrostatické nanášení nátěrových hmot v elektrostatickém poli je založeno na vzájemné přitažlivosti nesouhlasných elektrických nábojů. Vodivost (ionizaci) vzduchu lze za jistých podmínek zvětšit silným elektrickým polem. Zvětšujeme-li na vodiči elektrický náboj při stálé vzdálenosti od jiného vodiče, vytvoří se *tichý náboj*, tzv. *korona* - vzduch se tímto vlivem stává vodivější. Protože záporná korona dává silnější ionizaci, připojuje se elektrodová soustava na záporný pól vysokého napětí. Předměty se navěšují na dopravník s nulovým potenciálem obr.4.22.



obr. 4.23

Přivedeme-li do ionizovaného prostoru mezi elektrodu a předmět jemně rozprášenou nátěrovou hmotu, dostanou její částečky záporný náboj a po siločarách se pohybují směrem k předmětu. Dráhy částeček tedy nemusí, na rozdíl od stříkací pistole, být vždy přímkové. Nános nátěrové hmoty není rovnoměrný, protože hustota siločar na hranách je větší než na ploše a jak již bylo výše napsáno, jsou dipóly vtahovány více do míst s vyšší intenzitou pole. Čím jemněji budou částečky rozprášeny, tím mocnější bude účinek elektrostatického pole.

U dvou bodových nábojů se siločáry chovají tak, jakoby vyvozovaly podélný tah (u nábojů různé polarity) nebo příčný tlak (u nábojů stejných), jakoby se náboje siločárami přitahovaly nebo odpuzovaly - obr. 4.23.

4.7. Síly v magnetickém poli

Čas ke studiu: 2 hodiny

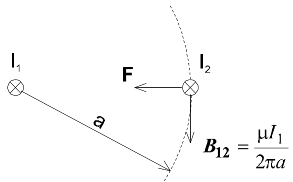
Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat vztah na sílu mezi dvěmi proudovodiči
- popsat silové působení v kruhovém závitu a v cívce
- vyřešit přitažlivou sílu elektromagnetu

Výklad

S magnetickými silami se setkáme již při definici základní jednotky - ampéru. Ampér je definován silou, která působí mezi dvěma rovnoběžnými vodiči protékanými proudy podle obr. 4.24. V tomto případě jsou vektory ***F***, ***B***, ***dl*** navzájem kolmé a můžeme psát vztahy jen pro jejich moduly

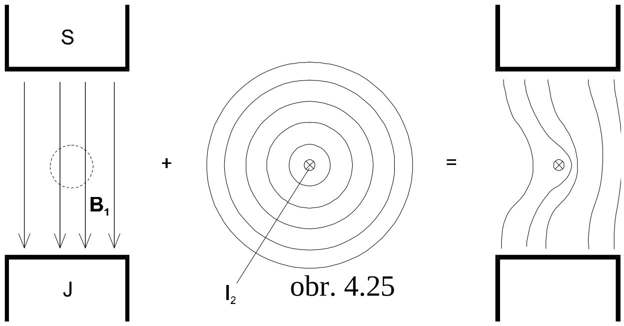
$$B_1 = \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot a} \qquad F = B_1 \cdot I_2 \cdot l \qquad F/l = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot a} \qquad (4.116)$$



obr. 4.24

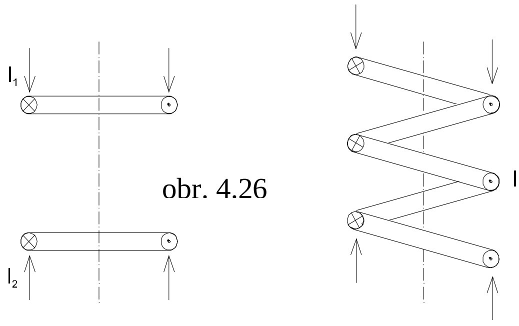
Vektorový tvar vztahu pro výpočet sil má podobu

$$d\boldsymbol{F} = I \cdot d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \qquad d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \cdot ds \qquad d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \cdot dV \qquad (4.117)$$

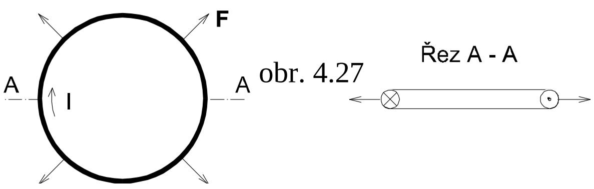


obr. 4.25

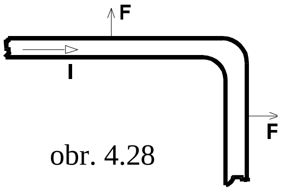
Obr. 4.25 nám potom dává názornou představu o směru síly. Superpozicí pole B_1 a pole od proudu I_2 dostáváme výsledné pole, které se na jedné straně zhušťuje, na druhé straně vodiče zřeďuje. Síla působí tak, jakoby vytlačovala vodič z hustějšího prostoru do řidšího. Souběžné proudy se tedy přitahují, protisměrné odpuzují - viz obr. 4.26. Jedná-li se o závity jedné cívky, je $I_1 = I_2 = I$ a síla mezi závity cívky je úměrná druhé mocnině protékajícího proudu. Stoupne-li při zkratu proud 10x, stoupne síla 100x.



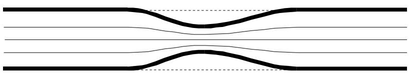
obr. 4.26



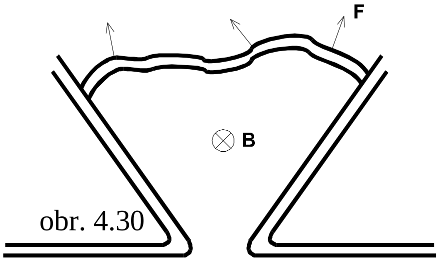
obr. 4.27



obr. 4.28



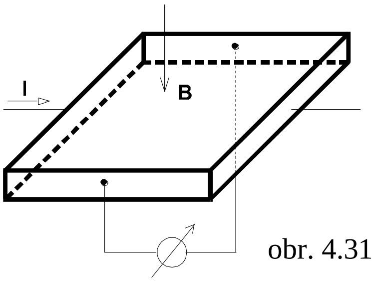
obr. 4.29



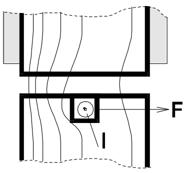
obr. 4.30

V praxi se silové účinky projevují u cívky tak, že se snaží závit roztrhnout obr.4.27. Podobně zahnutou část vodiče se snaží narovnat obr. 4.28. Souběžná vlákna se přitahují a v elektrickém oblouku obr. 4.29 může dojít i k přeskřípnutí vodivého plazmatu. Toto ale může být výhodné u zhášení el. oblouku v elektrických přístrojích. Zde se také za stejným účelem používá magnetických sil k natažení oblouku do prostoru zhášedla obr. 4.30, kde lze lépe odebrat oblouku teplo a uhasit ho.

Důsledkem účinků magnetických sil je také **Hallův jev**. Umístíme-li do příčného magnetického pole proudovodič, jsou jeho volné elektrony tlačeny k jedné z postranních stěn a tím vzniká napětí mezi oběma postranními stěnami obr. 4.31. To je dobře měřitelné na některých polovodičích, z nichž se zhotovují Hallovy sondy k měření intenzity resp. indukce pole.



obr. 4.31



obr. 4.32

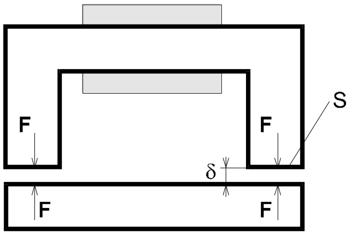
Nejvýznamnější použití mají magnetické síly v elektrických strojích. Podle obr. 4.32 je vodič mechanicky spojen s rotorem a síla tímto rotorem otáčí. Magnetické pole primární je v oblasti vodiče téměř homogenní.

Objemovou hustotu síly zavádíme tam, kde nás zajímají síly, působící na prostorově rozložený proud o hustotě ***J***

$$d\boldsymbol{F} / dV = \boldsymbol{f} = \boldsymbol{J} \text{ x } \boldsymbol{B} \qquad (4.118)$$

V prostoru s magnetickým obvodem z magnetika je obtížné stanovit indukci ***B***. Někdy se silové účinky v magnetických obvodech určují z derivací energií podle vztahu

$$F_k = -\frac{\partial W_m}{\partial g_k}\bigg|_{\Phi=konst} \qquad (4.119) \qquad F_k = -\frac{\partial W_m}{\partial g_k}\bigg|_{I=konst} \qquad (4.120)$$



obr. 4.33

Např. přitažlivou sílu elektromagnetu z obr. 4.33 vypočteme z derivace energie při konstantním toku Φ a při změně vzduchové mezery $\delta \equiv g$. Odpor úseků magnetických obvodů z feromagnetika je mnohem menší, než odpor vzduchové mezery (chovají se jako vodiče) a téměř celá energie mag. pole se koncentruje ve vzduchové mezeře. Její hustota je $w = B^2/2{\cdot}\mu_0$. Energie v mezeře plochy s je

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\cdot \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\delta} \qquad (4.121)$$

takže síla na poloviny kotvy

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{\delta}} = -\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{s}}{\mu_0} = -\frac{1}{2}\cdot\mu_0\cdot\boldsymbol{H}^2\cdot\boldsymbol{s} \qquad (4.122)$$

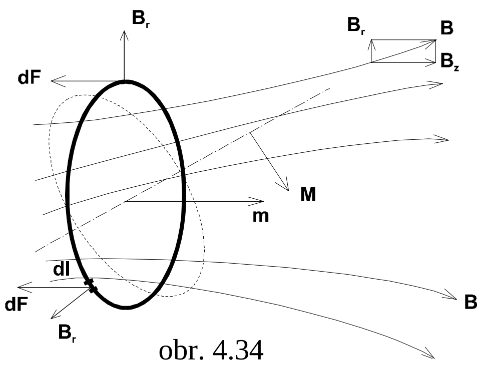
nebo

$$\mathrm{F} = \text{-}\ \boldsymbol{F} = -\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{s}^2}{\mu_0\cdot\boldsymbol{s}} = -\frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{\mu_0\cdot\boldsymbol{s}} = -\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{N}^2\cdot\boldsymbol{I}^2}{\boldsymbol{R}_m^2\cdot\mu_0\cdot\boldsymbol{s}} \qquad (4.123)$$

Výsledná síla

$$F_v = 2 \cdot F = -\frac{\boldsymbol{N}^2 \cdot \boldsymbol{I}^2}{\boldsymbol{R}_m^2 \cdot \mu_0 \cdot \boldsymbol{s}} \qquad (4.124)$$

Znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že F se snaží zmenšit δ.



obr. 4.34

Objeví-li se v homogenním magnetickém poli zmagnetované tělísko s magnetickým momentem $\boldsymbol{m}$, bude na něj působit pouze mechanický moment $\boldsymbol{M}_{\text{mech}} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$. Vložíme-li stejné tělísko do pole nehomogenního obr.4.34, je směr vektoru $\boldsymbol{B}$ a tedy velikost jeho složek v každém proudovém elementu smyčky jiný, a na tělísko bude působit navíc i síla, snažící se vtáhnout tělísko do místa s větší intenzitou pole. Složka B_z napíná dipól obvodovou silou, tj. vyvolává pouze mechanické pnutí, složka B_r vyvolává element síly

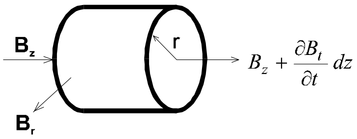
$$\boldsymbol{dF} = I \cdot \boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B} = - I \cdot dl \cdot B_r \cdot \boldsymbol{u}_z \qquad (4.125)$$

takže celková síla ve směru z je při poloměru smyčky r a proudu I

$$F_z = - I \cdot 2\pi r \cdot B_r \qquad (4.126)$$

Složku B_r vyjádříme ze změny $\delta B_z / \delta_z$ s použitím podmínky $div\ \boldsymbol{B} = 0$. Popišme tedy tok vektoru $\boldsymbol{B}$ plochou objemového elementu, který dostaneme posunutím proudového dipólu o dz podle obr. 4.35. Tok vektoru ve směru z je

$$- \pi \cdot r^2 \cdot B_z + (\pi \cdot r^2\, B_z + \frac{\partial}{\partial z}(\pi \cdot r^2\, B_z) \cdot dz) = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot dz$$



obr. 4.35

a ve směru r $\qquad 2\tilde{\pi} r \cdot dr \cdot B_r$

Z definice divergence

$$div\vec{B} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{V} \cdot \oint B(z) \cdot ds = \frac{\frac{\partial(\pi \cdot r^2 \cdot B_z)}{\partial z} \cdot dz + 2\pi \cdot r \cdot dz \cdot B_r}{\pi \cdot r^2 \cdot dz} = \frac{\partial Bz}{\partial z} + \frac{2}{r} \cdot B_r = 0 \qquad (4.127)$$

Odtud $B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial Bz}{\partial z}$ $\qquad (4.128)$

a síla na celý dipól ve směru z

$$F_z = \boldsymbol{m} \cdot \frac{\partial Bz}{\partial z} \qquad (4.129)$$

V každém magnetickém tělese, které se nachází v nehomogenním magnetickém poli vzniká osová síla působící na elementární magnetické momenty $\boldsymbol{dm} = \boldsymbol{M} \cdot dV$, která vyvolává spolu se silou radiální mechanické pnutí. Výpočet se provádí za pomocí tenzoru.

5. ZÁKLADY ŠÍŘENÍ VLN A ELEKTROMAGNETICKÁ KOMPATIBILITA

Čas ke studiu: 6 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní parametry šířící se vlny
- rozlišovat pojmy postupná vlna, zpětná vlna, stojatá vlna
- posoudit chování vlny v bezeztrátovém a ztrátovém prostředí
- vysvětlit pojmy skinefekt a jev blízkosti
- posoudit důsledky elektromagnetické kompatibility a elektromagnetické interference

Výklad

V celé této kapitole se dopustíme přijatelného zjednodušení fyzikální reality a budeme předpokládat, že se pohybujeme v lineárním homogenním izotropním prostředí s permitivitou $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, permeabilitou $\mu = \mu_0\mu_r$ a měrnou vodivostí γ. U vln vedených v neomezeném prostředí (např. mezi dvěmi anténami) se navíc omezíme na případ, kdy je námi zkoumaný prostor prost vnucených proudů $\mathbf{J}_{vn}$ a kdy je objemová hustota náboje ρ nulová, uvažovat budeme pouze přítomnost harmonického elektromagnetického pole o úhlovém kmitočtu ω.

5.1. Základní pojmy

Elektromagnetické pole vybuzené různými zdroji se může odloučit od svého zdroje a šířit se konečnou rychlostí ve tvaru elektromagnetické vlny prostorem, a to již samostatně a nezávisle na původním zdroji. rychlost šíření takovéto vlny je dána vztahem

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \lambda.f \tag{5.1}$$

ve vakuu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{5.2}$$

kde λ je délka vlny, f její frekvence.

Elektromagnetické pole, které vznikne v určitém místě prostoru, tedy nezaplní tento prostor okamžitě, ale šíří se v něm konečnou rychlostí, jež závisí na vlastnostech prostředí. Chceme-li toto šíření pole analyzovat, musíme nalézt řešení rovnic, jimiž jsou popsány vektory intenzity pole **E** a **H**.

Vektor **E** je popsán vlnovou rovnicí (bude odvozena později)

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + \hat{k}^2 \hat{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.3}$$

pro vektor **H** platí

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} + \hat{k}^2 \hat{\mathbf{H}} = 0 \tag{5.4}$$

Symbol k značí konstantu šíření (vlnové číslo)

$$\hat{k}^2 = -j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \tag{5.5}$$

a má dvě složky $\hat{k} = \alpha - j\beta$ (5.6)

přičemž veličina α se nazývá **fázová konstanta,** veličina β **měrný útlum: Vypočíst je lze ze vztahů**

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right)} \quad (5.7) \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right)} \quad (5.8)$$

Z materiálových parametrů a úhlové rychlosti lze také vypočíst tzv. **charakteristickou impedanci prostředí**:

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \gamma}} \tag{5.9}$$

Vztahy (5.3) a (5.4) vděčí za své jméno své podobě s rovnicemi, popisujícími šíření akustických a mechanických vln. Vyřešením (5.3) a (5.4) nalezneme elektrickou a magnetickou intenzitu elektromagnetické vlny, šířící se v našem výše popsaném prostoru.

V případě tzv. hlavní vlny **TEM** – transverzální elektromagnetické vlny (REM – rovinné elektromagnetické vlny) leží vektory **E** a **H** v rovině kolmé na směr šíření vlny a tato vektory tvoří spolu s Poyntingovým vektorem ortogonální soustavu. Takové vlny nalezneme u dvojvodičového vedení, koaálního vedení, ale také například u vln šířících se ve volném neohraničeném prostoru. Vlna hlavní TEM je možná jen v prostoru mezi dvěma galvanicky oddělenými plášti

U vlny **TE** – transverzální elektrické nebo také H vlny leží v rovině kolmé na směr šíření energie přenášené vlnou intenzita E, ale vektor intenzity magnetického pole **H** má i složku ve směru šíření energie.

U vlny **TM** – transverzální magnetické nebo také E vlny leží v rovině kolmé na směr šíření energie přenášené vlnou intenzita H, ale vektor intenzity magnetického pole **E** má i složku ve směru šíření energie. Vlny TE nebo TM se mohou šířit například ve vlnovodu.

Vlnoplochou rozumíme plochu, na které mají intenzita elektrického a magnetického pole stejnou fázi. O vlnách šířících se vzduchem v neohraničeném prostředí budeme předpokládat, že jsou uniformní – tzn. amplituda elektrické a magnetické intenzity je na vlnoploše konstantní. Předpokládejme, že zdrojem vlny je všesměrový bodový zářič. Pokud bychom si v určitém časovém okamžiku t_0 “udělali snímek” generovaného elektromagnetického pole, zjistili bychom, že místa se stejnou fází elektrické nebo magnetické intenzity, vlnoplochy, jsou soustředné kulové povrchy se středem v bodovém zářiči. Říkáme tedy, že prostorem se šíří kulová vlna. Společný střed kulových vlnoploch nazýváme **fázovým středem**. Pokud bude zdrojem vlny harmonický proud, protékající nekonečně dlouhým přímým vodičem, budou mít vlnoplochy válcový tvar a hovořit budeme o šíření válcové vlny.

Budeme-li kulovou nebo válcovou vlnu pozorovat z místa „téměř nekonečně“ vzdáleného od zdroje, bude zakřivení vlnoploch tak malé, že budeme moci považovat vlnoplochu za rovinnou. Z našeho hlediska se tedy bude prostorem šířit rovinná vlna.

5.2. Odvození vlnových rovnic a jejich řešení

Tab. 5.1

Veličiny obecně časově proměnné	Harmonický průběh veličin - fázory
Výchozí Maxwelovy rovnice	
$rot\,\mathbf{H}=\mathbf{J}_0+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ po vynásobení μ a dosazení	$rot\,\hat{\mathbf{H}}=\hat{\mathbf{J}}_0+j\omega\hat{\mathbf{D}}$
$\mathbf{D}=\varepsilon.\mathbf{E}$ a $\mathbf{J}_0=\mathbf{J}_{in}+\mathbf{J}_{vn}=\gamma\mathbf{E}+\mathbf{J}_{vn}$ $rot\,\mathbf{B}=\mu\gamma\mathbf{E}+\mu\mathbf{J}_{vn}+\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$	$rot\,\hat{\mathbf{B}}=\mu\gamma\,\hat{\mathbf{E}}+\mu\,\hat{\mathbf{J}}_{vn}+j\omega\mu\varepsilon\,\hat{\mathbf{E}}$
$rot\,\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ aplikujeme operaci rot	$rot\,\hat{\mathbf{E}}=-j\omega\hat{\mathbf{B}}$
$rot\,rot\,\mathbf{E}=-\underbrace{rot\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(rot\,\mathbf{B})}$ je jedno zda derivuji nejprve podle souřadnic nebo podle času	$rot\,rot\,\hat{\mathbf{E}}=-j\omega\,rot\,\hat{\mathbf{B}}$
Dosadíme prvou upravenou Maxwellovu rovnici do druhé	
$rot\,rot\,\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\gamma\mathbf{E}+\mu\mathbf{J}_{vn}+\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$ $rot rot\,\mathbf{E}=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\frac{\partial\mathbf{J}_{vn}}{\partial t}$	$rot\,rot\,\hat{\mathbf{E}}=-j\omega\mu\left(\mu\gamma\,\hat{\mathbf{E}}+\mu\,\hat{\mathbf{J}}_{vn}+j\omega\mu\varepsilon\,\hat{\mathbf{E}}\right)$
Využijeme identitu pro práci s operátory druhého řádu: $rot\,rot\,\mathbf{E}=grad\,div\,\mathbf{E}-\nabla^2\mathbf{E}$	
Ze třetí Maxwellovy rovnice $div\,\mathbf{D}=\rho_{vn}$ platí $div\,\mathbf{E}=\frac{\rho_{vn}}{\varepsilon}$ a po dosazení o řádek výše	
$rot\,rot\,\mathbf{E}=grad\,\frac{\rho_{vn}}{\varepsilon}-\nabla^2\mathbf{E}$	
je tedy dále	
$grad\,\frac{\rho_{vn}}{\varepsilon}-\nabla^2\mathbf{E}=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\frac{\partial\mathbf{J}_{vn}}{\partial t}$	$grad\,\frac{\hat{\rho}_{vn}}{\varepsilon}-\nabla^2\,\hat{\mathbf{E}}=-j\omega\mu\left(\mu\gamma\,\hat{\mathbf{E}}+\mu\,\hat{\mathbf{J}}_{vn}+j\omega\mu\varepsilon\,\hat{\mathbf{E}}\right)$
Po přeuspořádání koeficientů jsme získali nehomogenní vlnovou rovnici pro oblast se zdroji ρ_{vn} a $\mathbf{J}_{vn}$	
$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu\frac{\partial\mathbf{J}_{vn}}{\partial t}+grad\,\frac{\rho_{vn}}{\varepsilon}$	$\nabla^2\,\hat{\mathbf{E}}+\hat{k}^2\,\hat{\mathbf{E}}=grad\,\frac{\hat{\rho}_{vn}}{\varepsilon}+j\omega\mu\,\hat{\mathbf{J}}_{vn}$
V prostoru bez zdrojů, například v prostoru mezi dvěmi anténami platí homogenní vlnová rovnice	
$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0$ (5.10)	$\nabla^2\,\hat{\mathbf{E}}+\hat{k}^2\,\hat{\mathbf{E}}=0$ (5.11)

Nehomogenní vlnovou rovnici lze psát i pro další polní veličiny s tím, že se změní i budící veličina – tedy pravá strana rovnice, např.:

$$\nabla^2\mathbf{B}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\mu\,rot\,\mathbf{J}_{vn} \quad (5.12)$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\mu\mathbf{J}_{vn} \quad (5.13)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\rho_{vn}}{\varepsilon} \qquad (5.14)$$

Podobně lze psát vlnové rovnice i pro další veličiny a to i harmonické (jako fázory pomocí konstanty šíření *k*).

Při šíření radiových vln, jejichž veličiny mají harmonický průběh nás zajímá vlnová rovnice pro fázory. Podívejme se nejprve, jak vypadá řešení takové rovnice v bezeztrátovém prostředí, tj. v prostředí jehož materiálová parametr – vodivost $\gamma = 0$. Pro řešení vlnové rovnice zavedeme některé zjednodušující předpoklady. V prvé řadě předpoklad, že se vlna šíří pouze podél jedné souřadnice, např. *x* a změny hodnot intenzit elektrického a magnetického pole se mění pouze v závislosti na této souřadnici:

$$\hat{\mathbf{E}} = funkce\, x \qquad \hat{\mathbf{H}} = funkce\, x$$

a obojí se nemění v závislosti na dalších dvou souřadnicích, což lze zapsat:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \text{a} \quad \text{tedy platí} \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

Vlnová rovnice potom bude mít pro jednu proměnnou tvar:

$$\frac{d^2 \hat{\mathbf{E}}}{dx^2} + \hat{k}^2 \hat{\mathbf{E}} = 0 \qquad (5.15)$$

s řešením

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{C}}_1 e^{j\hat{k}x} + \hat{\mathbf{C}}_2 e^{-j\hat{k}x} \qquad (5.16)$$

Jedná se tedy o superpozici dvou vln, šířících se ve směru osy *x*. Dosadíme-li za

$$\hat{k} = \alpha - j\beta$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{C}}_1 e^{j\alpha x} e^{\beta x} + \hat{\mathbf{C}}_2 e^{-j\alpha x} e^{-\beta x} \qquad (5.17)$$

zjišťujeme, že amplituda jedné vlny $\hat{\mathbf{E}}_1 = \hat{\mathbf{C}}_1 e^{j\hat{k}x}$, neboli $\hat{\mathbf{E}}_1 = \hat{\mathbf{C}}_1 e^{j\alpha x} e^{\beta x}$ s rostoucí souřadnici *x* stoupá, amplituda druhé vlny $\hat{\mathbf{E}}_2 = \hat{\mathbf{C}}_2 e^{-j\hat{k}x}$, neboli $\hat{\mathbf{E}}_2 = \hat{\mathbf{C}}_2 e^{-j\alpha x} e^{-\beta x}$ je s rostoucí souřadncí *x* tlumena. Je tedy jasné, že u druhé vlny je zdroj v místě s nižší souřadnicí *x*, například v $x = 0$, a postupuje ve směru souřadnice x, zatímco prvá vlna má zdroj (nebo místo, kde dochází k jejímu odrazu) na jisté souřadnici *x* a šíří se proti směru narůstání této souřadnice (zpět např. k nule osy *x*).

Proto budeme nazývat vlnu, charakterizovanou výrazem $e^{-j\hat{k}x}$ jako vlnu postupnou, vlnu charakterizovanou výrazem $e^{j\hat{k}x}$ jako vlnu zpětnou.

Víme tedy, že řešením vlnové rovnice můžeme získat dvě vlny. Další možnosti řešení mají spojitost s vektorovým charakterem intenzit elektrického a magnetického pole. Výsledná intenzita

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_x \cdot \mathbf{u}_x + \hat{E} \cdot \mathbf{u}_y + \hat{E}_z \cdot \mathbf{u}_z \qquad (5.18)$$

Pokusme se nalézt, jak může být vektor intenzity elektrického pole orientován vzhledem ke směru šíření *x*, resp. zda může mít směr natolik obecný, abychom ho mohli rozložit do všech tří souřadnic.

Předpokládáme vlnu, která se šíří v bezeztrátovém dielektriku (vzduchu), v němž není přítomen náboj hustoty ρ. Pro takový prostor platí Gaussova věta ve tvaru $div\,\hat{\mathbf{E}} = \rho/\varepsilon = 0$

$$div\,\hat{\mathbf{E}} = \nabla\cdot\hat{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)\cdot\left(\hat{E}_x\, e^{\pm j\hat{k}x}\mathbf{u}_x + \hat{E}_z\, e^{\pm j\hat{k}x}\mathbf{u}_z + \hat{E}_z\, e^{\pm j\hat{k}x}\mathbf{u}_z\right) =$$

$$= \frac{\partial\,\hat{E}_x\, e^{\pm j\hat{k}x}}{\partial x} + \frac{\partial\,\hat{E}_y\, e^{\pm j\hat{k}x}}{\partial y} + \frac{\partial\,\hat{E}_z\, e^{\pm j\hat{k}x}}{\partial z} \overset{!}{=} 0 \tag{5.19}$$

Druhý a třetí člen budou vždy nabývat nulové hodnoty, protože pro proměnné, podle nichž se v těchto členech derivuje, představuje čitatel konstantu – derivace konstanty je rovna nule. Aby byl nulový výraz pro $div\,\hat{\mathbf{E}}$, musí být v prvním sčítanci hodnota E_x nulová. To nastane pouze v případě, že šířící se vlna nemá složku ve směru svého šíření. Může mít složky pouze v rovině *yz,* kolmé (transverzální) ke směru šíření. Odtud tedy plyne již výše zmíněný název TEM vlna. Na základě rozboru řešení vlnové rovnice tedy můžeme předpokládat, že ve směru osy *x* se mohou šířit vlny:

Tab. 5.2

1.	Vlna postupná	Intenzita elektrického pole složka E_y
2.		Intenzita elektrického pole složka E_z
3	Vlna zpětná	Intenzita elektrického pole složka E_y
4.		Intenzita elektrického pole složka E_z

5.3. Postupná vlna

❑ Intenzita elektrického pole složka E_y

V prvé řadě se zajímejme případem 1. z tabulky, tj vlnou postupnou, intenzita elektrického pole ve směru *y*. Integrační konstantu $\hat{\mathbf{C}}_2$ označíme $\hat{\mathbf{E}}_0$ - má hodnotu intenzity elektrického pole na souřadnici $x = 0$. Je tedy:

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_y\,\mathbf{u}_y = \hat{E}_0\, e^{-j\hat{k}x}\mathbf{u}_y \tag{5.20}$$

Z Maxwellovy rovnice $rot\,\hat{\mathrm{E}} = -j\omega\mu\hat{\mathbf{H}}$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{-j\omega\mu}rot\,\hat{\mathrm{E}} = \frac{1}{-j\omega\mu}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \hat{E}_0\, e^{-j\hat{k}x} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-j\hat{k}}{-j\omega\mu}\hat{E}_0\, e^{-j\hat{k}x}\mathbf{u}_z \tag{5.21}$$

Z výsledku je zřejmé, že vektor intenzity magnetického pole má složku ve směru osy *y*, je kolmý na intenzitu elektrického pole a oba leží v rovině kolmé na směr šíření, který je totožný se směrem Poyntingova vektoru. Všechny tři vektory tedy tvoří ortogonální systém. Dále zjišťujeme, že oba vektory intenzit se od sebe liší pouze zlomkem, který označíme $1/\hat{Z}_v$ a veličinu $\hat{Z}_v$ nazveme charakteristickou impedancí prostředí. Je tedy

$$\hat{Z}_v = \frac{-j\omega\mu}{-j\hat{k}} = \frac{\sqrt{\omega\mu}\sqrt{\omega\mu}}{\sqrt{-j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)}} = \frac{\sqrt{\omega\mu}}{\sqrt{-j(\gamma + j\omega\varepsilon)}}\sqrt{\frac{j}{j}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} \tag{5.22}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{H}_z \mathbf{u}_z = \frac{\hat{E}_0}{\hat{Z}_v} e^{-j\hat{k}x}\mathbf{u}_z = \hat{H}_0 e^{-j\hat{k}x}\mathbf{u}_z \tag{5.23}$$

kde je $\hat{\mathbf{H}}_0 = \hat{\mathbf{E}}_0 / \hat{Z}_v$ a $\hat{\mathbf{E}} = \hat{Z}_v\left[\hat{\mathbf{H}} \times \mathbf{n}\right]$ (5.24)

nebo také v zápise

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{Z}_v\left[\hat{\mathbf{H}} \times \mathbf{u}_x\right] \quad (5.25) \qquad \hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\hat{Z}_v}\left[\mathbf{u}_x \times \hat{\mathbf{E}}\right] \quad (5.26)$$

Bezeztrátové prostředí

Prostředí v němž $\gamma = 0$ nazýváme bezeztrátové. Nedochází zde k úbytku energie, na rozdíl od prostředí ztrátového, kde jsou ztráty způsobeny průtokem proudů, indukovaných ve vodivém prostředí.

$$\hat{k} = \sqrt{-j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{-j\omega\mu(0 + j\omega\varepsilon)} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{5.27}$$

Konstanta šířená tedy je pouze reálná a vzhledem k tomu, že $\hat{k} = \alpha - j\beta$, platí:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \alpha \qquad \beta = 0 \tag{5.28}$$

Vlna tedy není tlumena.

Charakteristická impedance má rovněž jen reálnou část.

$$\hat{Z}_v = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{0 + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{5.29}$$

Ve vzduchu

$$Z_v = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377\Omega$$

Vzhledem k tomu, že charakteristická impedance v bezeztrátovém prostředí je reálné číslo, budou podle vztahu (5.24) intenzita elektrického pole a intenzita magnetického pole ve fázi. Okamžité hodnoty těchto veličin představují imaginární části komplexorů těchto intenzit.

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\hat{\mathbf{E}}_0\, e^{-jkx}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\,E_0 e^{j(\omega t - kx)}\mathbf{u}_y\right\} \tag{5.30}$$

V goniometrickém tvaru

$$\mathbf{E} = \sqrt{2}E_0 \sin(\omega t - kx)\mathbf{u}_y \tag{5.31}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{2}\frac{E_0}{Z_v}\sin(\omega t - kx)\mathbf{u}_z \tag{5.32}$$

Druhá odmocnina z dvojky signalizuje, že za E_0 dosazujeme efektivní hodnotu intenzity.

Rovinná vlna postupující ve směru osy x má oba vektory intenzit ve fázi a místa se stejnou fází jednotlivých vektorů (např. nuly nebo maxima intenzit) se pohybují ve směru x rychlostí, kterou nazýváme fázová rychlost. Místa se stejnou fází jsou taková místa, kde amplituda

$$\mathbf{E} = \sqrt{2} E_0 \sin(\omega t - kx)\mathbf{u}_y = konst. \quad \text{resp.} \quad \mathbf{H} = \sqrt{2}\frac{E_0}{Z_v}\sin(\omega t - kx)\mathbf{u}_z = konst.$$

tzn. tam, kde $\sin(\omega t - kx) = konst.$ a dále $(\omega t - kx) = konst.$, např. = 0, potom

$$\omega t = kx \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.33}$$

Vzdálenost těchto míst se stejnou fází označíme jako délku vlny λ. Úhlová délka jedné vlny sinusového průběhu je 2π, fáze vlny šířící se v prostředí s vlnovou konstantou k na souřadnici x je kx, na souřadnici $(x + \lambda)$ je $k(x + \lambda)$. Platí tedy

$$k(x + \lambda) - kx = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{v_f}{f} \tag{5.34}$$

Ve vakuu nebo vzduchu dostáváme známý vztah

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Pokusme se nalézt ještě velikost třetího vektoru, který doplňuje intenzity polí na ortogonální systém REM vlny – Poyntingův vektor

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathrm{H} = \left(\sqrt{2}E_0 \sin(\omega t - kx)\right)\left(\sqrt{2}\frac{E_0}{Z_v}\sin(\omega t - kx)\right)\left[\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z\right] = \frac{2E_0^2}{Z_v}\sin^2(\omega t - kx)\mathbf{u}_x =$$

$$= \left[\frac{E_0^2}{Z_v} - \frac{E_0^2}{Z_v}\cos 2(\omega t - kx)\right]\mathbf{u}_x \tag{5.35}$$

Výsledný vztah potvrzuje, že Poyntingův vektor má směr šíření vlny x. Funkce cos může nabývat hodnot v rozmezí -1 až +1, je tedy zřejmé, že první člen v závorce představuje střední hodnotu Poyntingova vektoru, na níž je superponován kosinový průběh, kmitající s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence šířící se vlny. Vzhledem k tomu, že výsledek představuje hustotu výkonu šířené vlny, může nabývat jen kladných hodnot. Ze symbolického tvaru uvažovaných tří vektorů platí:

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^{*} = \hat{E}_0\, e^{-j\hat{k}x}\,\frac{\hat{E}_0}{Z_v}e^{+j\hat{k}x}\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \frac{\hat{E}_0^{\,2}}{Z_v}\mathbf{u}_x \tag{5.36}$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru je rovna reálné části fázoru Poyntingova vektoru.

❑ Zpětná vlna

Řešení s kladným argumentem přísluší zpětné vlně a má tvar:

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_0\, e^{+jkx}\mathbf{u}_y \quad (5.37) \qquad\qquad \hat{\mathbf{H}} = -\frac{\hat{E}_0}{\mathrm{Z_v}}e^{+jkx}\mathbf{u}_z \quad (5.38)$$

přičemž odvození vztahu pro intenzitu magnetického pole bylo provedeno podobně jako v odstavci „Intenzita elektrického pole složka E$_y$“ vztah (5.21). Podobně získáme i okamžité hodnoty intenzit.

$$\mathbf{E} = \sqrt{2} E_0 \sin(\omega t + kx)\mathbf{u}_y \tag{5.39}$$

$$\mathbf{H} = -\sqrt{2}\frac{E_0}{Z_v}\sin(\omega t + kx)\mathbf{u}_z \tag{5.40}$$

Vlna se opět šíří jako lineárně polarizovaná a její složky E_y, H_z a N_x tvoří ortogonální systém. Vektor fázové rychlosti v_f a Poyntingův vektor mají směr proti souřadnici x.

❑ Stojatá vlna v bezeztrátovém prostředí

Předpokládejme, že se volným prostorem šíří ve směru souřadnice x dvě lineárně polarizované vlny. Pro jednoduchost dále předpokládejme stejnou amplitudu intenzity elektrického pole E_0 a stejnou rovinu polarizace obou vln (intenzity mají pouze složky v ose y). Řekněme, že smysl šíření vln bude opačný, to znamená, že jedna vlna se šíří jako přímá

$$\hat{\mathbf{E}}_1 = \hat{E}_0 e^{-jkx}\mathbf{u}_y \,,$$

druhá jako zpětná

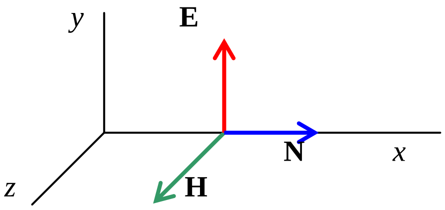
$$\hat{\mathbf{E}}_2 = \hat{E}_0 e^{jkx}\mathbf{u}_y$$

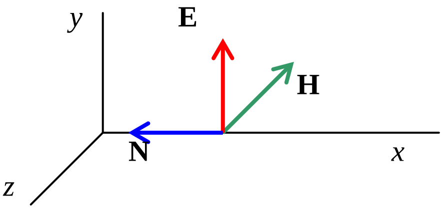
Druhá vlna může být odrazem vlny první od dokonalého zkratu. V místě zkratu pak musí platit $E_1 = E_2$, protože ve zkratovaném místě musí být intenzita elektrického pole nulová.

Výsledná vlna bude dána součtem nebo rozdílem obou těchto vln, v závislosti na polaritě intenzit.

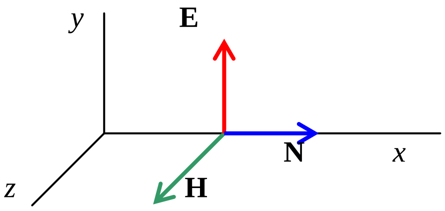
$$\hat{\mathbf{E}} = \left(\hat{E}_0 e^{+jkx} \pm \hat{E}_0 e^{-jkx}\right)\mathbf{u}_y = \hat{E}_0\left(e^{+jkx} \pm e^{-jkx}\right)\mathbf{u}_y$$

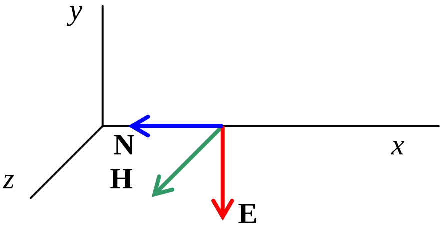
Situace pro znaménko +





Situace pro znaménko –





Rozšíříme rovnice vhodnými zlomky, které se sice rovnají jedničce, nicméně umožní přechod exponenciálních funkcí na funkce goniometrické.

Pro znaménko +	Pro znaménko –
$\hat{\mathbf{E}}_+ = \hat{E}_0\left(e^{+jkx} + e^{-jkx}\right)\mathbf{u}_y \cdot \frac{2}{2}$	$\hat{\mathbf{E}}_- = \hat{E}_0\left(e^{+jkx} - e^{-jkx}\right)\mathbf{u}_y \cdot \frac{2j}{2j}$
$\cos kx = \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2}$	$\sin kx = \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j}$
$\hat{\mathbf{E}}_+ = 2\hat{E}_0 \cos kx\mathbf{u}_y$	$\hat{\mathbf{E}}_- = 2j\hat{E}_0 \sin kx\mathbf{u}_y$
Předpokládáme nulovou fázi E_0, $\varphi = 0$ a $\hat{E}_0 = E_0 e^{j\varphi} = E_0$	
$E_+(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}.2E_0(\cos kx).e^{j\omega t}\right\}\mathbf{u}_y =$ $= \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}.2E_0(\cos kx).(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right\}\mathbf{u}_y =$ $= \left(\sqrt{2}.2E_0 \cos kx.\sin\omega t\right)\mathbf{u}_y$	$E_-(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}.2jE_0(\sin kx).e^{j\omega t}\right\}\mathbf{u}_y =$ $= \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}.2E_0(\sin kx).(j\cos\omega t + \sin\omega t)\right\}\mathbf{u}_y =$ $= \left(\sqrt{2}.2E_0 \sin kx.\cos\omega t\right)\mathbf{u}_y$
Pokud uvažujeme fázi intenzity $\hat{E}_0 = E_0 e^{j\varphi} = E_0(\cos\varphi + j\sin\varphi)$	
$E_+(x,t) = \left(\sqrt{2}.2E_0 \cos kx.\sin(\omega t + \varphi)\right)\mathbf{u}_y$	$E_-(x,t) = \left(\sqrt{2}.2E_0 \sin kx.\cos(\omega t + \varphi)\right)\mathbf{u}_y$

Dostáváme tedy dva druhy stojaté vlny. Stojaté proto, že uzly a nuly průběhů okamžitých hodnot jsou stále na stejných souřadnicích *x*.

❑ Intenzita elektrického pole složka Ez

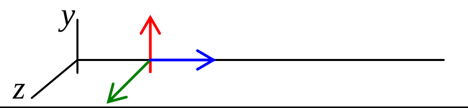
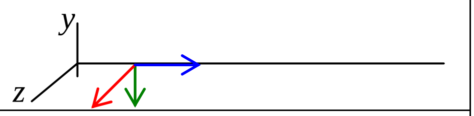
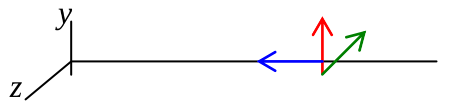
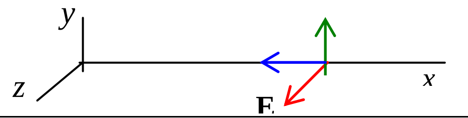
Situace je obdobná jako u složky E ve směru *y*. Pro bezeztrátové prostředí má vlnová rovnice tvar:

$$\frac{d^2 \hat{E}_z(x)}{dx^2} + k\hat{E}_z(x) = 0 \qquad (5.41)$$

s řešením

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_0 e^{\pm jkx}\mathbf{u}_z \qquad \hat{\mathbf{H}} = \pm\frac{\hat{E}_0}{Z_v} e^{\pm jkx}\mathbf{u}_y \qquad (5.42)$$

Řešením vlnové rovnice pro vlnu, u níž změny vektorů intenzit elektrického a magnetického pole nastávají pouze se změnou souřadnice *x*, dostáváme čtyři možnosti šíření vlny- tab. 5.3.

	Směr šíření	Intenzita el. pole	Intenzita mag. pole	
		$\hat{E}_y^p = \hat{C}_1 e^{-jkx}$	$\hat{H}_z^p = \frac{\hat{C}_1}{Z_v} e^{-jkx}$	
		$\hat{E}_z^p = \hat{C}_2 e^{-jkx}$	$\hat{H}_y^p = -\frac{\hat{C}_2}{Z_v} e^{-jkx}$	
		$\hat{E}_y^z = \hat{C}_3 e^{-jkx}$	$\hat{H}_z^z = -\frac{\hat{C}_3}{Z_v} e^{-jkx}$	
		$\hat{E}_z^z = \hat{C}_4 e^{-jkx}$	$\hat{H}_y^z = \frac{\hat{C}_4}{Z_v} e^{-jkx}$	

Superpozicí vln 1. a 2. dostáváme vlnu postupnou, která může být polarizována elipticky, kruhově nebo lineárně. Superpizicí vln 1.a 3. můžeme získat tzv. stojatou vlnu, která má v určitých souřadnicích *x* uzly (nulové hodnoty), v jiných *x* kmitny (maxima), přičemž kmitnám **E** odpovídají uzly **H** a opačně. Maxima a minima **E** a **H** jsou posunuta v prostoru o λ/4, v čase o T/4. V těchto místech je vždy jeden z těchto vektorů nulový a hodnota Poyntingova vektoru **N** = **E** x **H** je zde rovněž nulová. Důsledkem je skutečnost, že stojatá vlna nepřenáší žádný výkon. .

5.4. Rovinná vlna ve ztrátovém prostředí

Jako ztrátové nazýváme prostředí, v němž nelze zanedbat γ vůči εω. Konstanta šíření bude komplexní číslo

$$\hat{k}^2 = -j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \qquad \hat{k} = \sqrt{-j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)} = \alpha - j\beta \tag{5.43}$$

to znamená, že má i imaginární část, $\beta \neq 0$, a vlna je tlumena. Vzhledem k tomu, že i charakteristická impedance má tvar komplexního čísla

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \gamma}} = Z_v e^{j\varphi_v} = R_v + jX_v \tag{5.44}$$

nevymizí reaktanční část této impedance a projeví se to i ve fázovém posuvu vektorů impedance elektrického a magnetického pole. Tyto vektory nebudou, na rozdíl od bezeztrátového prostředí, ve fázi, ale jejich fáze se bude lišit právě úhlem φ_v, který je úměrný činným ztrátám. Vyplývá to ze vztahů pro fázory intenzit

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_0\, e^{-j\alpha x} e^{-\beta x}\mathbf{u}_y \tag{5.45}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{E}_0}{\mathrm{Z_v}} e^{-j(\alpha x + \varphi_v)} e^{-\beta x}\mathbf{u}_z \tag{5.46}$$

a pro okamžité hodnoty intenzit, které získáme jako imaginární část uvedených fázorů vynásobených $e^{j\omega t}$, tedy z komplexorů intenzit, např:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}E_0 e^{-j\alpha x} e^{j\omega t} e^{-\beta x}\mathbf{u}_y\right\} = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}E_0 e^{-j(\omega t - \alpha x)} e^{-\beta x}\mathbf{u}_y\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}E_0 e^{-\beta x}\left[\cos(\omega t - \alpha x) + j\sin(\omega t - \alpha x)\right]\mathbf{u}_y\right\} = \sqrt{2}E_0 e^{-\beta x}\sin(\omega t - \alpha x)\mathbf{u}_y \tag{5.47}$$

Podobně bychom získali

$$\mathbf{H} = \sqrt{2}\,\frac{E_0}{\mathrm{Z_v}} e^{-\beta x}\sin(\omega t - \alpha x - \varphi_v)\mathbf{u}_z \tag{5.48}$$

Z obou vztahů je opět zřejmé, že fáze **E** a **H** se liší o úhel vlnové impedance φ_v. Dále je vidět, že amplitudy intenzit s postupem vlny exponenciálně klesají. Pokles je způsoben úbytkem energie vlny, která kryje činné ztráty, způsobené proudy ve vodivém prostředí – (mění se v teplo). Výkon přenášený vlnou

$$\mathbf{N}_{stř} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\mathbf{N}}\right\},$$

kde

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^{*} = \frac{\left|\hat{\mathrm{E}}\right|^{2}}{\hat{Z}_{v}^{*}} = \frac{E_{0}^{2} e^{-2\beta x}}{Z_{v}} e^{j\varphi_{v}} \mathbf{u}_{x} \tag{5.49}$$

Poyntingův vektor má samozřejmě i imaginární část, což znamená, že dochází k výměně energie mezi elektrickým a magnetickým polem.

CD-ROM

A6

Vyzařování elektromagnetické vlny – klikni na animaci A6

5.5. Odraz a lom elektromagnetických vln

Vlna dopadající na rozhraní dvou prostředí, lišících se některým z parametrů ε, γ, μ se může částečně nebo zcela odrazit, částečně nebo zcela projít, a to jako vlna lomená, tzn. S jiným úhlem, než byl úhel dopadu vlny na rovinu dopadu.

Pro průchod a odraz vln platí:

- vektory $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ určující směr šíření vln (0 – dopadající, 1 – odražená, 2 – prostupující) musí ležet ve stejné rovině, tzv. rovině dopadu
- úhel dopadu se rovná úhlu odrazu
- pro vztah úhlů vlny dopadající a prostupující platí Snelliův zákon

$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1} = \frac{\hat{\mathbf{k}}_1}{\hat{\mathbf{k}}_2} \tag{5.50}$$

nebo

$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1} = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1} \tag{5.51}$$

Závislost intenzit vlny odražené a prostupující v závislosti na intenzitě vlny dopadající vyjadřují Fresnelovy rovnice. Tato rovnice se liší podle toho, zda je rovnoběžný z rozhraním vektor **E** nebo **H**. Obecný průběh dopadající vlny lze vždy rozložit do těchto dvou případů.

1. **vektor E je rovnoběžný s rozhraním, H leží v rovině dopadu**

$$\rho_E = \frac{\hat{E}_1}{\hat{E}_0} = \frac{\hat{Z}_{v2}\cos\vartheta_1 - \hat{Z}_{v1}\cos\vartheta_2}{\hat{Z}_{v2}\cos\vartheta_1 + \hat{Z}_{v1}\cos\vartheta_2} \quad \text{- činitel odrazu} \tag{5.52}$$

$$\tau_E = \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_0} = \frac{2\hat{Z}_{v2}\cos\vartheta_1}{\hat{Z}_{v2}\cos\vartheta_1 + \hat{Z}_{v1}\cos\vartheta_2} \quad \text{- činitel prostupu} \tag{5.53}$$

2. **vektor H je rovnoběžný s rozhraním, E leží v rovině dopadu**

$$\rho_H = \frac{\hat{H}_1}{\hat{H}_0} = -\frac{\hat{Z}_{v2}\cos\vartheta_2 - \hat{Z}_{v1}\cos\vartheta_1}{\hat{Z}_{v2}\cos\vartheta_2 + \hat{Z}_{v1}\cos\vartheta_1} \quad \text{- činitel odrazu} \tag{5.54}$$

$$\tau_H = \frac{\hat{H}_2}{\hat{H}_0} = \frac{2\hat{Z}_{v1}\cos\vartheta_1}{\hat{Z}_{v2}\cos\vartheta_2 + \hat{Z}_{v1}\cos\vartheta_1} \text{ - činitel prostupu} \qquad (5.55)$$

K totálnímu prostupu dojde v případě, že ρ = 0 (jmenovatel zlomku položíme rovný nule). Totální odraz nastane pro τ = 0.

Vzhledem k tomu, že problematika odrazu a lomu vln byla probrána dostatečně ve fyzice, nebudeme ji zde dále rozvádět.

5.6. Elektromagnetická kompatibilita EMC

Rozšiřující se množství elektrických přístrojů, profesionálně i amatérsky využívaných vysílaček, různých přenosných ručních nebo mobilních telefonů, zapalování aut apod. způsobují v prostředí určeném pro život a pro přístroje usnadňující tento život elektromagnetické zamoření. Prvotním úkolem konstruktérů elektrických přístrojů je eliminovat vliv tohoto „elektromagnetického smogu“ na životní funkce lidského organismu, včetně vlivů psychických, dalším úkolem je omezit ovlivnění jiných elektronických zařízení vnějším rušením. Zvláště citlivá na elektromagnetická pole je výpočetní technika. Škody při selhání systému (odstavením počítačů, ztrátou dat), např. po úderu blesku bývají 10 ÷ 100 krát větší než přímé škody. Čím rychlejší jsou počítače, tím jsou zranitelnější a tím menší rušení může způsobit chybu v hard- nebo softwaru.

Vliv elektromagnetického rušení může být zanášen do zařízení po vedení galvanickou, kapacitní nebo induktivní vazbou nebo vlivem šíření vln volným prostorem. Nejen konstruktéři techniky, která rušení produkuje, ale i konstruktéři zařízení, které by rušením mohlo být ovlivněno musí při svých návrzích brát v úvahu zodolnění svých výrobků proti vlivům elektromagnetických polí. Každý odklad při rozhodování o nasazení ochrany proti účinkům elektromagnetického rušení a pulsního přepětí u počítačových sítí se může stát osudným. Zatímco menší intenzity rušení se mohou projevit pouze zamrznutím počítače, „spadnutím“ počítačové sítě, ztrátou přenášených dat, zablouděním jinak spolehlivého programu apod., větší intenzity (např. způsobené indukcí při úderu blesku) mohou způsobit fyzické zničení všech síťových karet, zdrojů, videokaret apod. Situace může vést i ke zničení všech dat firmy.

Mezi nejčastější typy rušení v sítích patří vf rušení a pulsní přepětí. Vysokofrekvenční rušení má svůj původ především v činnosti vysílačů, mobilních telefonů, ale i radarů (např. v blízkosti řek a letišť) a z nedostatečně odrušených elektrospotřebičů. Může znemožnit přenos dat a v extrémních případech způsobit i výpadek činnosti mikroprocesorových systémů. Přepětí pulsní může mít jak rušivé, tak ničivé následky. Jako pulsní přepětí označujeme krátké pulsy na vedení s trváním několika ns až ms, jejichž amplituda překročí jmenovité napětí na vedení o desítky procent nebo až o několik řádů (např. 1000 krát).

Nejčastějším zdrojem přepětí a obecně rušení v soustavě nn napájení je vedle malých spotřebičů (zářivky, kopírky) především činnost velkých místních elektrických spotřebičů, zejména spouštění těžkých motorů (válcovací stolice, výtahy), indukční ohřevy apod. Ke zdrojům pulsního přepětí patří i činnost vypínačů všech druhů - podle charakteru spotřebiče se při vypnutí objeví v síti přepětí 1,5 ÷ 3 násobku jmenovité hodnoty (např. u startéru zářivek je $U_{\max} = 3 \cdot U_{\mathrm{jm}}$, u ss relé $U_{\max} = 20 \cdot U_{\mathrm{jm}}$). Pulsy mohou dosahovat hodnot od několika stovek voltů (kopírky, mrazáky, zářivky, halogénky) až po kV u některých motorů.

K vnějším průmyslovým zdrojům rušení patří především přepínací jevy ve vn a vvn rozvodech. Na vedení při přepínání vn a vvn vznikají pulsy s charakteristickou délkou náběžné hrany 10ns, dosahující v absolutních hodnotách až kV. Tyto pulsy se šíří po vedení a přenášejí se do rozvodů nn přes transformátory především kapacitní vazbou. K vnějším zdrojům rušení patří i atmosférické výboje ve formě přímého zásahu blesku nebo indukcí.

U indukovaného přepětí si musíme uvědomit, že rozdíl mezi venkovním a vnitřním vedením je dán pouze stínícím účinkem zdí budov. Útlum zdí může být v některých případech (zděné budovy, montované dřevěné stavby) minimální a rozdíl mezi venkovním a vnitřním vedením je pak dán pouze tím, že vnitřní vedení nemůže být přímo zasaženo bleskem. U železobetonových staveb je stínící účinek armovacího železa diskutabilní. Spoje armatury jsou zkoušeny totiž pouze z hlediska statické pevnosti a ne z hlediska elektrické vodivosti. Při elektromagnetické indukci se pak budova s Fe armaturou chová jako složitá struktura rezonátorů, vzájemně oddělených vysokými impedancemi nedostatečných svárů. V tomto případě se může ve vedení nataženém podél armovacích drátů vlivem rezonančních jevů naindukovat větší přepětí než ve vodiči „nestíněném“. Platí zásada: špatné, či nedokonale provedené stínění je horší než žádné.

Nejsilnějším zdrojem přepětí je blesk, který může způsobit přepětí 100kV až 1MV. Indukční účinky blesku způsobí přepětí až desítky kV. Ochranu proti úderům blesku dělíme na vnitřní a vnější.

Vnější ochranu tvoří bleskosvodná soustava - vertikální Franklinovy tyče spojené zemniči s dobrým uzemněním. V některých případech se vytváří u důležitých budov bleskosvodná síť, která snižuje účinky přímého zásahu budov tím více, čím je hustější. Modernějším prostředkem ochrany než zahušťování bleskosvodné sítě je použití aktivního bleskosvodu. Francouzská firma Helita vyvinula systém, který je aktivován vysokou intenzitou elektrického pole. Po aktivaci tento bleskosvod vysílá k vyvíjejícímu se blesku vstřícný výboj a vychýlí blesk ke špičce jímací tyče bleskosvodu. Poloměr ochrany aktivního bleskosvodu může být až 25-násobek ochranného poloměru klasického bleskosvodu Franklinova typu, je tedy HELITA také, zejména u členitých budov, levnější.

Vnitřní ochranu proti účinkům blesku, tj. proti atmosférickému i průmyslovému přepětí, tvoří soustava svodičů bleskových proudů a přepěťových ochran, založená na nelineárních prvcích, které při vzrůstu napětí nad jmenovité napětí snižují v extrémně krátkém čase svůj odpor a svádějí přepětí na ochranný vodič.

U ochrany proti přepětí platí pravidlo, že zařízení nebo systém musí být chráněno plně nebo vůbec. Velmi časté jsou případy, kdy opomenutím ochrany jediného datového vstupu do serveru (např. spojení se vzdálenou tiskárnou) dojde při úderu blesku, nebo při větší poruše v napájecí síti, ke zničení nejen tohoto nechráněného vstupu, ale i dalších I/O karet, případně celé základní desky počítače. Komplexnost ochrany zařízení pak znamená ochranu všech datových vstupů proti přepětí a 3 stupňovou ochranu napájecích rozvodů. Poslední stupeň této ochrany (ochrana zásuvky) bývá doplněn vf filtrem.

6. METODY ŘEŠENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍ

Pod pojmem řešení elektromagnetických polí rozumíme jeden z těchto postupů

1. řešení okrajové úlohy, tj. nalezení polní veličiny (***E***, ***D***, ***H***, ***B***, φ, ***A*** apod.) na základě znalosti rozložení a velikostí zdrojů (Q, ρ, σ, τ, ***J*** apod.) a okrajových podmínek (potenciálů elektrod nebo rozložení celkového náboje na elektrodách),
2. řešení inverzní úlohy, tj. nalezení rozložení zdrojů pro dané rozložení polních veličin.

Podle způsobu řešení pole dělíme metody na

a) analytické
b) grafické
c) numerické
d) experimentální

6.1. Analytické metody řešení polí

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- určit případy pro přímá řešení polí
- definovat možnost užití superpozice

Výklad

❑ Přímá metoda řešení polí, superpozice

Pod pojmem "Přímý výpočet polí" rozumíme výpočet některé polní veličiny, která se explicitně vyskytuje ve vztazích, vyjadřujících závislost velikosti této veličiny na geometrických proměnných a budicích veličinách. Vztahy zpravidla obsahují i materiálové parametry. Vhodně zvolená soustava může redukovat počet složek výsledné veličiny, např. ve sférické souřadné soustavě s bodovým nábojem v počátku můžeme řešit intenzitu pole nebo potenciál jako jednorozměrný problém. Z principu kauzality např. platí, že je-li zdroj pole i všechny podmínky kulově souměrné, musí mít i pole tuto symetrii. Metodu můžeme použít i pro hrubý odhad pole, buzeného zdroji složitějšího geometrického tvaru tak, že budicí objekt rozdělíme na elementy (bodové náboje) a výsledné pole získáme superpozicí jako součet účinků jednotlivých elementů ve vyšetřovaném bodě. U vektorových veličin se součet provádí vektorově. Zde je výhodné rozložit vektory od jednotlivých elementů do složek použité souřadné soustavy a složky potom skalárně sčítat.

Princip superpozice je všeobecně platný fyzikální princip, používaný i v jiných elektrotechnických i neelektrotechnických soustavách. Např., jak jsme poznali v teorii obvodů, lze na základě tohoto principu kteroukoliv napěťovou nebo proudovou odezvu obvodu určit jako součet odpovídajících odezev, které získáme při postupném působení vždy jen jediného zdroje. Podobně v elektromagnetickém poli můžeme v jistém referenčním bodě zjistit účinek soustavy zdrojových veličin (velikost polní veličiny) tak, že v tomto referenčním bodě sečteme účinky jednotlivých prvků této soustavy, tedy jednotlivých zdrojů, přičemž jiné zdroje jsou vyřazeny. Podmínkou je, aby byla závislost velikosti polní veličiny na velikosti zdrojové veličiny lineární.

Do oblasti přímých metod patří především:

a) výpočet elektrostatického pole pomocí Gaussovy věty,

b) výpočet magnetického pole pomocí Ampérova zákona,

c) výpočet magnetického pole pomocí Biortova-Savatrova zákona,

d) výpočet magnetického vektorového potenciálu, z něhož lze vypočíst indukci a intenzitu mag. pole.

U výpočtu vektorových veličin vycházíme ze skutečnosti, že každý vektor musí mít nějaký zdroj. Buď je jím zřídlo (Q, ρ, σ, τ apod.) a vektor z něj vytéká (velmi často jsou to volné náboje na elektrodách), nebo to mohou být víry zdrojové veličiny (např. ***J***), které vyvolávají nenulové křivkové integrály po uzavřených drahách, čili cirkulace vektoru polní veličiny. Záporná zřídla nazýváme nory.

Gaussova věta

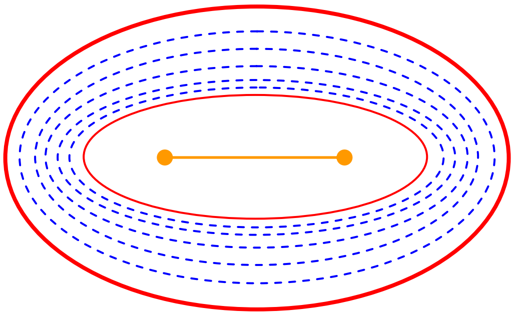
Gaussovou větou v součinnosti s metod. superpozice řešíme pole částice s nábojem, která se může vyskytovat jako:

1. samostatná bodová částice s nábojem,
2. soustava diskrétních bodových částic s nábojem,
3. spojitě rozložené částice s nábojem hustoty ρ,σ nebo τ,
4. nabité vodivé těleso.

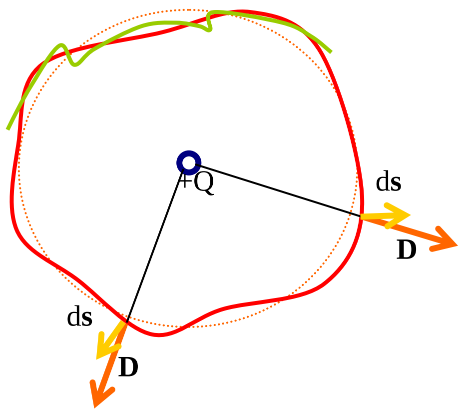
Použijeme vztahy (1.20) (1.21). Výpočet předpokládá znalost rozložení náboje, což v praxi není vždy možné. Dále předpokládá neomezené prostředí a předběžnou znalost průběhu siločar. Aby totiž bylo použití Gaussovy věty výhodné, musí být v každém místě vektor ***E*** a vektor ***ds*** elementu plochy kolineární. Vlastní výpočet pole mezi dvěmi elektrodami může využít následující myšlenku

- stanovit pole známého rozložení náboje,
- ztotožnit některou ekvipotenciálu s elektrodou a zjistit jakým rozložením nábojů byla buzena.

Např. ekvipotenciální plochy vodivé úsečky (v obrázku oranžové) nabité rovnoměrně na liniovou hustotu τ mají tvar konfokálních elips (modrých) s ohnisky v konečných bodech úsečky obr.6.1. Tento závěr získáme rozdělením úsečky na elementární bodové náboje dQ a integrací (sečtením) potenciálů od všech elementů úsečky v jednom referenčním bodě vyšetřovaného prostoru. Máme-li nyní za úkol vyšetřit pole mezi dvěma konfokálními rotačními elipsoidy (v obrázku červeně), jejichž potenciály známe, ztotožníme je s ekvipotenciálami nabité úsečky, nalezneme zpětně, jak velký by musel být náboj τ, který by tyto ekvipotenciály vytvořil a potom můžeme určit v kterémkoliv bodě mezi konfokálními elipsami velikost polních veličin, jako účinek nabité úsečky.



obr. 6.1



obr. 6.2

Výpočet jednoduchých symetrií byl již uveden v kapitole 1.2.2. Pro jiný nesymetrický tvar integračních ploch, např. je-li u bodového náboje volen tvar podle obr.6.2, se výpočet komplikuje. Plocha se musí potom uvažovat stupňovitá (náynak yelenou barvou), sestavená např. z plošných elementů jednotlivých koulí.

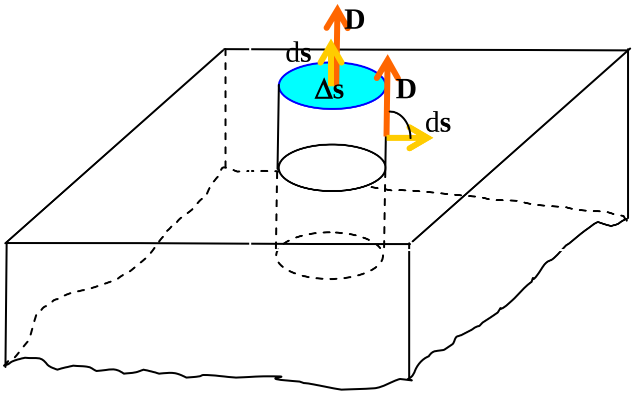
Gaussovou větou můžeme vyřešit pole v okolí rovinné elektrody obr.6.3. Jako integrační plochu volíme váleček s plochou podstav Δ*s*. Plášť válce neprotíná vektor ***E***, a proto se ve výpočtu neuplatní (***E*** je kolmé na Δ***s*** pláště). Potom platí

$$E_{n}\cdot\Delta s = \frac{\varepsilon}{Ó} = \frac{\varepsilon}{ϱ\cdot\nabla ƨ} \qquad (6.1)$$

$$E_{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad E_{t} = 0 \qquad (6.2)$$

Je-li

- $\sigma > 0$ směřuje ***E*** do dielektrika
- $\sigma < 0$ směřuje ***E*** z dielektrika

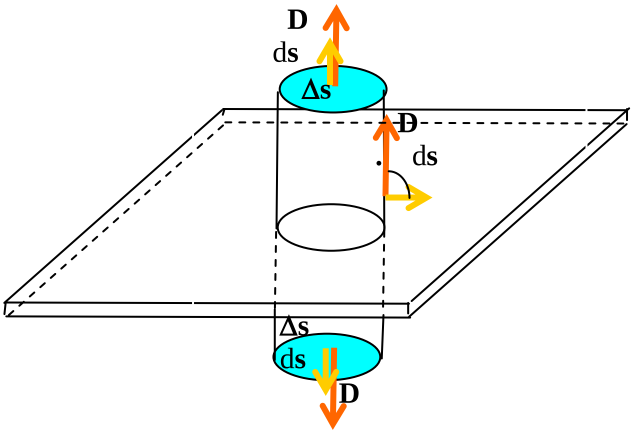


obr. 6.3

Podobně bychom řešili pole nekonečně velké rovinné fólie, nabité nábojem *s*. Fólie je vlastně ekvipotenciální plochou protože ***E*** je k ní v každém místě kolmé obr.6.4. Oproti rovinné elektrodě vytéká vektor ***E*** na obě strany a proto je

$$2\cdot E_{n}\cdot\Delta s = \sigma\cdot\Delta s$$

$$E_{n} = \sigma/2\cdot\varepsilon \qquad (6.3)$$



obr. 6.4

Pole desky konečné tlouštky bychom řešili podobně s tím, že na každé straně desky je náboj $\sigma/2$. Intenzita vyjde stejná.

Ampérův zákon

Vektor ***B*** nemá zřídla a má-li existovat, musí existovat jeho víry. Vytváří tedy nenulové integrály (cirkulace) po uzavřených křivkách. Pro stacionární pole bylo Maxwellem odvozeno a pokusy dokázáno

$$rot\,\boldsymbol{B} = \mu_0\cdot(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_v) \qquad (6.4)$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\cdot\sum I \qquad (6.5)$$

kde ***J*** je hustota volného kondukčního nebo konvekčního proudu,

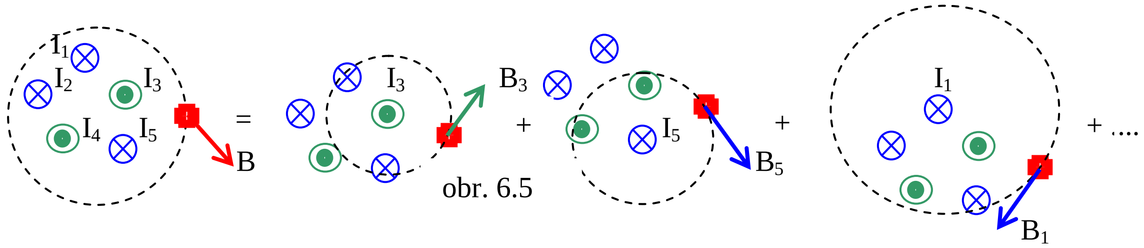
$\boldsymbol{J}_v = rot\,\boldsymbol{M}$ je hustota vázaných proudů v magnetiku bez proudů volných.

Po dosazení a úpravě dostáváme již dříve odvozené vztahy

$\boldsymbol{B} = \mu_o(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ $\quad\quad\quad\quad$ $rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$

Zdrojem vírového pole ***B*** jsou volné a vázané proudy, zdrojem vírového pole ***H*** jen volné proudy.

Integrační dráhu u Ampérova zákona (6.5) volíme výhodně tak, aby v každém jejím bodě byl element



obr. 6.5

této křivky ***dl*** kolineární s vektorem intenzity magnetického pole. To ale vyžaduje, abychom na základě symetrií předběžně znali průběh magnetických siločar. Podle vztahu (6.5) a obr.6.5 může uvnitř integrační dráhy protékat více proudů a odhad průběhu výsledné siločáry procházející referenčním bodem je obtížný. V takovém případě je vhodnější použít metodu superpozice. Obecně nemusí být integrační křivky siločárami obr.. Na obr.6.5 jsou tři integrační dráhy. Není-li tedy integrační dráha volena jako siločára, je výpočet komplikován tím, že v každém místě této dráhy musíme respektovat i úhel mezi ***H*** a ***dl*** a potom je výhodnější použít jinou metodu.

Využití kulové symetrie nepřipadá v magnetickém poli v úvahu. Proud by se musel roztékat radiálně od středu symetrie, v němž by nebyla hustota náboje stacionární. Při aplikaci Ampérova zákona ale hojně využíváme symetrii válcovou. Její použití pro výpočet pole přímého osamělého velmi dlouhého vodiče je naznačen na obr.6.6. Délka integrační dráhy po sečtení délky všech elementů ***dl*** na obecném libovolném poloměru je a je tedy rovna délce kružnice. Vedeme-li integrační dráhu vně vodiče s poloměrem *a*, teče uvnitř této dráhy celý proud *I*, kdežto uvnitř dráhy vedené uvnitř vodiče protéká jen část proudu $I' = J\cdot\pi.\cdot r$, přičemž $J = I/\pi\cdot a^2$. Po dosazení do (6.5) dostáváme pro intenzitu

vně vodiče

$$H = \frac{I}{2\pi r^2} \qquad \text{uvnitř vodiče}$$

$$H = \frac{I.r}{2\pi a^2} \tag{6.6}$$

Při řešení pole masivního vodiče jej rozdělíme na jednotlivá vlákna - elementy s plochou $ds = dx\cdot dy$, vyřešíme závislost intenzity pole na vzdálenosti vlákna od referenčního bodu a integrujeme (sčítáme účinky) po celém průřezu vodiče. Siločáry mají v tomto případě tvar elips. V obecném případě siločáry nemusí sledovat obrys průřezu vodiče. Také cívku lze považovat za "masivní" vodič. Efektivní hustota proudu je zmenšena izolací mezi závity (činitelem plnění) a tvarem drátu.

Vraťme se ale ke dvěma rovnoběžným vodičům protékaným proudy opačného směru, Pro referenční bod na obecném poloměru *r*, tedy v oblasti $a_1 < r < a_2$, jsou výsledky stejné jako pro jeden vodič protékaný proudem. Vedeme-li integrační dráhu v „plášti“ koaxiálu, tj. v oblasti $a_2 < r < a_3$ teče uvnitř integrační dráhy proud $I - I'$, tedy i část zpětného proudu. potom

$$\mathrm{H} = \frac{I - I'}{2\pi r} \tag{6.7}$$

Konečně vně vodičů pro $r > a_3$ obepíná integrační dráha celkový proud $I - I = 0$ a také $H = 0$.

U výpočtu pole vybuzeného cívkou se závity hustě ovinutými kolem anuloidu považujeme závity za hustou proudovou vrstvu a siločáry mají tvar koncentrické křivky. Integrační dráha vedená vně anuloidu pro $r > \mathrm{a}_2$ obepíná proud $I - I = 0$ a vně cívky je tedy nulové magnetické pole. Uvnitř cívky je s každou siločárou spřažen proud *NI* a je zde tedy

$$H = \frac{N \cdot I}{2\pi r} \tag{6.8}$$

(Pozor ale na skutečnost, že napájíme anuloid z jednoho místa a existuje tedy alespoň jeden závit v rovině anuloidu a existuje i malé pole protékající vnitřkem kruhu, který ohraničuje vnitřní obvod anuloidu. Proud musí obejít cívku i ve směru její osy. To může vnášet do vinutí vnější šumy, projevující se např. jako brum.) Pro nekonečně velký střední poloměr anuloidu r_s dostáváme variantu nekonečně dlouhé cívky. Podle tohoto obrázku volíme i integrační dráhu C_a. Označme počet závitů na 1m symbolem N_L,

$$H = N_L \cdot I \tag{6.9}$$

? Testové otázky ke zkoušce

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek v příloze této učebnice pod názvem Elektromagnetismus - testy.

Další zdroje

Benda, O.: Analyt. vyjadrenie a počítačová simulácia magnet. charakteristik pre potreby numerického riešenia polí vo feromagnetikách, skriptum 1. letní školy teoretické elektrotechniky, Plzeň 1992.

Dědek,L., Dědková, J.: Elektromagnetismus, učební text VUT Brno, VULTIUM, Brno 1998.

Hajko,V., Potocký,L., Zentko,A.: Magnetizačné procesy, ALFA Bratislava 1982.

Haňka,L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL Praha, 1975.

Haňka,L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL Praha, 1982.

Havel, V.: Výpočet hysterézních ztrát feromagnetika ze tří bodů hysterézní smyčky, Elektrotechnický obzor 8/1987.

Jerhotová, E., Macháč,J., Škvor, Z.: Počítačové a laboratorní úlohy v elektromagnetickém poli, vydavatelství ČVUT Praha, 2002, ISBN 80-01-02590-X.

Kalousek, V., Mihula, Z., Dědek, L.: Teorie elektromagnetického pole, skripta VUT Brno.

Macháč,J.: Theory of electromagnetic field, vydavatelství ČVUT Praha 2003, ISBN 80-01-02664-7

Mayer, D., Ulrych,B.: Základy numerického řešení elektrických a magnetických polí, SNTL/ALFA, 1988.

Navrátil,L., Hlavatý,V. a kol.: Lasery a pulzní magnety v terapii, nakladatelství Alberta s.r.o., Praha 1994, ISBN 80-85792-09-5.

Polák, J.: Variační principy a metody teorie elektromagnetického pole, ACADEMIA Praha 1988.

Štoll,I.: Elektřina a magnetismus, Vydavatelství ČVUT Praha, 2003, ISBN 80-01-02693-0